PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 85, No. 1, 1979

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GLEASON-KAHANE-ŻELAZKO POUR LES ALGÈBRES DE BANACH

BERNARD AUPETIT

Let A and B be complex Banach algebras with identity and suppose that B has a separating family of finite dimensional irreducible representations. If T is a linear mapping from A onto B such that x invertible in A implies Tx invertible in B then we have $Tx=(T1)Sx$, for every x in A, where S is a Jordan morphism.

1. **Introduction.** Presque simultanément A. Gleason [7] et J.-P. Kahane et W. Żelazko [10] démontrèrent le théorème suivant: soient A et B deux algèbres de Banach complexes, commutatives, avec unité, supposons que B est sans radical et que T est une application linéaire de A dans B telle que x inversible dans A implique Tx inversible dans B et telle que $T1 = 1$, alors T est un morphisme d'algèbre. W. Żelazko [16] a montré que l'hypothèse de commutativité sur A est inutile, cela résulte en fait très facilement du lemme de Herstein qui suit ou bien d'une petite remarque de A.M. Sinclair ([5], p. 79) ou bien du Lemme 5 de [3]. Pour une démonstration de ce théorème à l'aide du théorème de Liouville réel voir [6], p. 51-53.

Dans [11], page 12, I. Kaplansky s'est posé le problème plus général suivant: soient A et B deux algèbres de Banach complexes avec unité, T une application linéaire de A dans B telle que $T1 = 1$ et T envoie tout élément inversible en un élément inversible, alors T est-il un morphisme de Jordan, c'est-à-dire tel que $Tx^2 = (Tx)^2$ pour tout $x \in A$? Ce problème est partiellement justifié par le théorème de M. Marcus et R. Purves [12]: si T est une application linéaire de $M_n(K)$ sur lui-même, où K est un corps commutatif algébriquement clos, telle que det $Tx =$ det x, pour $x \in M_n(K)$, alors il existe un morphisme de Jordan S de la forme $S(x) = uxu^1$ ou $S(x) = ut_x u^{-1}$(où ${}^tx$ est la transposée de x) tel que $Tx = (T1)S(x)$, pour tout $x \in M_n(K)$. La partie délicate de la démonstration de ce théorème est de prouver que S est un morphisme de Jordan, le reste vient du théorème de Noether-Skolem ([8], p. 99) ou bien dans le cas de $M_n(C)$ de la démonstration analytique donnée dans [13], Théorème 2.5.19. Malheureusement le problème de I. Kaplansky est trop général pour être vrai, l'exemple suivant le prouve. On prend A la sous-algèbre de $M_4(C)$ formée par les matrices$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, où a, b, $c \in M_2(C)$

et $\circ$ est la matrice nulle de $M_2(C)$, on pose $T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & {}^t b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, il est facile de vérifier que T envoie toute matrice inversible, en une matrice inversible, cependant $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2\right) - \left(T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)^2$ n'est pas nulle et est seulement nilpotente.

L'objet de cet article est de démontrer les deux résultats qui suivent.

THÉORÈME 1. *Si A est une algèbre de Banach complexe avec unité et si T est une application linéaire de A sur $M_n(C)$ telle que $T1 = 1$ et x inversible implique Tx inversible, alors T est un morphisme ou un antimorphisme d'algèbres.*

Nous dirons que l'algèbre de Banach B admet une famille séparante $\mathscr{F}$ de représentations irréductibles de dimension finie si quel que soit $y \in B, y \neq 0$, il existe $\Pi \in \mathscr{F}$, telle que $\Pi(x) \neq 0$. Comme exemples il y a les algèbres sans radical dont toutes les représentations irréductibles sont de dimension finie, $L^1(G)$ pour G compact ou produit d'un groupe compact et d'un groupe commutatif, $M_n(\mathfrak{A})$ pour $\mathfrak{A}$ commutative et sans radical (voir [1]), $l^1(S)$ pour S semi-groupe libre ayant un nombre fini ou dénombrable de générateurs, etc.

THÉORÈME 2. *Soient A une algèbre de Banach complexe, avec unité, et B une algèbre de Banach complexe avec unité, admettant une famille séparante de représentations irréductibles de dimension finie, si T est une application linéaire de A sur B telle que $T1 = 1$ et x inversible implique Tx inversible, alors T est un morphisme de Jordan. Si en plus B est sans représentations irréductibles de dimension 1 il existe des idéaux bilatères I et J uniques, un morphisme unique ϕ de A sur I et un antimorphisme unique ψ de A sur J tels que $B = I \oplus J$ et $T = \phi + \psi$.*

2. **Quelques résultats préliminaires.** En utilisant les techniques de fonctions sous-harmoniques développées dans [3], Z. Słodkowski, W. Wojtyński et J. Zemánek [15] ont pu obtenir le lemme suivant qui caractérise le radical de façon purement spectrale. On dénote par ρ le rayon spectral.

LEMME 1. *Soit A une algèbre de Banach complexe, si $\rho(x + a) = 0$ pour tout x tel que $\rho(x) = 0$, alors $a \in \operatorname{Rad} A$.*

DÉMONSTRATION (a). Commençons par montrer que $\rho(ax - xa) = 0$, pour tout $x \in A$. Il est clair que $\rho(a) = 0$. Comme $e^{\lambda x} a e^{-\lambda x} = a + \lambda(xa - ax) + \cdots$ est dans A, même si A n'a pas d'unité, et que $\rho(e^{\lambda x} a e^{-\lambda x}) = \rho(a) = 0$, alors $\rho(-e^{\lambda x} a e^{-\lambda x} + a) = |\lambda|\, \rho(xa - ax + \lambda(x(xa - ax) - (xa - ax)x) + \cdots) = 0$, on déduit que $\rho(f(\lambda)) = 0$, pour $\lambda \neq 0$, où $f(\lambda)$ est la fonction analytique $xa - ax + \lambda(x(xa - ax) - (xa - ax)x) + \cdots$. D'après le théorème de Vesentini ([3], Lemme 2), $\lambda \mapsto \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique sur C et identique à 0 sur $C\backslash\{0\}$ donc

$$\rho(f(0)) = \rho(xa - ax) = \overline{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}}}\, \rho(f(\lambda)) = 0\ .$$

(b) Soit Π une représentation irréductible de A sur l'espace de Banach X, alors $\rho(\Pi(x)\Pi(a) - \Pi(a)\Pi(x)) = 0$, pour tout $x \in A$. Si $\Pi(a)$ n'est pas de la forme $\lambda\Pi(1)$, avec $\lambda \in C$, il existe $\xi \in X$, $\xi \neq 0$, tel que $\eta = \Pi(a)\xi$ et ξ soient indépendants. D'après le théorème de densité de Jacobson il existe $x \in A$ tel que $\Pi(x)\eta = \xi$ et $\Pi(x)\xi = 0$, alors $(\Pi(x)\Pi(a) - \Pi(a)\Pi(x))\xi = \Pi(x)\eta = \xi$, donc $1 \in \mathrm{Sp}(\Pi(x)\Pi(a) - \Pi(a)\Pi(x))$, ce qui est absurde. Ainsi $\Pi(a) = \lambda\Pi(1)$, mais comme $\rho(a) = \rho(\Pi(a)) = 0$, alors $\lambda = 0$, d'où $a \in \operatorname{Ker} \Pi$ quel que soit Π irreductible, soit $a \in \bigcap \operatorname{Ker} \Pi = \operatorname{Rad} A$.

Le résultat qui suit est intéressant en lui-même et généralise fortement un certain nombre de théorèmes de continuité des morphismes d'algèbres de Banach.

PROPOSITION. *Soient A une algèbre de Banach complexe et B une algèbre de Banach complexe, sans radical, avec rayon spectral continu. Si T est une application linéaire de A dans B tel $\rho(Tx) \leqq \rho(x)$, pour tout x de A et telle que $T(A)$ soit dense dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de B, alors T est continue.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème du graphe fermé pour montrer que T est continue il suffit de montrer que si x_n tend vers 0 dans A avec Tx_n tendant vers a dans B, alors $a = 0$. Soit $x \in A$ et $\lambda \in C$, alors $x + \lambda x_n$ tend vers x et $T(x + \lambda x_n) = Tx + \lambda Tx_n$ tend vers $Tx + \lambda a$ donc, d'après la continuité du rayon spectral,

$$\rho(Tx + \lambda a) = \lim_{n \to \infty} \rho(Tx + \lambda Tx_n) \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, \rho(x + \lambda x_n) \leqq \rho(x)\ .$$

Ainsi $\rho(Tx + \lambda a) \leqq \rho(x)$, pour tout $\lambda \in C$, ce qui implique d'après le théorème de Vesentini et le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques que $\rho(Tx + \lambda a) \equiv \rho(Tx)$. Comme $T(A)$ est dense dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de B, et que ρ est continue sur B on obtient que $\rho(y + \lambda a) = 0$ pour tout y quasi-nilpotent de B donc que $a \in \operatorname{Rad} B = \{0\}$, soit $a = 0$, d'après le Lemme 1.

REMARQUE 1. Il serait fort intéressant de savoir, lorsqu'on laisse tomber l'hypothèse que $T(A)$ est dense dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de B, si T est continue modulo le radical de la sous-algèbre fermée C engendrée par $T(A)$, autrement dit si $a \in \operatorname{Rad} C$ dans la démonstration précédente. Pour cela il suffirait de prouver que $\rho(Tx_1Tx_2 \cdots Tx_n + a) = \rho(Tx_1Tx_2 \cdots Tx_n)$, pour toute famille finie $x_1, \cdots, x_n$ d'éléments de A.

Rappelons qu'un anneau A est dit premier si $aAb = \{0\}$, pour $a, b \in A$, implique $a = 0$ ou $b = 0$. D'après le théorème de densité de Jacobson un anneau primitif est premier, donc en particulier le lemme qui suit va pouvoir s'appliquer aux algèbres de Banach primitives.

LEMME 2 (*Herstein*). *Soient A, B deux anneaux et T un morphisme de Jordan de A sur B. Si B est premier alors T est un morphisme d'anneau ou un antimorphisme.*

Ce résultat qui est une très belle généralisation du théorème de Hua sur les corps (voir par exemple [2], p. 38-40) admet une démonstration très calculatoire (voir [9], pp. 47-51).

3. Démonstration du Théorème 1. D'après la proposition, T est continue, ainsi $(\lambda, \mu) \to \phi(\lambda, \mu) = \det(T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty})$ est analytique en λ, μ et ne s'annule pas, donc $(\lambda, \mu) \to \operatorname{Log} \phi(\lambda, \mu)$ est analytique en λ, μ. Comme:

$$\begin{aligned}|\phi(\lambda, \mu)| &\leqq \| T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty} \|^n \\ &\leqq \| T \|^n \exp\{|\lambda| n \| x \| + |\lambda| n \| Tx \| + |\mu| n \| y \| + |\mu| n \| Ty \|\}\end{aligned}$$

on déduit que $\operatorname{Re} \operatorname{Log} \phi(\lambda, \mu) \leqq L|\lambda| + M|\mu| + N$, pour $L, M, N > 0$ convenables. En appliquant le théorème de Liouville réel, comme il est fait dans [6], p. 51-53, séparément en λ et μ, on obtient que:

$$\det(T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty}) = \gamma e^{\alpha\lambda + \beta\mu} \tag{1}$$

pour $\alpha, \beta, \gamma \in C$. De $T1 = 1$ on déduit $\gamma = 1$. Il est bien connu que $\det(1 + m) = 1 + Trm + \sigma_2(m) + \sigma_3(m) + \cdots + \det m$, où σ_2, σ_3, $\cdots$ désignent les fonctions symétriques fondamentales, de degré $\geqq 2$, des valeurs propres de m. En faisant un développement jusqu'au degré 3 on obtient:

$$T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}(Tx)^2 - \frac{\mu^2}{2}(Ty)^2 + \frac{\lambda^2}{2} Tx^2$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&+ \frac{\mu^2}{2} Ty^2 + \lambda\mu(Txy - TxTy)\\
&+ \frac{\lambda^3}{6}[Tx^3 - (Tx)^3 + 3(Tx)^3 - 3Tx^2 \cdot Tx]\\
&+ \frac{\lambda^2\mu}{2}[Tx^2y + (Tx)^2Ty + Ty(Tx)^2 - Tx^2 \cdot Ty - 2Txy \cdot Tx]\\
&+ \frac{\lambda\mu^2}{2}[Txy^2 + 2\, TyTyTy - 2\, TxyTy - Ty^2 \cdot Tx]\\
&+ \frac{\mu^3}{6}[Ty^3 + 2(Ty)^3 - 3Ty^2 \cdot Ty] + v
\end{aligned}\right.
$$

où v contient seulement des termes de degré $\geqq 4$ en λ et μ. Si on pose u égal aux termes de degré $\geqq 2$ dans (2) il est facile de voir que $\sigma_2(u), \sigma_3(u), \cdots$ sont de degrés $\geqq 4$ en λ, μ. Aussi en prenant les coefficients de λ et μ on obtient déjà que $\alpha = \beta = 0$. D'où en identifiant à 0 les coefficients de $\lambda\mu$ et $\lambda^2\mu$ on obtient:

$$(3)\qquad TrTxy = TrTxTy = TrTyTx\,.$$

$$(4)\qquad Tr[Tx^2y + (Tx)^2Ty + Ty(Tx)^2 - Tx^2 \cdot Ty - 2Txy \cdot Tx] = 0\,.$$

D'après (3): $TrTx^2 \cdot Ty = TrTx^2y$ et $TrTxy \cdot Tx = TrTx \cdot Txy = TrTx^2y$, donc on obtient:

$$(5)\qquad Tr(Tx)^2Ty = TrTx^2y$$

qui avec (1) donne:

$$
(6)\qquad \begin{aligned}
Tr(Tx^2 - (Tx)^2)Ty &= TrTx^2 \cdot Ty - Tr(Tx)^2Ty\\
&= TrTx^2y - TrTx^2y = 0\,.
\end{aligned}
$$

Comme T est surjective et que toute forme linéaire sur $M_n(C)$ est de la forme $x \to Trxa$ pour une matrice convenable $a = Ty$ alors on obtient $Tx^2 = (Tx)^2$. Il suffit d'appliquer le Lemme 2 pour terminer.

Sp x désigne le spectre de x.

LEMME 3. *Soient A et B deux algèbres de Banach complexes avec unité. Si T est une application linéaire de A dans B telle que* $\mathrm{Sp}\, Tx \subset \mathrm{Sp}\, x$ *quel que soit* $x \in A$, $Sx = (T1)^{-1}Tx$ *est une application linéaire de A dans B telle que* $S1 = 1$ *et* $\mathrm{Sp}\, Sx \subset \mathrm{Sp}\, x$. *Autrement dit lorsque* $\mathrm{Sp}\, Tx \subset \mathrm{Sp}\, x$ *on peut toujours supposer que* $T1 = 1$.

DÉMONSTRATION. Comme $\mathrm{Sp}\, T1 \subset \mathrm{Sp}\, 1 = \{1\}$, on a $T1 = 1 + u$ où $\rho(u) = 0$. En particulier $1 + u$ est inversible. Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}(1 + u)^{-1}Tx$, alors $-1 \in \mathrm{Sp}(1 + u)^{-1}Ty$, où $y = -x/\lambda$. Ainsi $(1 + u)[1 + (1 + u)^{-1}Ty] = 1 + u + Ty$ est non inversible, donc comme

$\mathrm{Sp}(1 + u + Ty) = \mathrm{Sp}T(1 + y) \subset \mathrm{Sp}(1 + y)$, $1 + y$ est non inversible, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}x$. Ainsi $\mathrm{Sp}Sx \subset \mathrm{Sp}\,x$.

COROLLAIRE 1. *Si T est une application linéaire de A sur $M_n(C)$ telle que* $\mathrm{Sp}\,Tx \subset \mathrm{Sp}\,x$, *pour tout x, alors $Tx = (T1)Sx$, où S est un morphisme ou un antimorphisme.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le Lemme 3 et le Théorème 1.

COROLLAIRE 2 (*Marcus-Purves*). *Si T est une application linéaire de $M_n(C)$ sur $M_n(C)$ qui conserve le déterminant, alors $Tx = (T1)Sx$ où Sx est de la forme uxu^{-1} ou u^txu^{-1}, pour $u \in M_n(C)$ convenable.*

DÉMONSTRATION. D'après les remarques du début concernant le théorème de Noether-Skolem il suffit de vérifier que $\mathrm{Sp}\,Sx = \mathrm{Sp}\,x$, pour tout x. Mais $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$ équivaut à $\det(x - \lambda 1) = 0$ donc à $\det(Tx - \lambda T1) = 0$ soit $\det T1 \cdot \det((T1)^{-1}Tx - \lambda) = 0$ qui, comme det $T1 = 1$, équivaut à $\det(Sx - \lambda) = 0$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\,Sx$.

4. Démonstration du Théorème 2. Soit Π une représentation irréductible de B, de dimension finie, qui appartient à $\mathscr{F}$. D'après le théorème de densité de Jacobson $\Pi(B) = M_n(C)$, pour un certain n, donc d'après le théorème 1, $\Pi \circ T$ est un morphisme ou un antimorphisme, donc en particulier $\Pi(Tx^2 - (Tx)^2) = 0$. Comme $\mathscr{F}$ est séparante $Tx^2 = (Tx)^2$, donc T est un morphisme de Jordan. La suite de la démonstration se fait comme dans [14], Théorème 2.1. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux primitifs de B muni de la topologie de Jacobson. Si $\mathrm{Ker}\,\Pi \in \mathscr{P}$ alors $\Pi \circ T$ est un morphisme de Jordan et $\Pi(B)$ est primitif donc, d'après le Lemme 2, $\Pi \circ T$ est un morphisme ou un antimorphisme, aussi $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$, où $\mathscr{P}_1 = \{\mathrm{Ker}\,\Pi \mid \Pi \circ T$ soit un morphisme$\}$ et $\mathscr{P}_2 = \{\mathrm{Ker}\,\Pi \mid \Pi \circ T$ soit un antimorphisme$\}$. Si B est sans représentations irréductibles de dimension sur alors $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est vide. On pose $I = \bigcap_{P \in \mathscr{P}_1} P$, $J = \bigcap_{P \in \mathscr{P}_2} P$, ϕ égal au produit de T et du morphisme canonique de A sur A/I ainsi que ψ égal au produit de T est du morphisme canonique de A sur A/J. En se reportant à [14] on vérifie que toute la suite fonctionne bien.

REMARQUE 2. A. M. Sinclair a montré que la fin du théorème est fausse si B admet des représentations irréductibles de dimension 1. Maintenant il est évident qu'on peut obtenir une grande quantité de corollaires, en particulier de grosses généralisations du théorème de Marcus-Purves, en prenant $B = L^1(G)$, où G est compact ou produit d'un groupe compact et d'un groupe commutatif, $M_n(\mathfrak{A})$ pour $\mathfrak{A}$ commutative et sans radical, $l^1(S)$ pour S semi-groupe libre ayant un nombre fini de générateurs, etc.

REMARQUE 3. Un problème de la plus haute importance serait de savoir si le Théorème 2 reste vrai, sans supposer T surjective, avec comme conclusion que T est un morphisme de Jordan modulo le radical de la sous-algèbre fermée C engendrée par $T(A)$, ou bien plus faiblement que $\rho(Tx^2 - (Tx)^2) = 0$, pour tout $x \in A$. On peut aussi se poser la question de savoir si ce même théorème s'étend à une classe plus vaste d'alègbres de Banach, par exemple celles ayant une famille séparante de représentations irréductibles à spectre dénombrable (où le spectre varie localement analytiquement en dehors d'un fermé de capacité nulle, voir [4]).

RÉFÉRENCES

1. S. T. M. Ackermans, *A case of strong spectral continuity*, Indag. Math., **30** (1968), 455-459.

2. E. Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

3. B. Aupetit, *Caractérisation spectrale des algèbres de Banach commutatives*, Pacific J. Math., **63** (1976), 23-35.

4. ———, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.

5. F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.

6. A. Browder, *Introduction to Function Algebras*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

7. A. M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math., **19** (1967), 171-172.

8. I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Math. Mon. no 15, Math. Assoc. Amer. 1968.

9. ———, *Topics in Ring Theory*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1969.

10. J-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **29** (1968), 339-343.

11. I. Kaplansky, *Algebraic and analytic aspects of operator algebras*, Regional Conference Series in Math., Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

12. M. Marcus and R. Purves, *Linear transformations on algebras of matrices*, Canad. J. Math., **11** (1959), 383-396.

13. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

14. A. M. Sinclair, *Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **24** (1970), 209-214.

15. Z. Słodkowski, W. Wojtyński and J. Zemánek, *A note on quasi nilpotent elements of a Banach algebra*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astr. Phys., **25** (1977). 131-134.

16. W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals on complex Banach algebras*, Studia Math., **30** (1968), 83-85.

Received September 13, 1977 and in revised form May 10, 1979.

UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, CANADA