PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 78, No. 1, 1978

ALTERNIERENDE PRODUKTE IN FREIEN GRUPPEN

GERHARD ROSENBERGER

1. Einleitung. A. In [7] and [8] untersucht H. Zieschang das Problem, wann zwei alternierende Produkte in freien Gruppen verwandt sind. Bei Anwendungen und konkreten Problemen tritt aber oft die allgemeinere Frage auf:

Sei G freie Gruppe vom Rang $n \geqq 1$ mit den freien Erzeugenden $a_1, \cdots, a_n$ und

$$P(a_1, \cdots, a_n) = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] \in G$$

ein alternierendes Produkt in G. Sei X Untergruppe von G vom Rang $m \geqq 1$ und $P^\alpha(a_1, \cdots, a_n) \in X$ für ein $\alpha \geqq 1$. Wie läßt sich X durch $P(a_1, \cdots, a_n)$ beschreiben? Diese Frage wurde beispielsweise schon zum Teil beantwortet in [5] (der Fall $p = n$) und [7] (der Fall $p = 0$). Hier geben wir eine vollständige Antwort auf diese Frage.

Im zweiten Teil der Arbeit finden die Ergebnisse zu dieser Frage Anwendungen bei der Behandlung gewisser Untergruppenprobleme von freien Gruppen und bei der Beschreibung von Erzeugendensystemen einer Klasse von Gruppen. Insbesondere lösen wir für eine Klasse von Gruppen mit einer definierenden Relation das Isomorphieproblem in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine beliebige Gruppe mit einer definierenden Relation zu einer Gruppe dieser Klasse isomorph ist oder nicht.

B. Diese Arbeit verwendet die Terminologie und Bezeichnungsweise von [4] und [9]. Es bedeute: $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ den Kommutator von $a, b \in G$ (G Gruppe). $\langle \cdots ; \cdots \rangle$ die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und Relationen. $(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ den größten gemeinsamen Teiler von $\beta_1, \cdots, \beta_k \in N$ $(k \geqq 1)$.

2. Über Gleichungen in freien Gruppen. Sei $G = \langle a_1, \cdots, a_n ; \rangle$ $(n \geqq 1)$ freie Gruppe vom Rang n mit den freien Erzeugenden $a_1, \cdots, a_n$ und

$$P(a_1, \cdots, a_n) = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] \in G$$

ein alternierendes Produkt in G mit $0 \leqq p \leqq n$, $\alpha_i \geqq 1$ für $i = 1, \cdots, p$. Sei $\{x_1, \cdots, x_m\} \subset G$ $(m \geqq 1)$ und X die von den $x_1, \cdots, x_m$ erzeugte Untergruppe von G. Sei $y^{-1}P^\alpha(a_1, \cdots, a_n)y \in X$ für ein $\alpha \neq 0$ und $y \in G$.

SATZ 1. *Es tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(a) *Es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \cdots, x_m\}$ *zu einem System* $\{y_1, \cdots, y_m\}$ *mit* $y_1 = zP^\beta(a_1, \cdots, a_n)z^{-1}$, $\beta > 0$ *und* $z \in G$, *und* β *ist die kleinste positive Zahl, für die eine Beziehung* $y^{-1}P^\beta(a_1, \cdots, a_n)y \in X$ *für ein* $y \in G$ *gilt.*

(b) *Es ist* $m \geqq n$, *und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \cdots, x_m\}$ *zu einem System* $\{y_1, \cdots, y_m\}$ *mit* $y_i = za_i^{\gamma_i}z^{-1}$, $1 \leqq \gamma_i < \alpha_i$. $\gamma_i | \alpha_i$ $(i = 1, \cdots, p)$, $y_j = za_jz^{-1}$ $(j = p + 1, \cdots, n)$ *und* $z \in G$.

Beweis. Es trete nicht der Fall (a) ein. Wir können annehmen, daß kein zu $\{x_1, \cdots, x_m\}$ frei äquivalentes System $\{y_1, \cdots, y_q\}$ ein echtes Teilsystem $\{y_1, \cdots, y_q\}$ besitzt mit $q < m$ und $y^{-1}P^\alpha(a_1, \cdots, a_m)y \in \langle y_1, \cdots, y_q\rangle$ für ein $\alpha \neq 0$ und $y \in G$. Wir dürfen also im folgenden voraussetzen: m ist in diesem Sinn minimal mit dieser Eigenschaft, und $\{x_1, \cdots, x_m\}$ ist insbesondere schon ein freies Erzeugendensystem von X.

Im folgenden sei α die kleinste positive Zahl, für die eine Beziehung $y^{-1}P^\alpha(a_1, \cdots, a_n)y \in X$ für ein $y \in G$ gilt. Wir dürfen $y = 1$ annehmen—eventuell nach Ersetzen von x_i durch yx_iy^{-1}.

In G sei die freie Länge L und eine geeignete lexikographische Ordnung relativ zu den Erzeugenden $a_1, \cdots, a_n$ eingeführt. Wenden wir die klassische Nielsensche Kürzungsmethode auf $\{x_1, \cdots, x_m\}$ an, so erhalten wir schließlich ein System, das der Nielsenschen Eigenschaft bzgl. L genügt, d.h. in dem kein Element und kein Inverses eines Elementes von einem anderen mehr als die Hälfte kürzt, keine zwei ein anderes ganz kürzen (vgl. [10, S. I. 12]). Das neue System erzeugt dieselbe Untergruppe von G wie $\{x_1, \cdots, x_m\}$. Wir können nun annehmen, daß schon $\{x_1, \cdots, x_m\}$ die Nielsensche Eigenschaft bzgl. L hat. Wir schreiben nun jedes x_i^ε, $\varepsilon = \pm 1$; als frei gekürzten Wort in $a_1, \cdots, a_n$. Dann bleibt in jedem frei gekürzten Produkt in $x_1, \cdots, x_m$ für jedes x_i^ε, $\varepsilon = \pm 1$, mindestens ein Symbol ungeändert an der Stelle erhalten, an der x_i^ε auftrat, wenn man für die $x_1, \cdots, x_m$ ihre frei gekürzten Worte in $a_1, \cdots, a_n$ einsetzt und relativ zu $a_1, \cdots, a_n$ frei kürzt. Für jedes x_i zeichnen wir eine solche standhafte Stelle aus und nehmen für x_i^{-1} die entsprechende Stelle mit dem inversen Zeichen. $\{x_1, \cdots, x_m\}$ genügt einer Gleichung

$$\prod_{j=1}^{t_1} x_{\nu_j}^{\varepsilon_j} = W(x_1, \cdots, x_m) = P^\alpha(a_1, \cdots, a_n)\,, \tag{2.1}$$

$\varepsilon_j = \pm 1$, $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ falls $\nu_j = \nu_{j+1}$.

Beh. (2.2). Es ist $\alpha = 1$.

Beweis von (2.2). Angenommen $\alpha \geqq 2$. Da der Fall (a) nicht eintritt, ist $W(x_1, \cdots, x_m)$ kein primitives Element in $\langle x_1, \cdots, x_m\rangle$.

Nach [1] ist $W(x_1, \cdots, x_m)$ eine echte Potenz in X. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von α. Also ist $\alpha = 1$.

Sei nun $\alpha = 1$. Für $p = n$ folgt die Behauptung aus Satz 1 von [5]. Für $p = 0$ folgt die Behauptung aus Satz 2 [5]. Sei nun $1 \leqq p < n$.

Es gebe nun in (2.1) zwei verschiedene Indizes $j, i (1 \leqq j < i \leqq t_1)$ mit $\nu_j = \nu_i = k$, $\nu_h \neq k$ für $j < h < i$ und $\varepsilon_j = \varepsilon_i$. Sei ohne Einschränkung $\varepsilon_j = \varepsilon_i = 1$. Wir wollen zeigen, daß $j = i - 1$ und x_k zu einer Potenz von einem $a_\nu (1 \leqq \nu \leqq p)$ konjugiert ist. Sei a_λ^ε, $\varepsilon = \pm 1$, eine standhafte Stelle von x_k. Es bleibt a_λ^ε beide Male stehen. Daher tritt in (2.1) nicht x_k^{-1} auf, denn das standhafte Zeichen von x_k^{-1} ist $a_\lambda^{-\varepsilon}$, und in (2.1) kann das standhafte Zeichen $a_\lambda^{-\varepsilon}$ nicht auftreten, wenn das standhafte Zeichen a_λ^ε zweimal auftritt. Insbesondere ist $1 \leqq \lambda \leqq p$ und $\varepsilon = 1$. Es ist $x_k = u a_\lambda^\beta v$, wobei das frei gekürzte Wort von u bzw. v in $a_1, \cdots, a_n$ nicht mit Potenzen von a_λ endet bzw. beginnt. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
x_k \Big(\prod_{\mu=j+1}^{i-1} x_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu} \Big) x_k &= u a_\lambda^\beta v \Big(\prod_{\mu=j+1}^{i-1} x_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu} \Big) u a_\lambda^\beta v \\
&= u a_\lambda^{\beta'} (a_\lambda^{\alpha_\lambda} \cdots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] a_1^{\alpha_1} \cdots a_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}})^\delta \cdot a_\lambda^{\beta''} \cdot v \, , \\
\delta &\geqq 0 \, .
\end{aligned}
$$

Da in $P(a_1, \cdots, a_n)$ zwischen zwei Zeichen a_λ keine anderen a_ν auftreten, ist $\delta = 0$. Dann ist $j = i - 1$ und x_k ist zu einer Potenz von a_λ konjugiert (Wegen der Minimalität von m, und da (a) nicht eintritt).

Wir haben also:

Tritt in (2.1) ein x_j mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auf, so ist dieses x_j zu einer Potenz von einem a_i $(1 \leqq i \leqq p)$ konjugiert.

Da der Fall (a) nicht eintritt, erhalten wir gleichzeitig: Jedes x_j, das in (2.1) vorkommt, tritt dort entweder mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten, d.h. ist zu einer Potenz von einem $a_i (1 \leqq i \leqq p)$ konjugiert, oder genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und genau einmal mit dem Exponenten -1 auf.

Sei $r (0 \leqq r \leqq m)$ die Zahl der x_j, die in (2.1) mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auftreten, und sei $s (0 \leqq s \leqq m)$ die Zahl der x_j, die in (2.1) genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und genau einmal mit dem Exponenten -1 auftreten.

Indem wir unwesentliche und überflüssige Elemente entfernen, können wir anehmen, daß jedes x_j in (2.1) auftritt, und wir bezeichnen das neue System flüchtig mit den gleichen Symbolen. Damit ist $1 \leqq r + s = m$ (Die nachfolgenden Überlegungengen zeigen $m = n$).

Beh. (2.3). Es ist $r = p$.

Beweis von (2.3). Angenommen $r < p$. Dann gibt es ein $a_\lambda(1 \leqq \lambda \leqq p)$, für das kein x_ν zu einer Potenz von diesem a_λ konjugiert ist, etwa a_1. Dann liegt in der abelsch-gemachten Gruppe ein a_1^γ, $\gamma \neq 0$, in der von den $a_2, \cdots, a_n$ erzeugten abelschen Gruppe. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß die abelsch-gemachte Gruppe freie abelsche Gruppe vom Rang n ist.

Also ist $r \geqq p$. Es ist auch $r \leqq p$, denn für $r > p$ sind zwei verschiedene x_j zu einer Potenz desselben $a_\lambda(1 \leqq \lambda \leqq p)$ konjugiert, und das steht im Widerspruch dazu, daß das System $\{x_1, \cdots, x_m\}$ Nielsensche Eigenschaft hat und (2.1) genügt und jedes x_j in (2.1) auftritt. Also ist $r = p$.

Aus der Nielsenschen Eigenschaft von $\{x_1, \cdots, x_m\}$ folgt nun, daß wir—eventuell nach einem geeigneten freien Übergang und Umnummerierung—

$$x_i = a_i^{\gamma_i},\ 1 \leqq \gamma_i < \alpha_i\ , \qquad \gamma_i | \alpha_i \qquad \text{für} \quad i = 1, \cdots, p$$

annehmen können.

Damit haben wir Satz 1 auf die folgende Situation zurückgeführt: $\{x_{p+1}, \cdots, x_m\}$ genügt einer Gleichung

$$\prod_{j=1}^{t_2} x_{\nu_j}^{\varepsilon_j} = [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n]\ , \qquad \varepsilon_j = \pm 1\ , \tag{2.3}$$

$\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ falls $\nu_j = \nu_{j+1}$, in der jedes $x_j(p + 1 \leqq j \leqq m)$ genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und genau einmal mit dem Exponenten -1 auftritt (es können noch Erzeugende $a_i(1 \leqq i \leqq p)$ in den Worten $x_j(p + 1 \leqq j \leqq m)$ auftreten). Es ist $m \leqq n$, da sonst in (2.3) die Zahl der standhaften Zeichen größer als $2(n - p)$ wäre, d.h.

$$L([a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n]) = 2(n - p) \geqq t_2 - 1 \geqq 2(n - p) + 1$$

wäre. Andererseits ist $m \geqq n$ (vgl. [5] und [2]).

Also ist $m = n = r + s = p + s$.

Analog wie beim Beweis von Satz V. 2 von [10; pp. V. 6 und V. 7] zeigt man nun aber: Es gibt einen freien Übergang von

$$\{a_1^{\gamma_1}, \cdots, a_p^{\gamma_p}, x_{p+1}, \cdots, x_m\} \text{ zu } \{a_1^{\gamma_1}, \cdots, a_p^{\gamma_p}, a_{p+1}, \cdots, a_n\}\ .$$

KOROLLAR 1. *Sei* $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \geqq 2$. *Ist* φ *ein Endomorphismus von* G, *der* $P(a_1, \cdots, a_n)$ *festläßt, so ist* φ *ein Automorphismus von* G.

Beweis. Wir setzen $y_i = \varphi(a_i)$ für $i = 1, \cdots, n$ und betrachten die von $y_1, \cdots, y_n$ erzeugte Untergruppe Y von G. In Y gilt

$$P(y_1, \cdots, y_n) = P(a_1, \cdots, a_n)\ .$$

Analog wie bei Lemma 1 von [5] ergibt sich wegen $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \geqq 2$, daß es keinen freien Übergang von $\{y_1, \cdots, y_n\}$ zu einem System $\{z_1, \cdots, z_n\}$ mit $z_1 = P(a_1, \cdots, a_n)$ gibt. Nun folgt die Behauptung aus Satz 1.

3. Anwendungen.

SATZ 2. *Sei* $G = \langle a_1, \cdots, a_n;\rangle (n \geqq 1)$ *freie Gruppe vom Rang* n *mit den freien Erzeugenden* $a_1, \cdots, a_n$. *Sei* $\{x_1, \cdots, x_m\} \subset G (m \geqq 1)$ *und* X *die von* $x_1, \cdots, x_m$ *erzeugte Untergruppe von* G. *Es gebe* $u_1, \cdots, u_k \in X$ *mit*

$$u_1^{\beta_1} \cdots u_k^{\beta_k} = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] ,$$

$0 \leqq p \leqq n$, $\alpha_i \geqq 1 (i = 1, \cdots, p)$, $2 \leqq \beta_j (j = 1, \cdots, k)$ *und* $(\beta_1, \cdots, \beta_k) \geqq 2$.

Dann gilt.

(a) *Es ist* $m \geqq n$, *und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \cdots, x_m\}$ *zu einem System* $\{y_1, \cdots, y_m\}$ *mit* $y_i = a_i^{\gamma_i}$, $1 \leqq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i (i = 1, \cdots, p)$, $y_j = a_j (j = p + 1, \cdots, n)$.

(b) *Ist* $p = n$, *so ist* $k \geqq n$.

(c) *Ist* $p < n$, *so ist* $k \geqq n + 1$.

Beweis. X ist als Untergruppe einer freien Gruppe vom Rang n auch freie Gruppe. Es ist $q = \text{Rang}\, X \leqq m$, da X von $x_1, \cdots, x_m$ erzeugt wird. Sei $\{y_1, \cdots, y_q\}$ ein freies Erzeugendensystem von X. Nach Lemma 1 von [5] gibt es keinen freien Übergang von $\{y_1, \cdots, y_q\}$ zu einem System $\{z_1, \cdots, z_q\}$ mit $z_1 = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n]$. Damit gilt nach Satz 1:

Es ist $q \geqq n$, und es gibt einen freien Übergang von $\{y_1, \cdots, y_q\}$ zu einem System $\{z_1, \cdots, z_q\}$ mit $z_i = a_i^{\gamma_i}$, $1 \leqq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i (i = 1, \cdots, p)$, $z_j = a_j$ $(j = p + 1, \cdots, n)$.

Insbesondere ist $k \geqq n$. Zu zeigen ist noch: Für $p < n$ ist $k \geqq n + 1$.

Sei nun $p < n$. Angenommen $k = n$.

Dann gibt es einen freien Übergang von $\{u_1, \cdots, u_k\}$ zu einem System $\{a_1^{\gamma_1}, \cdots, a_p^{\gamma_p}, a_{p+1}, \cdots, a_n\}$ mit $1 \leqq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i (i = 1, \cdots, p)$.

Wir können also ohne Einschränkung $p = 0$ annehmen (andernfalls fügen wir die Relationen $a_1 = \cdots = a_p = 1$ hinzu).

Sei nun $p = 0$. Es ist $u_1^{\beta_1} \cdots u_k^{\beta_k} = 1$ in der abelsch-gemachten Gruppe, und das ist ein Widerspruch dazu, daß diese freie abelsche Gruppe vom Rang $n = k$ ist. Also ist $k \geqq n + 1$.

KOROLLAR 2. *Es mögen die Voraussetzungen von Satz 2 gelten. Ferner sei* α_i *Primzahl für* $i = 1, \cdots, p$. *Dann gilt:*

Ist $m = n$, *so ist* $\{x_1, \cdots, x_m\}$ *freies Erzeugendensystem von* G. *Ist* $m \geqq n$, *so ist* $X = G$.

BEMERKUNG. Wir haben damit eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung dafür, wann ein System $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset G$ ein freies Erzeugendensystem der freien Gruppe G vom Rang n ist.

KOROLLAR 3. *Seien* G *und* X *wie in Satz* 2. *Es gebe* $u_1, \cdots, u_k \in X$ *mit* $u_1^{\beta_1} \cdots u_q^{\beta_q}[u_{q+1}, u_{q+2}] \cdots [u_{k-1}, u_k] = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n]$ $0 \leqq p \leqq n$, $\alpha_i \geqq 1$ $(i = 1, \cdots, p)$, $0 \leqq q \leqq k$, $2 \leqq \beta_j$ $(j = 1, \cdots, q)$ und $(\beta_1, \cdots, \beta_q) \geqq 2$.

Dann ist $m \geqq n$, *insbesondere ist* $k \geqq n$, *und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \cdots, x_m\}$ *zu einem System* $\{y_1, \cdots, y_m\}$ *mit* $y_\iota = a_\iota^{\gamma_\iota}$, $1 \leqq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i$ $(i = 1, \cdots, p)$, $y_j = a_j$ $(j = p + 1, \cdots, n)$.

Ist α_i *Primzahl für* $i = 1, \cdots, p$, *so ist sogar* $X = G$.

Indem wir analog wie beim Beweis von Satz 13 und Satz 24 von [4] vorgehen, erhalten wir:

SATZ 3. *Sei*

$$\begin{aligned} K = \langle s_1, \cdots, s_m, a_1, \cdots, a_n \,|\, s_1^{\gamma_1} = \cdots = s_m^{\gamma_m} \\ = s_1 \cdots s_m(a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n])^\gamma = 1\rangle \end{aligned}$$

mit $\gamma_i \geqq 2$, $\alpha_j \geqq 2$, $\gamma \geqq 1$, $m \geqq 2$, $n \geqq 2$, $0 \leqq p \leqq n$. *Ist* $\{x_1, \cdots, x_{n+m-1}\}$ *ein Erzeugendensystem von* K, *so gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, \cdots, x_{n+m-1}\}$ *zu einem System* $\{s_{\nu_1}^{\beta_1}, \cdots, s_{\nu_{m-1}}^{\beta_{m-1}}, a_1, \cdots, a_n\}$ *mit* $\nu_i \in \{1, \cdots, m\}$, $\nu_1 < \cdots < \nu_{m+1}$ (*falls* $m > 2$) *und* $1 \leqq \beta_i < \alpha_{\nu_i}$, $(\beta_i, \alpha_{\nu_i}) = 1$.

Indem wir mit ähnlichen, verfeinerten Methoden wie in [6] vorgehen, erhalten wir:

SATZ 4. *Sei* $H = \langle a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \,|\, W(a_1, \cdots, a_n)V(b_1, \cdots, b_m) = 1\rangle$ *mit* $W(a_1, \cdots, a_n) = (a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n])^\gamma$, $V(b_1, \cdots, b_m) = (b_1^{\beta_1} \cdots b_q^{\beta_q}[b_{q+1}, b_{q+2}] \cdots [b_{m-1}, b_m])^\delta$, $\alpha_i \geqq 2$, $\beta_j \geqq 2$, $\gamma \geqq 2$, $\delta \geqq 2$, $n \geqq 2$, $m \geqq 2$, $0 \leqq p \leqq n$, $0 \leqq q \leqq m$ *oder* $\alpha_i \geqq 2$, $\gamma \geqq 2$, $n \geqq 2$, $0 \leqq p \leqq n$, $m \geqq 1$, $\delta = 1$, $q = 0$. *Ist* $\{x_1, \cdots, x_{n+m}\}$ *ein Erzeugendensystem von* H, *so gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, \cdots, x_{n+m}\}$ *zu* $\{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m\}$.

Die Methode von Whitehead liefert nun (vgl. [3, Satz 1] oder [6]):

KOROLLAR 4. *Sei* H *wie in Satz* 4 *gegeben. Dann ist das*

Isomorphieproblem für H lösbar in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine gegebene Gruppe mit einer definierenden Relation zu H isomorph ist oder nicht.

Ähnlich wie in [3, Satz 2 und Satz 3] folgt nun:

KOROLLAR 5. *Sei H wie in Satz 4 gegeben. Dann gilt:*
(1) *H ist eine Hopfsche Gruppe, d.h. jeder Endomorphismus von H auf H ist ein Automorphismus von H.*
(2) *Jeder Automorphismus von H wird von einem Automorphismus der freien Gruppe von Rang $n + q$ induziert.*
(3) *Die Automorphismengruppe von H ist endlich erzeugt.*

Für $\delta = 1$ und $q \geqq 1$ erhalten wir:

SATZ 5. *Sei $H = \langle a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \mid W(a_1, \cdots, a_n) V(b_1, \cdots, b_m) = 1\rangle$ mit $W(a_1, \cdots, a_n) = (a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n])^\gamma$, $V(b_1, \cdots, b_m) = b_1^{\beta_1} \cdots b_q^{\beta_q}[b_{q+1}, b_{q+2}] \cdots [b_{m-1}, b_m]$, $\alpha_i \geqq 2$, $\beta_j \geqq 2$, $\gamma \geqq 2$, $n \geqq 2$, $m \geqq 1$, $0 \leqq p \leqq n$, $1 \leqq q \leqq m$. Ist $\{x_1, \cdots, x_{n+m}\}$ ein Erzeugendensystem von H, so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \cdots, x_{n+m}\}$ zu einem System $\{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_{i-1}, b_i^{\gamma_i}, b_{i+1}, \cdots, b_q, b_{q+1}, \cdots, b_m\}$ für ein i $(1 \leqq i \leqq q)$ mit $(\gamma_i, \beta_i) = 1$ und $1 \leqq \gamma_i \leqq \frac{1}{2}\beta_i$.*

Für $\delta = 1$ und $\gamma = 1$ gilt Satz 3 von [6].

LITERATUR

1. G. Baumslag, *Residual nilpotence and relations in free groups*, J. Algebra, **2** (1965), 271–282.
2. C. C. Edmunds, *Some properties of quadratic words in free groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **50** (1975), 20–22.
3. S. J. Pride, *The isomorphism problem for two-generator one-relator groups with torsion is solvable*, (Preprint).
4. G. Rosenberger, *Zum Rang- und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam. Habilitationsschrift*, Hamburg 1974.
5. ———, *Produkte von Potenzen und Kommutatoren in freien Gruppen*, J. of Algebra, **53** (1978), 416–422.
6. ———, *Zum Isomorphieproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation*, Illinois J. Math., **20** (1976), 614–621.
7. H. Zieschang, *Alternierende Produkte in freien Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **27** (1964), 13–31.
8. ———, *Alternierende Produkte in freien Gruppen II*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **28** (1965), 219–233.
9. ———, *Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam*, Inventiones Math., **10** (1970), 4–37.

10. H. Zieschang, E. Vogt, and H.-D. Coldewey, *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen*, Lecture notes in Math., **122**, Springer 1970.

Received December 20, 1976.

ABTEILUNG MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT DORTMUND
POSTFACH 500500
4600 DORTMUND 50