CONTINUITÉ DU SPECTRE DANS LES ALGÈBRES DE BANACH AVEC INVOLUTION.

BERNARD AUPETIT

Let A a complex Banach algebra with an involution. If the spectral radius is submultiplicative on the set of hermitian elements the spectrum is continuous on the set of normal elements. From this we conclude that the set of hermitian elements with real spectrum is closed in the set of hermitian elements, which generalizes a result of B. Yood.

Soit A une algèbre de Banach complexe munie d'une involution $x \rightarrow x^*$. On dénote par H et N les ensembles des éléments hermitiens (c'est-à-dire vérifiant $x = x^*$) et des éléments normaux (c'est-à-dire vérifiant $xx^* = x^*x$), par ρ le rayon spectral. Plus loin nous désignerons par $\tilde{A}$ l'algèbre obtenue de A par adjonction d'une unité si A n'a pas d'unité, avec la norme $\|x + \lambda 1\| = \|x\| + |\lambda|$ et l'involution $(x + \lambda 1)^* = x^* + \bar{\lambda} 1$ et $\tilde{A} = A$ si A a une unité.

DÉFINITION 1. On dit que ρ est sous-multiplicatif sur H s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\rho(ab) \leq \alpha \rho(a)\rho(b)$ quels que soient a et b dans H .

Etant donnés deux ensembles compacts K_1 et K_2 de $\mathbb{C}$, la distance de Hausdorff $\delta(K_1, K_2)$ est définie par:

$$\delta(K_1, K_2) = \text{Max} \left(\text{Sup}_{x \in K_2} d(x, K_1), \text{Sup}_{x \in K_1} d(x, K_2) \right) \text{ où } d(x, K) = \text{Inf}_{y \in K} |x - y|.$$

DÉFINITION 2. La fonction $x \mapsto \text{Sp}x$ est dite continue si elle est continue pour la distance de Hausdorff.

Pour tous les détails concernant cette définition voir Newburgh [2].

THÉORÈME. *Si ρ est sous-multiplicatif sur l'ensemble des éléments hermitiens alors $x \mapsto \text{Sp}x$ est continue sur l'ensemble des éléments normaux.*

Démonstration. A la rigueur en raisonnant dans $A/\text{Rad } A$, ce qui ne change pas le spectre puisque $\text{Sp}\dot{x} = \text{Sp}x$ en appelant $\dot{x}$ la classe de x , on peut supposer que l'involution est continue (ces résultats bien connus sont tous deux cités dans [5]). Supposons le spectre non continu sur N , alors il existe x normal et x_n normaux qui tendent vers x , quand n tend vers l'infini, ainsi que $\epsilon > 0$ et $\lambda_0 \in \text{Sp}x$ tels que:

$|\lambda_0 - \lambda| > \epsilon$ pour tout $\lambda \in Sp x_n$, quel que soit n entier.

Premier cas. Si $\lambda_0 = 0$, alors comme $\lambda_0 \notin Sp x_n$, x_n est inversible donc A admet une unité et $\rho(x_n^{-1}) = \rho(x_n^{*-1}) < 1/\epsilon$ puisque:

$$Sp x_n^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in Sp x_n \right\}.$$

Alors $u_n = x_n x_n^*$ est inversible et tend vers $u = x x^*$. On a : $1 - u u_n^{-1} = (u_n - u) u_n^{-1}$ et u_n^{-1} hermitien donc,

$$\rho(1 - u u_n^{-1}) \leq \alpha \rho(u_n^{-1}) \rho(u_n - u) \leq \frac{\alpha}{\epsilon} \|u_n - u\|$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc d'après le lemme 1.4.18 de [3], u est inversible à droite. En raisonnant avec $u_n^{-1} u$ on obtient que u est inversible, donc x inversible, ce qui est absurde.

Deuxième cas. Supposons $\lambda_0 \neq 0$ et plaçons nous dans $\tilde{A}$, alors $1 - (x_n/\lambda_0)$ tend vers $1 - (x/\lambda_0)$. Comme l'involution est supposée continue dans A elle est continue dans $\tilde{A}$, donc $1 - (x_n^*/\bar{\lambda}_0)$ tend vers $1 - (x^*/\bar{\lambda}_0)$. Si $\lambda \in Sp(x_0/\lambda_0)$ alors $\lambda \lambda_0 \in Sp x_n$ donc $|\lambda \lambda_0 - \lambda_0| > \epsilon$ ainsi:

$$Sp\left(1 - \frac{x_n}{\lambda_0}\right)^{-1} = \left\{ \frac{1}{1-\lambda} \mid \lambda \in Sp \frac{x_n}{\lambda_0} \right\} = \left\{ \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda \lambda_0} \mid \lambda \in Sp \frac{x_n}{\lambda_0} \right\}$$

d'où:

$$\rho\left(\left(1 - \frac{x_n}{\lambda_0}\right)^{-1}\right) \leq \frac{|\lambda_0|}{\epsilon}.$$

Par un raisonnement identique:

$$\rho\left(\left(1 - \frac{x_n^*}{\lambda_0}\right)^{-1}\right) \leq \frac{|\lambda_0|}{\epsilon}.$$

Posons $u_n = \left(1 - \frac{x_n}{\lambda_0}\right) \left(1 - \frac{x_n^*}{\lambda_0}\right)$ et $u = \left(1 - \frac{x}{\lambda_0}\right) \left(1 - \frac{x^*}{\lambda_0}\right)$. Comme x_n et x_n^* commutent on obtient:

$$(1) \quad \rho(u_n^{-1}) \leq \frac{|\lambda_0|^2}{\epsilon^2}.$$

Posons $u_n = 1 + h_n$ où h_n est hermitien dans A . L'inverse de u_n est hermitien dans A donc de la forme $v_n + \mu_n 1$. Mais de:

$$(1 + h_n)(\mu_n 1 + v_n) = (\mu_n 1 + v_n)(1 + h_n) = 1$$

on obtient que $\mu_n = 1$.

Pour n assez grand de façon que $\|u - u_n\| < 1$ alors:

$$\begin{aligned} (2) \quad u &= u_n + u - u_n = u_n [1 + u_n^{-1}(u - u_n)] = u_n [1 + (1 + v_n)(u - u_n)] \\ &= u_n [1 + u - u_n + v_n(u - u_n)] \\ &= u_n [1 + v_n(u - u_n)(1 + u - u_n)^{-1}] \cdot (1 + u - u_n). \end{aligned}$$

or $(u - u_n)(1 + u - u_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (u - u_n)^{k+1}$ est dans H , qui est fermé puisque l'involution est continue. Comme ρ est sous-multiplicatif, sur H on obtient:

$$(3) \quad \rho(v_n(u - u_n)(1 + u - u_n)^{-1}) \leq \alpha \rho(v_n) \rho((u - u_n)(1 + u - u_n)^{-1}).$$

Mais $v_n = u_n^{-1} - 1$ donc d'après (1), $\rho(v_n) \leq 1 + (|\lambda_0|^2/\epsilon^2)$ de plus $\rho((u - u_n)(1 + u - u_n)^{-1})$ tend vers zéro quand u_n tend vers u , donc d'après (2), (3) et le Lemme 1.4.18 de [3], u est inversible, d'où $1 - (x/\lambda_0)$ est inversible, ce qui est contradictoire.

REMARQUE 1. Sans modifier la démonstration on voit que le spectre est continu sur l'ensemble des x tels que $\rho(xx^*) \leq \rho(x)^2$.

REMARQUE 2. En reprenant la démonstration, il est possible de prouver que si ρ est sous-multiplicatif sur une algèbre A , pas nécessairement involutive, alors ρ est continu sur tout A . En fait, dans ce cas $A/\text{Rad } A$ est commutative (voir [1]).

Voici quelques corollaires qui découlent immédiatement du théorème.

COROLLAIRE 1. Si ρ est sous-multiplicatif sur H et si $\beta > 0$, l'ensemble des éléments normaux dont le rayon spectral est inférieur ou égal à β est fermé dans N .

COROLLAIRE 2. Si ρ est sous-multiplicatif sur H , l'ensemble des éléments hermitiens dont le spectre est réel est fermé dans H .

COROLLAIRE 3. (B. Yood [6]) S'il existe $\gamma > 0$ tel que $\rho(x) \geq \gamma \|x\|$ quel que soit $x \in H$ alors l'ensemble des éléments hermitiens dont le spectre est réel est fermé dans A .

Démonstration. D'après [4], l'involution est continue, donc H est fermé dans A . De plus si $a, b \in H$ on a :

$$\rho(ab) \cong \|ab\| \cong \|a\| \cdot \|b\| \cong \frac{1}{\gamma^2} \rho(a)\rho(b)$$

et on applique le corollaire précédent.

REMARQUE 3. On peut aussi démontrer le résultat de B. Yood à l'aide des résultats de Newburgh [2], cités dans [3] p. 37.

COROLLAIRE 4. *Si A est une algèbre symétrique alors le spectre est continu sur l'ensemble des éléments normaux.*

Démonstration. Cela résulte du fait que ρ est sous-multiplicatif sur H . En utilisant la sous-additivité de ρ sur N on peut aussi montrer que l'enveloppe convexe du spectre est uniformément continue sur N .

QUESTIONS. Est-il vrai que si ρ est sous-multiplicatif sur H alors le spectre est uniformément continu sur N (toujours au sens de la distance δ)? Quelles sont les algèbres involutives telles que ρ soit sous-multiplicatif sur H ?

* Pendant le délai de révision de ce travail l'auteur n'a résolu complètement aucun de ces deux problèmes. Cependant pour la première question il a pu prouver que l'enveloppe convexe du spectre est uniformément continue sur H parce que ρ est sous-additif sur H .

RÉFÉRENCES

1. B. Aupetit, *Caractérisation spectrale des algèbres de Banach commutatives*, à paraître.
2. J. D. Newburgh, *The variation of spectra*, Duke Math. J., **18** (1951), 165-176.
3. C. E. Rickart, *General Theory of Banach algebras*, D. Van Nostrand Co, Princeton, 1960.
4. B. Yood, *Topological properties of homomorphisms between Banach algebras*, Amer. J. Math., **76** (1954), 155-167.
5. ———, *Continuity for linear maps on Banach algebras*, Studia Math., **31** (1968), 263-266.
6. ———, *On axioms for B^* -algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 80-82.

Received November 26, 1973, and in revised form May 21, 1974.

UNIVERSITÉ LAVAL, QUÉBEC, CANADA