PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 94, No. 1, 1981

QUELQUES PROPPIETES DU COUPLE D'ESPACES VECTORIELS $(L^1m/H^{\infty\perp}, H^\infty)$

JACQUES CHAUMAT

Let H^∞ be a W^* closed subalgebra of $L^\infty(m)$ with identity. We generalize here some classical properties of the couple of linear vector spaces $(L^1(m), L^\infty(m))$ to the couple $(L^1(m)/H^{\infty\perp}, H^\infty)$. We obtain, for instance, a characterization of weakly relatively compact subsets of $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ analogous to the Dunford-Pettis theorem. To this end, we assume a legitimate hypothesis on the peak sets of H^∞.

1. Soit (S, Σ, m) un espace de probabilité et H^∞ une sous algèbre de $L^\infty(m) = L^\infty(S, \Sigma, m)$ fermée pour la topologie faible étoile [i.e., topologie $\sigma(L^\infty(m), L^1(m)]$ et contenant les constantes.

Notons $H^{\infty\perp}$ l'orthogonal de H^∞ dans $L^1(m)$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ les normes usuelles dans les espaces $L^1(m)$ et $L^\infty(m)$, et $\|\ \|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}}$ la norme quotient dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Pour une fonction g de H^∞ considérons l'élément Tg de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ défini par $\langle Tg, g'\rangle = \int \bar{g}g'dm$ pour toute fonction g' de H^∞. Remarquons que, si $\|g\|_\infty = 1$ alors $\|g\|_1^2 \leqq \|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leqq \|g\|_1$. En conséquence, T est une application linéaire continue, injective et d'image dense de H^∞ dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Notons M le spectre de Gelfand de l'algèbre uniforme $L^\infty(m)$, muni de la topologie de Gelfand. Alors, la transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de $L^\infty(m)$ sur l'algèbre $\mathscr{C}(M)$ des fonctions continues sur M à valeurs complexes; $\hat{f}$ désigne la transformée de Gelfand, d'une fonction f de $L^\infty(m)$. L'algèbre H^∞ s'identifie à une sous algèbre, $\hat{H}^\infty$, de $\mathscr{C}(M)$, fermée pour la norme de la convergence uniforme et contenant les constantes. Une forme linéaire l sur $L^\infty(m)$, continue, peut être représentée, de manière unique, par une mesure $\hat{l}$ borélienne, régulière, bornée sur M, vérifiant, pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, $\int \hat{f}d\hat{l} = \langle f, l\rangle$. En particulier, pour toute fonction h de $L^1(m)$, la mesure hm se représente sur M par la mesure $\widehat{hm}$, et on a, pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, $\int \hat{f}d\widehat{hm} = \int fhdm$; de plus, il est facile de voir que la mesure $\widehat{hm}$ est absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$; on écrira $\widehat{hm} = \hat{h}\hat{m}$; réciproquement une mesure sur M, absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$, peut s'écrire $\widehat{hm}$ avec h dans $L^1(m)$. [voir [8] pages 17 – 19 et [7] pages 158-160].

DEFINITION 1. Un sous-ensemble fermé G de M est un ensemble pic pour H^∞ si et seulement si il existe une fonction g dans H^∞ vérifiant $\hat{g}(x) = 1$ pour x dans G et $|\hat{g}(x)| < 1$ pour x dans $M \backslash G$.

DEFINITION 2. Une suite bornée $\{f_n\}_{n \in N}$ dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est d'interpolation si et seulement si, pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ de nombres complexes, bornée, il existe une fonction g de H^∞ telle que $\langle f_n, g \rangle = \alpha_n$ pour tout n.

THEOREME 1. *Soit* (S, Σ, m) *un espace de probabilité, et* H^∞ *une sousalgèbre de* $L^\infty(m)$ *contenant les constantes, fermée pour la topologie faible étoile. Supposons que tout sous-ensemble* E *de* M*, fermé, de* $\hat{m}$ *mesure nulle, soit inclus dans un ensemble pic de* H^∞ *de* $\hat{m}$ *mesure nulle. Alors, pour toute partie* K *de* $L^1(m)/H^{\infty\perp}$*, les propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) *K est faiblement relativement compacte*;

(2) *K est bornée et, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $g \in H^\infty$, $\|g\|_\infty \leqq 1$ *et* $\|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leqq \delta$ *implique* $\sup_{f \in K} |\langle f, g \rangle| \leqq \varepsilon$;

(3) $\lim_{C \to +\infty} [\sup_{f \in K} (\inf_{\substack{g \in H^\infty \\ \|g\|_\infty \leqq C}} \|f - Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}})] = 0$;

(4) *K est bornée et ne contient aucune suite d'interpolation.*

Notons pour K un sous ensemble borné de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ et $\varepsilon > 0$ $\eta(H^\infty, K, \varepsilon) = \sup \{|\langle f, g \rangle|, f \in K, g \in H^\infty \|g\|_\infty \leqq 1$ et $\|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leqq \varepsilon$ $\eta(H^\infty, K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \eta(H^\infty, K, \varepsilon)\}$. Cette limite existe car la fonction $\varepsilon \to \eta(H^\infty, K, \varepsilon)$ est croissante et positive. [voir la preuve du Théorème 6 de [14]].

THEOREME 2. *Dans les hypothèses du théorème* 1, *étant donné un sous-ensemble borné* K *de* $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, *il existe un sous ensemble borné* K_1 *de* $L^1(m)$ *tel que* $K_1/H^{\infty\perp} = K$ *et* $\eta(H^\infty, K) = \eta(L^\infty, K)$.

THEOREME 3. *Dans les hypothèses du théorème* 1, *tout espace de Banach* B *dont le dual est* H^∞ *est isométriquement isomorphe à* $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Pour illustrer les théorèmes donnons quelques exemples.

2. Exemples.

(1) $H^\infty = L^\infty(m)$. Montrons que l'hypothèse sur les ensembles pics est satisfaite: si E est un fermé de M de $\hat{m}$ mesure nulle, il existe une suite $\{E_n\}_{n \in N}$ d'ouverts fermés de M telle que:

(i) $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout entier n;

(ii) $E \subset E_n$ pour tout entier n;

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \hat{m}(E_n) = 0$.

Puisque E_n est un ouvert fermé de M, il existe un sous ensemble F_n de S, mesurable et dont la fonction caractéristique X_n vérifie: $\hat{X}_n(x) = 0$ pour x dans $M\backslash E_n$ et $\hat{X}_n(x) = 1$ pour x dans E_n. La fonction g de $L^\infty(m)$ définite par $g = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} X_n$ pique sur $G = \{x \in M: \hat{g}(x) = 1\}$. De plus $\hat{m}(G) = 0$ et G contient E.

Le Théorème 1 (équivalence des assertions (1) (2) et (3)) est une reformulation du théorème de Dunford-Pettis caractérisant les sous-ensembles faiblement relativement compacts de $L^1(m)$ [voir [1] page 294, [8] pages 120 et 430 et [11] page 239]. Le Théorème 2 est vide. Le Théorème 3 décrit une propriété bien connue de $L^\infty(m)$ [10].

(2) $H^\infty = H^\infty(D)$. $H^\infty(D)$ est l'algébre des fonctions holomorphes et bornées dans $D = \{z: |z| < 1\}$. La mesure m_1 est la mesure de Lebesgue sur $T = \{z: |z| = 1\}$. II est bien connu [13] que l'on peut considérer $H^\infty(D)$ comme une sous algèbre de $L^\infty(m_1)$ fermée pour la topologie faible étoile et contenant les constantes. L'hypothèse sur les pics est vérifiée du fait d'un résultat de E. Amar et A. Lederer [2]. Rappelons que $H^{\infty\perp}$ est le sous espace de $L^1(m_1)$, H_0^1, des fonctions dont les coefficients de Fourier, d'indice négatif ou nul, sont nuls. Le Théorème 1 précise alors le théorème de M. Mooney qui affirme que $L^1(m_1)/H_0^1$ est faiblement sequentiellement complet [17]. Les idées développées dans ce travail se rattachent à la preuve que donne E. Amar [1] du théorème de M. Mooney. Citons une troisième preuve de ce théorème par V. P. Havin qui obtient aussi des résultats proches du Théorème 1 dans ce cadre [12]. Les Théorèmes 1 et 2 donnent un raffinement d'un résultat obtenu indépendamment par F. Delbean [5] et S. V. Kisliakov [16]. Ils montrent qu'un sous ensemble relativement faiblement compact de $L^1(m_1)/H_0^1$ est le quotient par H_0^1 d'un sous ensemble faiblement relativement compact de $L^1(m_1)$.

Le Théorème 3 a été obtenu dans ce cas par P. Wojtaszczyk [19] [voir aussi [3]]. La preuve donnée ici du Théorème 3 s'inspire largement de ses idées.

D'autres propriétés de $L^1(m_1)/H_0^1$ comme espace de Banach sont largement étudiées par A. Pełcynski dans [18].

(3) $H^\infty = H^\infty(U)$. Considérons I'ouvert U obtenu en enlevant au disque D un nombre fini de disques fermés deux à deux disjoints et inclus dans D; notons $H^\infty(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées dans U. La mesure m_2 est la mesure linéaire normalisée sur la frontière topologique de U. Il est bien connu [[8] p. 150] que $H^\infty(U)$ peut être considérée comme une sous algèbre de $L^\infty(m_2)$, fermée pour la topologie faible étoile, et contenant les constantes. Le fait que tout fermé de M, de $\hat{m}_2$ mesure nulle, soit inclus dans un ensemble pic de H^∞ de $\hat{m}_2$ mesure nulle est une conséquence immédiate du résultat de E. Amar et A. Lederer [2], précédemment cité, et du Corollaire 12.8, page 59 dans [8].

(4) Signalons le travail de I. Cnop et F. Delbaen [4]. Ils montrent qu'une large famille d'algèbres uniformes et de mesures satisfait les hypothèses du Théorème 1 sur les ensembles pics. F. Delbaen obtient pour cette famille une forme faible du Théorème 2 [5].

Ce travail se compose de deux parties. Dans la première partie, on démontre les Théorèmes 1, 2 et 3. Dans la deuxième partie, on montre sur un exemple que les conclusions des Théorèmes 1, 2 et 3 subsistent alors que l'hypothèse sur les ensembles pics n'est plus entièrement satisfaite.

3. Premiere partie.

LEMME 1. *Soit* $\{f_p\}_{p\in N}$ *une suite bornée dans* $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ *et* f *une forme linéaire continue sur* H^∞, *adhérente à la suite* $\{f_p\}_{p\in N}$ *dans le dual* $H^{\infty *}$ *de* H^∞ *pour la topologie* $\sigma(H^{\infty *}, H^\infty)$. *On peut prolonger* f *par une mesure* μ *sur* M. *Considérons la décomposition de Lebesgue de la mesure* μ *par rapport à la mesure* $\hat{m}$: $\mu = h\hat{m} + \mu_s$. *Supposons qu'il existe un ensemble pic* E *de* $\hat{m}$ *mesure nulle et une fonction* l *de* H^∞, $\|l\|_\infty \leqq 1$, *tels que* $\int_E \hat{l}d\mu_s \neq 0$.

Alors, pour toute constante $C > 0$, *il existe une sous suite de la suite* $\{f_p\}_{p\in N}$, $\{g_p\}_{p\in N}$, *et une suite* $\{t_p\}_{p\in N}$ *de fonctions de* H^∞ *telles que*:

(i) $|\langle g_p, t_i\rangle| \leqq C2^{-i}$ *pour* $p \neq 1$;

(ii) $\left|\langle g_i, t_i\rangle - \int_E \hat{l}d\mu_s\right| \leqq C2^{-i}$ *pour tout* i;

(iii) $\sum_{n=i}^{+\infty} |\hat{t}_n(x)| \leqq 1 + 2^{-i}$ *pour tout* i *et tout* x *de* M;

(iv) $|\hat{t}_n(x) - 1| + |\hat{t}_n(x)| \leqq 1 + 100 \times 2^{-n}$ *pour tout* n *et tout* x *de* M.

Preuve. (a) Première étape. Soit E un ensemble pic et k une fonction de H^∞ telle que $\hat{k}^{-1}(1) = E$ et $|\hat{k}(x)| < 1$ pour tout x dans $M\backslash E$.

Pour chaque entier n, considérons un ouvert R_n simplement connexe, à frontière Γ_n régulière et vérifiant les propriétés suivantes: 1 appartient à Γ_n et 0 appartient à R_n, R_n est inclus dans $\{z: |z| < 1\} \cap \{z = x + iy: -2^{-n}/1000 < x < 1, -2^{-n}/1000 < y < 2^{-n}/1000\}$ et R_{n+1} est inclus dans R_n. Soit Φ_n une fonction continue de $\{z: |z| \leqq 1\}$ dans $R_n \cup \Gamma_n$, holomorphe dans $\{z: |z| < 1\}$ et vérifiant $\Phi_n(0) = 0$ et $\Phi_n^{-1}(1) = \{1\}$. [On peut choisir une transformation conforme.]

Remarquons que pour chaque couple d'entiers (p, n) la fonction $\Phi_p \circ k^n$ appartient à H^∞ et pique sur E.

Montrons par récurrence qu'il existe une suite d'entiers positifs $\{n_i\}_{i\in N\setminus\{0\}}$ et une suite $\{V_i\}_{i\in N}$ décroissante de voisinages ouverts de E telles que

(i) $\bigcap_{i\in N} V_i = E$;

(ii) $|\widehat{\Phi_i\circ k^{n_i}}(x)| < (1/1000)2^{-i}$ pour $x\in M\setminus V_{i-1}$;

(iii) $|\widehat{\Phi_i\circ k^{n_i}}(x) - 1| < (1/1000)2^{-i}$ pour $x\in V_i$;

(iv) $\sum_{i=p}^{+\infty} |\widehat{\Phi_i\circ k^{n_i}}(x) - \widehat{\Phi_{i+1}\circ k^{n_{i+1}}}(x)| \leqq 1 + 2^{-p}$ pour $x\in M$.

Notons, pour chaque entier n, $W_n = \{x\in M\colon |\hat{k}(x) - 1| < 2^{-n}\}$; clairement W_n est un ouvert contenant E et $\bigcap_{n\in N} W_n = E$.

Commençons la récurrence:
pour $i = 0$, posons $V_0 = M$.
pour $i = 1$, posons $n_1 = 1$ et $V_1 = \{x\in M\colon |\widehat{\Phi_1\circ k}(x) - 1| < 2^{-1}/1000\}$.
Les assertions (ii) et (iii) sont vérifiées. Du fait du choix de Φ_1, V_1 est un ouvert contenant E, et $V_1\subset V_0$.

Supposons la construction faite jusqu'à l'étape $i_0 > 1$. On a $\sup_{x\in M\setminus V_{i_0}} |\hat{k}(x)| < 1$ car $|\hat{k}(x)| < 1$ pour tout x de $M\setminus E$, et V_{i_0} est un ouvert contenant E. Choisissons un entier n_{i_0+1} strictement plus grand que n_{i_0} en sorte que $|\widehat{\Phi_{i_0+1}\circ k^{n_{i_0+1}}}(x)| < (1/1000)2^{-i_0+1}$ pour x dans $M\setminus V_{i_0}$. Cela est possible car Φ_{i_0+1} est continue et $\Phi_{i_0+1}(0) = 0$. Posons

$$V_{i_0+1} = W_{i_0+1} \cap V_{i_0} \cap \left\{x\in M\colon |\widehat{\Phi_{i_0+1}\circ k^{n_{i_0+1}}}(x) - 1| < \frac{1}{1000}2^{-(i_0+1)}\right\}.$$

On a V_{i_0+1} contient E et est inclus dans V_{i_0}; les assertions (ii) et (iii) sont vérifiées.

La construction donne immédiatement que $\bigcap_{i\in N} V_i = E$. Il reste à évaluer: $E_p(x) = \sum_{i=p}^{+\infty} |\widehat{\Phi_i\circ k^{n_i}}(x) - \widehat{\Phi_{i+1}\circ k^{n_{i+1}}}(x)|$ pour chaque x de M.

Prenons $p = 1$:
si x appartient à E, $E_1(x) = 0$
si x appartient à $V_0\setminus V_1$, on peut écrire:
$E_1(x) = |\widehat{\Phi_1\circ k^{n_1}}(x)| + |\widehat{\Phi_2\circ k^{n_2}}(x) + \sum_{i=2}^{+\infty}$. Le troisième terme de cette somme se majore par 1/1000 en utilisant l'assertion (ii); le premier terme se majore par 1 et le deuxième par 1/1000.

Si x appartient à $V_{i_0}\setminus V_{i_0+1}$ avec $i_0 \geqq 1$ on peut écrire:

$$E_1(x) = \sum_{i=1}^{i_0-1} + (|\widehat{\Phi_{i_0}\circ k^{n_{i_0}}}(x) - \widehat{\Phi_{i_0+1}\circ k^{n_{i_0+1}}}(x)| + |\widehat{\Phi_{i_0+1}\circ k^{n_{i_0+1}}}(x) - \widehat{\Phi_{i_0+2}\circ k^{n_{i_0+2}}}(x)|) + \sum_{i=i_0+2}^{+\infty}.$$

Le premier terme se majore par 2/1000 en utilisant l'assertion (iii); le troisième terme se majore par 1/1000 en utilisant l'assertion (ii).

Pour le deuxième terme, on remarque que

$$|\widehat{\Phi_{i_0}\circ k^{n_{i_0}}}(x) - 1| < \frac{1}{1000}, \text{ que } |\widehat{\Phi_{i_0+2}\circ k^{n_{i_0+2}}}(x)| < \frac{1}{1000}$$

$$[\text{et que } \widehat{\Phi_{i_0+1}\circ k^{n_{i_0+1}}}(x) \text{ appartient à } R_{i_0} \cup \Gamma_{i_0}\,;$$

on peut alors le majorer par $1 + 1/100$.]

Les estimations pour les autres valeurs de p se font de la même façon.

Dans la suite, pour alléger les notations, on notera $k'_i = \Phi_i\circ k^{n_i}$.

(b) Deuxième étape. Considérons la suite $\{l_i\}_{i\in N\setminus\{0\}}$ de fonctions de H^∞ définie par $l_i = l \times k'_i$. Cette suite est bornée et on a

(i) $\lim_{i\to\infty} \hat{l}_i(x) = 0$ pour tout x de $M\setminus E$;

(ii) $\hat{l}_i(x) = \hat{l}(x)$ pour tout x de E.

Soit p un entier. Puisque f_p appartient à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, il existe une mesure μ_p sur M absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$ et telle que $\int \hat{g}d\mu_p = \langle f_p, g\rangle$ pour toute fonction g de H^∞. Puisque E est de $\hat{m}$ mesure nulle, on a:

(iii) $\lim_{i\to\infty} \langle f_p, l_i\rangle = 0$ pour tout entier p.

Puisque $\langle l_i, f\rangle = \int \hat{l}_i d\mu = \int \hat{l}_i h dm + \int_{M\setminus E} \hat{l}_i d\mu_s + \int_E \hat{l} d\mu_s$, on a

(iv) $\lim_{i\to\infty} \langle l_i, f\rangle = \int_E \hat{l} d\mu_s$.

(c) Troisième étape. On va construire une sous suite $\{l_{i_n}\}_{n\in N}$ de la suite $\{l_i\}_{i\in N\setminus\{0\}}$ et une sous suite $\{f_{p_n}\}_{n\in N}$ de la suite $\{f_p\}_{p\in N}$ vérifiant

(i) $|\langle f_{p_k}, l_{i_j}\rangle| \leqq 2^{-j}(C/1000)$ dès que $k \leqq j - 1$;

(ii) $\left|\langle f_{p_k}, l_{i_j}\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s\right| \leqq 2^{-j}(C/1000)$ dès que $k \geqq j$.

On procède par récurrence de la manière suivante: du fait de l'assertion b(iv) il existe un entier i_0 tel que $\left|\langle l_{i_0}, f\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s\right| < (C/1000)2^{-1}$. Du fait du choix de f il existe un entier p_0 tel que: $|\langle f_{p_0}, l_{i_0}\rangle - \langle l_{i_0}, f\rangle| \leqq (C/1000)2^{-1}$. Alors $\left|\langle f_{p_0}, l_{i_0}\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s\right| \leqq C/1000$. Supposons que l'on ait construit $\{l_{i_n}\}_{0\leqq n\leqq N}$ et $\{f_{p_n}\}_{0\leqq n\leqq N}$ en sorte que:

$$(\mathrm{i}_N) \quad |\langle f_{p_k}, l_{i_j}\rangle| \leqq 2^{-j}(C/1000) \text{ pour } \begin{cases} k \leqq j - 1 \\ 0 \leqq k \leqq N\,; \\ 0 \leqq j \leqq N \end{cases}$$

$$(\mathrm{ii}_N) \quad \left|\langle f_{p_k}, l_{i_j}\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s\right| \leqq 2^{-j}(C/1000) \text{ pour } \begin{cases} k \geqq j \\ 0 \leqq k \leqq N; \\ 0 \leqq j \leqq N \end{cases}$$

$$(\mathrm{iii}_N) \quad \left|\langle l_{i_j}, f\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s\right| \leqq 2^{-j}(C/1000) \text{ pour } 0 \leqq j \leqq N.$$

Il existe, du fait des assertions b(iii) et b(iv) un entier i_{N+1} strictement plus grand que i_N et tel que $|\langle f_{p_k}, l_{i_{N+1}}\rangle| < (C/1000)2^{-(N+1)}$

pour tout k, $0 \leqq k \leqq N$ et $\left|\langle l_{i_{N+1}}, f\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s\right| \leqq 2^{-(N+1)}(C/1000)$. Du fait du choix de f, il existe un entier p_{N+1} strictement plus grand que p_N tel que $|\langle l_{ij}, f\rangle - \langle f_{p_{N+1}}, l_{ij}\rangle| \leqq (C/2000)2^{-(N+1)}$ pour tout entier j, $0 \leqq j \leqq N+1$. Alors on a:

$$|\langle f_{p_{N+1}}, l_{ij}\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s| \leqq |\langle l_{ij}, f\rangle - \int_E \hat{l} d\mu_s| + |\langle f_{p_{N+1}}, l_{ij}\rangle - \langle l_{ij}, f\rangle|$$
$$\leqq 2^{-j}\frac{C}{2000} + 2^{-(N+1)}\frac{C}{2000} \leqq \frac{C}{1000}2^{-j},$$

pour tout entier j, $0 \leqq j \leqq N+1$.

(d) Quatrième étape. Posons $g_n = f_{p_n}$ et $t_n = l_{i_{n+1}} - l_{i_n}$. En utilisant les assertions c(i) et c(ii), on obtient les assertions (i) et (ii) du Lemme 1. De l'assertion a(iv), on déduit l'assertion (iii) du Lemme 1.

L'assertion (iv) du Lemme 1 est une conséquence immédiate de la construction des fonctions k_i': elles sont presque à valeurs réelles.

4. Comme application du Lemme 1, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du Théorème 1, pour toute suite bornée $\{f_n\}_{n\in N}$ de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, ou bien on peut extraire une suite d'interpolation, ou bien elle est faiblement relativement compacte.*

Preuve. (a) Considérons l'adhérence $\mathscr{F}$ de la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ dans $H^{\infty*}$. Si $\mathscr{F}$ est inclus dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ est faiblement relativement compacte.

Si $\mathscr{F}$ n'est pas inclus dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, considérons un élément f de $\mathscr{F}\setminus L^1(m)/H^{\infty\perp}$. Il existe une mesure μ sur M telle que $\int \hat{g} d\mu = \langle g, f\rangle$ pour toute fonction g de H^∞. Dans la décomposition de Lebesgue de la mesure μ par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu = h\hat{m} + \mu_s$ la mesure μ_s n'est pas orthogonale à $\widehat{H^\infty}$, sinon $h\hat{m}$ représenterait aussi la forme linéaire f pour H^∞, qui appartiendrait alors à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Soit l_1 une fonction de H^∞ telle que $a = \int l_1 d\mu_s \neq 0$. Puisque la mesure μ_s est singulière par rapport à la mesure $\hat{m}$, il existe un fermé F de M de $\hat{m}$ mesure nulle tel que $\int_{M\setminus F} |\hat{l}_1| d|\mu_s| \leqq |a|/2$. Du fait de l'hypothèse sur les ensembles pics de H^∞, il existe un fermé G de M contenant F et de $\hat{m}$ mesure nulle. On a:

$$\left|\int_G \hat{l}_1 d\mu_s - a\right| = \left|\int_{M\setminus G} \hat{l}_1 d\mu_s\right| \leqq \int_{M\setminus G} |\hat{l}_1| d|\mu_s|$$
$$\leqq \int_{M\setminus F} |\hat{l}_1| d|\mu_s| \leqq \frac{|a|}{2} ;$$

donc $\int_G \hat{l}_1 d\mu_s \neq 0$.

(b) On peut alors appliquer le Lemme 1. On obtient, pour toute constante $C > 0$, une sous suite $\{g_p\}_{p\in N}$ de la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ et une suite bornée $\{t_p\}_{p\in N}$ de fonctions de H^∞ telles que

(i) $|\langle g_p, t_i\rangle| \leqq C2^{-i}$ pour $p \neq i$;

(ii) $|\langle g_i, t_i\rangle - 1| \leqq C2^{-i}$ pour tout entier i;

(iii) $\sum_{i=0}^{+\infty} |\hat{t}_i(x)| \leqq K$ pour tout x de M, [la constante K ne dépendant pas de C].

(c) Soit $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ une suite de nombres complexes telle que $|\alpha_n| \leqq 1$ pour tout entier n. Considérons alors la suite de fonctions de H^∞, $\{A_{\alpha,n}\}_{n\in N}$ définie par $A_{\alpha,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t_i(x)$. Puisque $|\hat{A}_{\alpha,n}(x)| \leqq \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i| |\hat{t}_i(x)| \leqq K$ la suite est bornée. Soit A_α une fonction de $L^\infty(m)$ adhérente à la suite $\{A_{\alpha,n}\}_{n\in N}$ pour la topologie faible étoile. La fonction A_α appartient à H^∞ et pour toute fonction h de $L^1(m)$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $\{n_i\}_{i\in N}$ telle que $\lim_{i\to+\infty} \int A_{\alpha,n_i} h dm = \int A_\alpha h dm$. Or $\int A_{\alpha,n_i} h dm = \int \widehat{A_{\alpha,n_i}} d\widehat{hm}$ et la suite $\{\hat{A}_{\alpha,n}\}_{n\in N}$ converge ponctuellement et de manière bornée sur M vers la fonction $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \hat{t}_i(x)$. Donc $\int A_\alpha h dm = \int \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \hat{t}_i(x) d\widehat{hm}$. En conséquence A_α est unique et pour tout entier p $\langle g_p, A_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle g_p, t_n\rangle$. Pour un choix convenable de C on obtient alors que, pour toute suit $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ de nombres complexes vérifiant $|\alpha_n| \leqq 1$ pour tout entier n, il existe une fonction A_α de H^∞ telle que

(i) $\|A_\alpha\|_\infty \leqq K$

(ii) $|\langle g_\alpha, A_\alpha\rangle - \alpha_p| \leqq 1/2$ pour tout entier p.

(d) Pour obtenir le fait que la suite $\{g_p\}_{p\in N}$ est d'interpolation et conclure la preuve du corollaire, on utilise maintenant un argument standard [[15], Lemme 1]. Rappelons-le: soit $s = \{s_n\}_{n\in N}$ une suite bornée de nombres complexes; notons $\|s\|_\infty = \sup_{n\in N} |s_n|$. Il existe une fonction B_1 de H^∞ avec $\|B_1\|_\infty \leqq K\|s\|_\infty$ et $\sup_{n\in N} |\langle g_n, B_1\rangle - s_n| \leqq 1/2\|s\|_\infty$. Considérons la suite $s^2 = \{-\langle g_n, B_1\rangle + s_n\}_{n\in N}$. Il existe une fonction B_2 de H^∞ avec $\|B_2\| \leqq K/2\|s\|_\infty$ et $\sup_{n\in N} |\langle g_n, B_1 + B_2\rangle - s_n| \leqq 1/4\|s\|_\infty$. On construit ainsi, par récurrence, une suite $\{B_n\}_{n\in N}$ de fonctions de H^∞ telle que $\|B_n\|_\infty \leqq K2^{1-n}\|s\|_\infty$ et $\sup_{p\in N} |\langle g_p, \sum_{i=1}^{n} B_i\rangle - s_p| \leqq 2^{-n}\|s\|_\infty$. Alors la fonction $B = \sum_{i=1}^{+\infty} B_i$ appartient à H^∞ et vérifie $\langle g_p, B\rangle = S_p$ pour tout entier p.

REMARQUES. Les deux assertions du Corollaire 1 sont contradictoires: en utilisant le théorème d'Eberlein-Smulian [[7] page 430] on a que, si la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ est relativement faiblement compacte, de toute sous suite de la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ on peut extraire une suite faiblement convergente; ce qui est clairement contradictoire avec la première assertion.

Comme conséquence immédiate du Corollaire 1, on a le fait que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est faiblement séquentiellement complet.

5. Pour un sous ensemble K borné de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, notons $\bar{K}$ l'ensemble des formes linéaires continues sur H^∞, adhérentes à K pour la topologie $\sigma(H^{\infty*}, H^\infty)$, notons $\tilde{K}$ l'ensemble des mesures sur M représentant les éléments de $\bar{K}$ par rapport à H^∞ et, notons $\tilde{K}_s$ l'ensemble des parties singulières des mesures de $\tilde{K}$ par rapport à la mesure $\hat{m}$.

On a alors le lemme suivant:

LEMME 2. (*Sous les hypothèses du Théorème* 1)

$$\eta(H^\infty, K) = \sup\left\{\left|\int \hat{f}d\mu_s\right|,\ f\in H^\infty \|f\|_\infty \leqq 1 \ \ et\ \ \mu_s\in\tilde{K}_s\right\}.$$

Preuve. On utilise les idées développées dans le Lemme 1.

(1) Il est évident que

$$\eta(H^\infty, K, \varepsilon) = \sup\left\{\left|\int fd\mu\right|,\ f\in H^\infty,\ \|f\|_\infty \leqq 1,\ \|Tf\|_{L^1(m)\backslash H^{\infty\perp}} \leqq \varepsilon \text{ et } \mu\in\tilde{K}\right\}.$$

Soit μ_s la partie singulière, par rapport à la mesure $\hat{m}$, d'une mesure μ dans $\tilde{K}$. Alors, du fait que tout fermé de $\hat{m}$ mesure nulle est inclus dans un ensemble pic pour H^∞ de $\hat{m}$ mesure nulle, il existe une suite $\{f_n\}_{n\in N}$ de fonction de H^∞ telle que $\|f_n\|_\infty \leqq 1$, $\|Tf_n\|_{L^1(m)\backslash H^{\infty\perp}} \leqq 1/n$ et $\lim_{n\to+\infty}\int \hat{g}\hat{f}_n d\mu_s = \int \hat{g}d\mu_s$ pour toute fonction g de H^∞. En conséquence $\eta(H^\infty, K) \geqq \sup\left\{\left|\int \hat{g}d\mu_s\right|,\ g\in H^\infty \|g\|_\infty \leqq 1 \text{ et } \mu_s\in\tilde{K}_s\right\}$.

(2) Pour l'inégalité dans l'autre sens, on utilise une idée voisine de celle de M. I. Kadec et A. Pełcynski [voir la preuve du Théorème 6 de [14]].

(a) De la définition de $\eta(H^\infty, K)$ il existe une suite $\{f_n\}_{n\in N}$ dans K et une suite de fonctions de H^∞, $\{g_n\}_{n\in N}$, telles que

(i) $\|g_n\|_\infty \leqq 1$;

(ii) $\|Tg_n\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leqq 1/n$;

(iii) $\lim_{n\to+\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \eta(H^\infty, K)$.

(b) Considérons une mesure μ adhérente à la suite $\{\hat{g}_n d\widehat{f_n m}\}_{n\in N}$

pour la topologie vague sur M. Du fait de l'assertion (iii) on a $\int 1 d\mu = \eta(H^\infty, K)$.

Remarquons que si $\eta(H^\infty, K) = 0$, on a rien à démontrer. Supposons donc que $\eta(H^\infty, K) \neq 0$.

Clairement, et en prenant au besoin une sous suite de la suite $\{g_n\}_{n \in N}$, du fait de l'assertion (ii) on peut supposer que:

(ii′) il existe une suite croissante de sous ensembles, mesurables de S, $\{E_k\}_{k \in N}$, telle que $1 - m(E_k) \leqq 1/2^k$ et la suite $\{g_n\}_{n \in N}$ converge uniformément vers 0 sur E_k.

En conséquence, si h est une fonction de $L^\infty(m)$, on a

$$\int \hat{h}\hat{E}_k d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \hat{h}\hat{E}_k \hat{g}_n d\widehat{f_n m} = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_k} h g_n f_n dm = 0$$

car la suite $\{g_n\}_{n \in N}$ converge uniformément sur E_k et la masse totale de la mesure $f_n m$ est bornée indépendamment de n. [E_k désigne par abus d'écriture la fonction caractéristique de l'ensemble E_k, c'est une fonction de $L^\infty(m)$]. D'oú $\int \hat{E}_k d|\mu| = 0$ pour tout k. La fonction $\hat{E}_k$ est la fonction caractéristique d'un ouvert fermé de M, noté $\hat{E}_k$ (par abus d'écriture), et on a: $\hat{E}_{k+1} \supset \hat{E}_k$ pour tout k et $\lim_{k\to+\infty} \hat{m}(\hat{E}_k) = 1$.

En conséquence, la mesure μ a son support inclus dans un fermé de $\hat{m}$ mesure nulle.

(c) Appliquons le Lemme 1.

Il existe une sous suite de la suite $\{f_n g_n\}_{n \in N}$, $\{f'_n g'_n\}_{n \in N}$, et une suite de fonctions, $\{l_i\}_{i \in N}$, vérifiant:

(i) $|\langle f_p g_p, l_i\rangle| \leqq 2^{-i}$ dès que $p \neq i$;

(ii) $|\langle f_i g_i, l_i\rangle - \eta(H^\infty, K)| \leqq 2^{-i}$ pour tout i;

(iii) $\sum_{n=p}^{+\infty} |\hat{l}_i(x)| \leqq 1 + 2^{-p}$ pour tout x de M et tout p entier.

Montrons que $\lim_{i\to+\infty} \sup_{p\neq i} |\langle f_p,\ g_i l_i\rangle| = 0$(iv). Supposons le contraire. Il existe $\alpha > 0$ et deux suites d'entiers, $\{p_n\}_{n \in N}$ et $\{i_n\}_{n \in N}$, telles que: $\lim_{n\to+\infty} i_n = +\infty$, $i_n \neq p_n$ et $|\langle f_{p_n}, g_{i_n} l_{i_n}\rangle| > \alpha$ pour tout entier n. Remarquons que la suite $\{p_n\}_{n \in N}$ n'est pas bornée car pour p fixé, du fait que $\lim_{n\to+\infty} \| T g_n \|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} = 0$ on a $\lim_{i\to+\infty} \langle f_p, g_i l_i\rangle = 0$. On peut donc supposer que $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Considérons, pour chaque entier n, la fonction $h_n = \gamma_n g_{i_n} l_{i_n} + g_{p_n} l_{p_n}$ où γ_n est un nombre complexe de module 1.

On a pour tout x de M $|\hat{h}_n(x)| \leqq |\hat{l}_{i_n}(x)| + |\hat{l}_{p_n}(x)|$. Donc en utilisant l'assertion (iii)(c) on obtient, pour tout $\beta > 0$, il existe n_0 tel que $n \geqq n_0$ implique $\|h_n\|_\infty \leqq 1 + \beta$. D'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} \| T h_n \|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} = 0 .$$

Calculons $\langle f_{p_n}, h_n\rangle = \langle f_{p_n}, \gamma_n g_{i_n} l_{i_n}\rangle + \langle f_{p_n}, g_{p_n} l_{p_n}\rangle$; donc pour un γ_n

convenable, on a $|\langle f_{p_n}, h_n\rangle| \geqq \eta(H^\infty, K) + \alpha/2$. Ce qui contredit la définition de $\eta(H^\infty, K)$.

En conséquence, en prenant une sous suite au besoin, on peut supposer que (iv′) $|\langle f_p, g_i l_i\rangle| \leqq 2^{-i}$ pour $i \neq p$.

(d) Considérons pour chaque p la fonction k_p définie par $k_p = \sum_{i=p}^{+\infty} g_i l_i$ [voir la preuve du Corollaire 1]. C'est une fonction de H^∞ telle que $\|k_p\|_\infty \leqq 1 + 2^{-p}$. De plus $\lim_{p\to+\infty} \|Tk_p\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} = 0$ et $|\langle f_j, k_p\rangle - \eta(H^\infty, K)| \leqq \sum_{i\geqq p}^{+\infty} 2^{-i} = 2^{1-p}$.

Soit μ_1 une mesure sur M vaguement adhérente à la suite $\{\widehat{f_n m}\}_{n\in N}$ et sa décomposition par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu_1 = h_1\hat{m} + \mu_{1,s}$. On a $\left|h_1\int \hat{k}_p d\mu - \eta(H^\infty, K)\right| \leqq 2^{-p+1}$ et $\lim_{p\to+\infty}\int \hat{k}_p(x) h\widehat{dm} = 0$ donc $\lim_{p\to+\infty}\int \hat{k}_p d\mu_{1,s} = \eta(H^\infty, K)$. Ce qui conclut la preuve du lemme.

Remarque. Considérons la suite $\{l_i f_i\}_{i\in N}$ d'éléments de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ construite dans la preuve du Lemme 2. On a $\eta(H^\infty, \{l_i f_i\}_{i\in N}) = \eta(H^\infty, K)$. De plus, puisque les fonctions l_i vérifient $|\hat{l}_i(x) - 1| + |\hat{l}_i(x)| < 1 + 100 \times 2^{-i}$ pour tout entier i et tout x de M [Lemme 1 (iv)] on peut montrer comme dans (c) que $\eta(H^\infty, \{(l_i - 1)f_i\}_{i\in N}) = 0$. Ce résultat est la "version H^∞" du lemme de M. I. Kadec et A. Pełczynski [[16] Lemme 3 et le preuve du Théorème 6 de [14]].

6. Preuve du Theoreme 1. L'équivalence de (1) et (4) est une simple conséquence du Corollaire 1 et du théorème d'Eberlein-Šmulian.

(2) implique (1). Raisonnons par l'absurde; si K n'est pas faiblement relativement compacte, ou bien K n'est pas bornée et l'assertion (2) est fausse, ou bien K est bornée, et par application du théorème d'Eberlein-Šmulian on peut construire une suite $\{f_n\}_{n\in N}$ de fonctions de K dont l'adhérence dans $H^{\infty *}$ n'est pas incluse dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$. Comme dans la preuve du Corollaire 1 et en utilisant la construction du Lemme 1, on montre qu'il existe une sous suite $\{b_n\}_{n\in N}$ de la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ et une suite bornée $\{a_n\}_{n\in N}$ de fonctions de H^∞ telles que $|\langle b_n, a_n\rangle| \geqq c > 0$ pour tout entier n et $\lim_{n\to+\infty}\|Ta_n\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} = 0$; ce qui contredit l'assertion (2).

(4) implique (2). Pour cela raisonnons par l'absurde. Remarquons que non (2) signifie que $\eta(H^\infty, K) > 0$. En utilisant le Lemme 2 puis la preuve du Corollaire 1 on construit dans K une suite d'interpolation.

L'équivalence de (2) et (3): elle a été obtenue dans un cadre très général par A. Grothendieck [[11] pp. 296–298]. Il obtient aussi le fait que (3) implique (1).

7. Preuve du Theoreme 2. On utilise le Lemme 2 et une idée de F. Delbaen et S. V. Kisliakov.

(a) Pour chaque f dans K considérons une mesure μ_f sur M telle que $||\mu_f|| = ||f||_{L^1(m)/H^{\infty\perp}}$ et $\int \hat{g} d\mu_f = \langle f, g \rangle$ pour toute fonction g de H^∞. Ecrivons la décomposition de Lebesgue de μ_f par rapport à $\hat{m}$: $\mu_f = \widehat{h_f m} + \mu_s$ [voir le paragraphe 2]. On a que $\mu_f - \widehat{fm}$ est une mesure orthogonale à $\widehat{H^\infty}$ dont la partie singulière par rapport à la mesure $\hat{m}$ est μ_s. De l'hypothèse sur les ensembles pics, il vient que μ_s est orthogonale à H^∞. Alors du fait de la construction de μ on a $||\mu_s|| = 0$. Considérons $K_1 = \{h_f,\ f \in K\}$ c'est un sous ensemble borné de $L^1(m)$.

(b) Pour chaque f dans K, il existe une fonction g_f de H^∞ vérifiant $||g_f||_\infty \leqq 1$ et $\langle f, g_f \rangle = ||f||_{L^1(m)/H^{\infty\perp}}$. En conséquence et du fait de la construction de la fonction h_f, la mesure $h_f g_f m$ est une mesure positive et $|g_f| = 1$ μ_f presque partout. Notons $K_2 = \{h_f g_f$ pour f dans $K\}$. De la définition de $\eta(\cdot, \cdot)$ on a $\eta(L^\infty, K_2) = \eta(L^\infty, K_1)$ et $\eta(L^\infty, K_1) \geqq \eta(H^\infty, K)$.

(c) Utilisons le Lemme 2 pour évaluer $\eta(L^\infty, K_2)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une mesure μ sur M adhérente à K_2 pour la topologie $\sigma(L^{\infty *}, L^\infty)$ et dont la partie singulière μ_s par rapport à la mesure $\hat{m}$ vérifie $||\mu_s|| \geqq \eta(L^\infty, K_2) - \varepsilon$. Du fait de l'hypothèse sur les ensembles pics de H^∞, il existe E un ensemble pic de H^∞ vérifiant $\hat{m}(E) = 0$ et $\left| \int_E d\mu_s - \int d\mu_s \right| \leqq \varepsilon$.

Remarquons que la mesure μ est positive car les éléments de K_2 sont positifs, d'où: $\left| \int_E d\mu_s - ||\mu_s|| \right| \leqq \varepsilon$ et $\left| \int_E d\mu_s \right| \geqq \eta(L^\infty, K_2) - 2\varepsilon$. Considérons une fonction l de H^∞ qui pique sur E. Pour $n \geqq n_0$, on a $\left| \int \widehat{l^n} d\mu - \int_E d\mu_s \right| < \varepsilon$. De la définition de la mesure μ, pour chaque entier n, il existe un élément f_n de K tel que

$$\left| \int \widehat{l^n} d\mu - \int \widehat{l^n} \hat{g}_{f_n} d\widehat{h_{f_n} m} \right| \leqq \varepsilon .$$

Ce qui donne $\left| \int \widehat{l^n g_{f_n} d h_{f_n} m} \right| \geqq \eta(L^\infty, K_2) - 4\varepsilon$. Remarquons que les fonctions $l^n g_{f_n}$ appartiennent à la boule unité de H^∞. De plus $\lim_{n \to +\infty} ||T(l^n g_{f_n})||_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} = 0$. Donc $\eta(H^\infty, K) \geqq \eta(L^\infty, K_2) - 4\varepsilon$. Ce qui termine la preuve du Théorème 2.

8. Remarques sur la preuve des Theoremes 1 et 2. (a) Il est possible de démontrer l'équivalence de (1) et (4) dans le Théorème 1 pour un sous espace vectoriel H^∞ de $L^\infty(m)$, fermé pour la topologie faible étoile et tel que tout fermé de M de $\hat{m}$ mesure nulle soit inclus dans un ensemble pic pour H^∞ de $\hat{m}$ mesure nulle [voir [8] Lemme 12.4, pape 57, pour une définition convenable des ensembles pics pour un espace vectoriel de fonctions et pour avoir une idée des modifications à apporter dans la preuve de l'équivalence]. Cela montre que, dans le Théorème 1, seule "(1) implique (2)" utilise le fait que H^∞ est une algèbre contenant les constantes.

Est-il possible d'améliorer la preuve du Théorème 1 sur ce point et d'obtenir alors le Théorème 1 pour de "bons" sous espaces vectoriels de $L^\infty(m)$?

(b) Un théorème très général de H. Rosenthal et L. Dor [6] dit que d'une suite bornée d'un espace de Banach, ou bien on peut extraire une suite faiblement de Cauchy, ou bien on peut extraire une suite équivalente à la base canonique de l_1. Il suffit alors pour obtenir l'équivalence de (1) et (4) de démontrer que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est faiblement séquentiellement complet.

(c) Du fait de la remarque précédente, on peut se poser la question suivante: les propositions (1), (2), (3), (4) ne sont elles pas équivalentes dès que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est faiblement séquentiellement complet? L'exemple qui suit prouve qu'il n'en est rien. La mesure m_3 est la mesure de Lebesgue plane restreinte au disque unité ouvert du plan complexe D et H^∞ est l'algèbre des fonctions holomorphes bornées dans D. Clairement, l'espace $L^1(m_3)/H^{\infty\perp}$ est isométriquement isomorphe à l'espace $L^1(m_1)/H_0^1$ défini dans le deuxième exemple. C'est une conséquence du Théorème 3 on peut le voir aussi directement: si on munit $H^\infty(D)$ de la topologie τ de la convergence uniforme sur tout compact, on voit que $L^1(m_1)/H_0^1$ et $L^1(m_3)/H^{\infty\perp}$ sont le dual $H^{\infty\prime}$ de $H^\infty(D)_\tau$ et que ce dual est un sous espace vectoriel fermé du dual $H^{\infty *}$ de $H^\infty(D)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur D. On en déduit que $L^1(m_3)/H^{\infty\perp}$ est faiblement séquentiellement fermé. Considérons dans $H^{\infty\prime}$ la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ définie pour chaque entier n et chaque fonction g de H^∞ par $\langle f_n, g\rangle =$ le coefficient de z^n dans le développement de Taylor à l'origine de la fonction g. Clairement cette suite converge faiblement vers 0 et pour tout entier n, $\langle f_n, z^n\rangle = 1$ et $\|T(z^n)\|_{L^1(m_3)/H^{\infty\perp}} \leqq \int |z^n| \mathrm{dm}_3 \leqq 2\pi/(n+2)$. Ainsi (1) n'implique pas (2). En fait, dans ce cas, c'est la seule implication fausse dans le Théorème 1.

9. Preuve du Theoreme 3. On reprend la preuve donnée dans [19] pour le cas de l'algèbre des fonctions holomorphes bornées dans le disque unité ouvert du plan complexe, et on en modifie un peu la fin.

(a) Donnons d'abord un lemme utile dans la preuve du théorème.

LEMME 3. *Soit f une fonction continue sur un compact X et telle que*

(i) $\|f\|_\infty = 1$;

(ii) $E = \{x \in X: f(x) = 1\} = \{x \in X: |f|(x) = 1\}$
soit $\{\mu_n\}_{n \in N}$ *une suite de mesures sur* X *telle que*
(iii) $\|\mu_n\| \leqq 1$;
(iv) $\lim_{n \to +\infty} \int f d\mu_n = 1$.
Alors pour tout voisinage W *de* E
(1) $\lim_{n \to +\infty} \int_{X \setminus W} d|\mu_n| = 0$;
(2) $\lim_{n \to +\infty} \int_W d\mu_n = 1$.

Preuve. Remarquons une conséquence évidente de (i) et (ii): $\sup_{x \in X \setminus W} |f(x)| < 1$. Alors en utilisant (iii) on a:

$$\left|\int f d\mu_n\right| \leqq \left|\int_{X \setminus W} f d\mu_n\right| + \left|\int_W f d\mu_n\right| \leqq \sup_{x \in X / W} |f(x)| \int_{X \setminus W} d|\mu_n| + \int_W d|\mu_n| \leqq (\sup_{x \in X / W} |f(x)| - 1) \int_{X \setminus W} d|\mu_n| + 1 .$$

En utilisant (iv) on obtient $\lim_{n \to +\infty} \int_{X \setminus W} d|\mu_n| = 0$, ce qui prouve (1).

Soit $\varepsilon > 0$. Notons $V_\varepsilon = \{x \in X: |f(x) - 1| < \varepsilon\}$. On a

$$\begin{aligned} \left|\int_W d\mu_n - 1\right| &\leqq \left|\int_{V_\varepsilon \cap W} d\mu_n - 1\right| + \int_{X \setminus V_\varepsilon \cap W} d|\mu_n| \\ &\leqq \left|\int_{V_\varepsilon \cap W} (1 - f) d\mu_n\right| + \left|\int f d\mu_n - 1\right| + \left|\int_{X \setminus V_\varepsilon \cap W} f d\mu_n\right| \\ &\quad + \int_{X \setminus V_\varepsilon \cap W} d|\mu_n| \leqq \varepsilon + \left|\int f d\mu_n - 1\right| + 2\int_{X \setminus V_\varepsilon \cap W} d|\mu_n| . \end{aligned}$$

Du fait de (1) et de (iv) on peut choisir n_0 tel que $n \geqq n_0$ implique $\left|\int_W d\mu_n - 1\right| < 2\varepsilon$ ce qui prouve (2).

(b) Preuve du Théorème 3.

Soit b un élément de B. Comme forme linéaire sur H^∞ il existe une mesure μ sur M telle que $\|\mu\| = \|b\|$ et $\int f d\mu = \langle b, f\rangle$ pour toute fonction f de H^∞. Ecrivons la décomposition de Lebesgue de la mesure μ par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu = h\hat{m} + \mu_s$. Pour conclure la preuve, il suffit de montrer que μ_s est orthogonale à H^∞. En effet, la mesure $hd\hat{m}$ vérifie $\int hfd\hat{m} = \langle b, f\rangle$ pour toute fonction de H^∞, par conséquent $\|bd\hat{m}\| + \|\mu_s\| = \|b\| = \|hd\hat{m}\|$, donc $\mu_s = 0$.

Raisonnons par l'absurde. Si la mesure μ_s n'est pas orthogonale à H^∞, il existe une fonction g de H^∞ telle que $\int \hat{g} d\mu_s \neq 0$. D'après la construction de μ_s et l'hypothèse sur les ensembles pics de H^∞, il existe F un ensemble pic de H^∞ tel que $\left|\int_F \hat{g} d\mu_s\right| > 0$. Soit f une fonction de H^∞ qui pique sur F. Alors $\left|\int_F \hat{g} f^n d\mu_s\right| = \left|\int_F \hat{g} d\mu_s\right| > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \int \widehat{hf^n} \hat{g} d\hat{m} = 0$, donc pour n assez grand $|\langle b, gf^n\rangle| = \left|\int \widehat{gf^n} d\mu\right| > 1/2 \left|\int_F g d\mu_s\right| > 0$. Considérons une fonction k de H^∞ adhérente à la suite $\{gf^n\}_{n\in N}$ pour la topologie $\sigma(H^\infty, B)$. Soit ψ un homomorphisme de H^∞ qui est un point pic généralisé [[8] pages 52-60] et tel que $\psi(f) \neq 1$.

Remarquons que H^∞ ne sépare pas nécessairement les points de M; définissons donc la relation d'équivalence R: x et y dans M sont équivalents et on note xRy si et seulement si pour toute fonction f de H^∞ on a $\hat{f}(x) = \hat{f}(y)$. Alors l'espace quotient M/R peut être identifié à un sous-ensemble fermé du spectre de H^∞ contenant tous les points pics généralisés. De plus l'application quotient R est continue.

Pour $\varepsilon > 0$, considérons V_ε l'ensemble des homomorphismes φ de H^∞ vérifiant $|\varphi(k) - \psi(k)| < \varepsilon$ et $\varphi(f) \neq 1$. Puisque ψ est un point pic généralisé, il existe une fonction l_ε de H^∞ telle que $\psi(l_\varepsilon) = 1 = ||l_\varepsilon||$, $|\varphi(l_\varepsilon)| < 1/2$ si φ n'appartient pas à V_ε et $|\varphi(l_\varepsilon)| < 1$ si $|\varphi(l_\varepsilon)| \neq 1$.

Considérons $R^{-1}(V_\varepsilon)$. C'est un ouvert de M disjoint de F: c'est le sousensemble des x de M vérifiant $|\hat{k}(x) - \psi(k)| < \varepsilon$ et $\hat{f}(x) \neq 1$. On a $\hat{l}_\varepsilon(x) = 1 = ||l_\varepsilon||_\infty$ pour tout x de $R^{-1}\{\psi\}$, $|\hat{l}_\varepsilon(x)| < 1/2$ si x n'appartient pas à $R^{-1}(V_\varepsilon)$ et $|\hat{l}_\varepsilon(x)| < 1$ si $|\hat{l}_\varepsilon(x)| \neq 1$.

Il existe une suite d'éléments $(b_n)_{n\in N}$ de B et une suite de mesure $\{\mu_n\}_{n\in N}$ sur M telles que $\lim_{n\to+\infty} \langle b_n, l_\varepsilon\rangle = 1$, $||b_n|| = ||\mu_n|| = 1$ et $\int \hat{t} d\mu_n = \langle b_n, t\rangle$ pour tout entier n et toute fonction t de H^∞. On peut appliquer le Lemme 3 au voisinage $R^{-1}(V_\varepsilon)$. Calculons:

$$
\begin{aligned}
|\psi(k) - \langle b_n, k\rangle| &\leqq \left|\varphi(k) - \int \hat{k}(x) d\mu_n\right| \\
&\leqq \left|\psi(k) - \int_{R^{-1}(V_\varepsilon)} \hat{k}(x) d\mu_n\right| + \left|\int_{M\setminus R^{-1}(V_\varepsilon)} \hat{k}(x) d\mu_n\right| \\
&\leqq |\psi(k)| \left[1 - \int_{R^{-1}(V_\varepsilon)} d\mu_n\right] + \left|\int_{R^{-1}(V_\varepsilon)} (\hat{k}(x) - \psi(k)) d\mu_n\right| \\
&\quad + ||k||_\infty \int_{M\setminus R^{-1}(V_\varepsilon)} d|\mu_n| \\
&\leqq ||k||_\infty \left[\left|1 - \int_{R^{-1}(V_\varepsilon)} d\mu_n\right| + \int_{M\setminus R^{-1}(V_\varepsilon)} d|\mu_n|\right] + \varepsilon\,;
\end{aligned}
$$

d'où, pour n assez grand, $|\varphi(k) - \langle b_n, k\rangle| \leqq 2\varepsilon$.

De plus, on a $\langle b_n, k\rangle = \lim_{p\to+\infty} \langle b_n, gf^p\rangle = \lim_{p\to+\infty} \int \hat{g} f^p d\mu_n = \int_F g d\mu_n$; d'où puisque $R^{-1}(V_\varepsilon)$ est disjoint de F, pour n assez grand $|\langle b_n, k\rangle| < \varepsilon$. On en conclut que $|\langle\psi(k)\rangle| \leqq 3\varepsilon$. Donc $\psi(k) = 0$.

Cela montre que k est nulle pour tout point pic généralisé de H^∞, vérifiant $\psi(f) \neq 1$. Considérons alors la fonction $k(1-f)$; elle est nulle sur tout point pic généralisé donc elle est identiquement nulle: $\|k(1-f)\|_\infty = 0$. Or F est de $\hat{m}$ mesure nulle, donc la fonction $1-f$ est non nulle m presque partout, ce qui implique que k est nulle m presque partout. En conséquence, $k \equiv 0$ ce qui contredit le fait que $|\langle b, gf^n\rangle| > 1/2\left|\int g d\mu_s\right| > 0$ pour n assez grand.

Deuxième partie

10. Le propos de l'exemple suivant est de montrer que l'on peut obtenir les Théorèmes 1, 2 et 3 quand l'hypothèse sur les ensembles pics n'est pas tout-á-fait vérifiée.

Pour cela, on utilise l'étude faite par L. Zalcman [20] et par T. W. Gamelin et J. Garnett [9] de l'algèbre H^∞ des fonctions holomorphes bornées sur un ouvert particulier du plan complexe, ayant une infinité de trous.

Soit U un ouvert du plan complexe $\boldsymbol{C}$ obtenu en enlevant au disque $\Delta_\infty = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| < 1\}$ une suite de disques $\Delta_n = \{z \in \boldsymbol{C}: |z - x_n| \leqq r_n\}$, pour $n = 1, 2, \cdots$, centrés sur le demi axe réel positif, s'accumulant en 0, deux à deux disjoints et vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n/x_n < +\infty$. On dira que U est un ouvert de type L.

Notons m la mesure de Lebesgue sur le bord de U, bU. Le bord de U se compose du point 0, des cercles $\Gamma_n = \{z \in \boldsymbol{C}: |x_n - z| = r_n\}$ et du cercle $\Gamma_\infty = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| = 1\}$.

PROPRIETE 1 [20]. *Chaque fonction f de H^∞ a des limites non tangentielles m presque partout qui définissent une fonction f^* de $L^\infty(m)$ vérifiant*:

(a) $\|f^*\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(x)| = \|f\|_U$

(b) *f^* appartient à l'algèbre $H^\infty(R(\bar{U}), m)$ adhérence dans $L^\infty(m)$ pour la topologie faible étoile de l'algèbre $R(\bar{U})$ des fractions rationnelles d'une variable complexe à pôles hors de $\bar{U}$ (l'adhérence de U dans $\boldsymbol{C}$).*

(c) *l'application T de H^∞ dans $H^\infty(R(\bar{U}), m)$, définie par $T(f) = f^*$, est un isomorphisme isométrique de H^∞ sur $H^\infty(R(\bar{U}), m)$ qui transforme les suites bornées convergeant ponctuellement sur U en suites convergeant pour la topologie faible étoile.*

(d) *Pour chaque fonction f de H^∞, il existe une suite $\{f_n\}_{n \in N}$ de fonctions de $R(\bar{U})$ telle que*

$\|f_n\|_U = \|f\|_U$,

$\{f_n\}_{n \in N}$ converge vers f ponctuellement dans U,

$\{f_n\}_{n \in N}$ converge vers f^* ponctuellement m presque partout.

Ces propriétés permettent d'identifier H^∞ et $H^\infty(R(\bar{U}), m)$ et montrent que H^∞ est le dual de l'espace vectoriel $L^1(m)/H^\infty(R(\bar{U}), m)^\perp$. On utilisera la même notation pour désigner une fonction f de H^∞ et "ses limites non tangentielles" f^* dans $L^\infty(m)$, la même notation pour désigner H^∞ et $H^\infty(R(\bar{U}), m)$.

Un homomorphisme de l'algèbre H^∞ joue un rôle particulier: l'homomorphisme "distingué" φ_0 défini comme suit:

Considérons la mesure $dm_0(\zeta) = 1/2i\pi\ (1/\zeta)d\zeta$ sur le bord de U. Elle est, du fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n/x_n < +\infty$, finie et absolument continue par rapport ă la mesure m. Pour une fraction rationnelle f on a $\int f dm_0 = f(0)$; en conséquence l'application φ_0 de H^∞ dans C définie par $f \to \int f dm_0 = \varphi_0(f)$ est un homomorphisme de l'algèbre H^∞ continue pour la topologie faible étoile. Remarquons que c'est l'unique prolongement à H^∞ continue pour la topologie faible etoile de l'évaluation au point 0 pour les fractions rationnelles à pôles hors de $\bar{U}$.

On note $H^\infty(0)$ l'idéal des fonctions de H^∞ nulle sur φ_0.

PROPRIETE 2 [9]. *Soit $\{\mu_n\}_{n\in N}$ une suite de mesures dans $L^1(m)$ qui converge, pour la topologie vague des mesures sur $\bar{U}$, vers une masse ponctuelle (éventuellement nulle) au point* 0. *Alors ou bien la suite $\{\mu_n\}_{n\in N}$ converge en norme $(H^\infty(0))^*$ vers* 0, *ou bien on peut en extraire une suite d'interpolation pour H^∞.* [*$(H^\infty(0))^*$ désigne le dual de $H^\infty(0)$*].

On note M le spectre de $L^\infty(m)$, M_n le spectre de $L^\infty(m/\Gamma_n)[m/\Gamma_n$ désigne la restriction â Γ_n de la mesure $m]$, et M_0 le sous ensemble de M formé des homomorphismes φ de $L^\infty(m)$ vérifiant $\varphi(f) = f(0)$ pour les fonctions f continues sur bU. On a $M = (\bigcup_{n=1}^\infty M_n) \cup M_\infty \cup M_0$.

PROPRIETE 3. *Si F est un fermé contenu dans une réunion finie de M_n, $n = 1, 2, \cdots, +\infty$, alors il existe un ensemble pic G de $\widehat{H^\infty}$ contenu dans cette réunion finie, contenant F et de $\hat{m}$ mesure nulle.*

[Voir l'Exemple 3 du premier chapitre.]

On note M^∞ le spectre de H^∞ et M_0^∞ l'ensemble des homomorphismes φ de H^∞ vérifiant $\varphi(z) = 0$. Il est clair que la restriction à H^∞ d'un homomorphisme de M_0 appartient à M_0^∞, et que l'homomorphisme distingué φ_0 appartient à M_0^∞.

PROPRIETE 4. *Soit $\varepsilon > 0$, $1 > \delta > 0$ et V un voisinage de* 0. *Alors il existe un voisinage W de* 0, *contenu dans V et un opéra-*

teur linéaire L de $H^\infty(0)$ dans $H^\infty(0)$ vérifiant

(i) $\widehat{L(f)}/M_0^\infty = \hat{f}/M_0^\infty$;

(ii) $|L(f)(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \|f\|_\infty$ *pour x dans $W \cap U$;*

(iii) $|L(f)(x)| \leqq \delta \|f\|_\infty$ *pour x dans $U \backslash V$;*

(iv) $\|L(f)\|_\infty \leqq \|f\|_\infty$.

Preuve. T. W. Gamelin et J. Garnett [9] prouvent la proposition suivante: soit $\varepsilon' > 0$, $1 > \delta' > 0$ et V' un voisinage de 0. Alors il existe un opérateur linéaire L' de $H^\infty(0)$ dans $H^\infty(0)$ et un voisinage W' de 0 contenu dans V' vérifiant:

(i)' $\widehat{L'(f)}/M_0^\infty = \hat{f}/M_0^\infty$;

(ii)' $|L'(f)(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \|f\|_\infty$ pour x dans $W \cap U$;

(iii)' $|L'(f)(x)| \leqq \delta \|f\|_\infty$ pour x dans $U \backslash V$;

(iv)' $\|L'(f)\|_\infty \leqq 100 \|f\|_\infty$.

On utilise alors une idée de E. Bishop [voir [8] le Théorème 11, 1 et sa preuve]. Choisissons $0 < s < 1$ suffisamment près de 1 en sorte que $100 - 1 + s(\delta - 100) < 0$. Choisissons une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ décroissante de nombres réels strictement positifs, convergeant vers 0, et telle que $\varepsilon_0 \leqq \varepsilon/2$ et $\varepsilon_{n-1}(1 - s^n) + s^n(100 - 1 + s(\delta - 100)) < 0$ pour tout entier n.

On construit une suite convergeante d'opérateurs linéaires de $H^\infty(0)$ dans $H^\infty(0)$, par récurrence, de la manière suivante:

ETAPE 0. Posons $V' = V$, $\varepsilon' = \varepsilon_0$ et $\delta' = \delta$. On obtient en utilisant la proposition un opérateur L_0' et un voisinage W_0' inclus dans V' satisfaisant (i)' (ii)' (iii)' et (iv)'.

ETAPE 1. Posons $V' = W_0' \cap \{z: |z| < 1\}$, $\varepsilon' = \varepsilon_1$ et $\delta' = \delta$. On obtient un opérateur L_1' et un voisinage W_1' inclus dans $W_0' \cap \{z: |z| < 1\}$ satisfaisant (i)' (ii)' (iii)' et (iv)'.

Supposons la construction jusqu'à l'étape n. Posons $V' = W_n' \cap \{z: |z| < 1/(n + 1)\}$. $\varepsilon' = \varepsilon_{n+1}$ et $\delta' = \delta$. On obtient un opérateur L_{n+1}' et un voisinage W_{n+1}' contenu dans $W_n' \cap \{z: |z| < 1/(n + 1)\}$ et satisfaisant (i)' (ii)' (iii)' (iv)'.

Considérons $L = (1 - s) \sum_{i=0}^{+\infty} s^j L_j'$. C'est une série normalement convergente d'opérateurs de $H^\infty(0)$ dans $H^\infty(0)$.

Les assertions (i) (iii) (iv) s'obtiennent comme dans le Théorème 11.1 [8].

Montrons l'assertion (ii). Pour cela considérons un entier n_0 tel que $101(1 - s) \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} s^n < \varepsilon/2$. Alors si $x \in W_{n_0}'$ on a

$$|L(f)(x) - f(x)| \leqq (1 - s) \sum_{j=0}^{+\infty} s^j |L_j'(f)(x) - f(x)|$$

$$\leqq (1-s)\sum_{j=0}^{0n} s^j \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_\infty + (1-s)\sum_{n_0+1}^{+\infty} s^j 101 \|f\|_\infty$$
$$\leqq \varepsilon \|f\|_\infty .$$

PROPRIETE 5. *M_0 est un fermé de $\hat{m}$ mesure nulle mais il n'existe pas de pic G de $\widehat{H^\infty}$ de $\hat{m}$ mesure nulle contenant M_0.*

Preuve. Utilisons un résultat de L. Zalcman [20]. L'homomorphisme distingué φ_0 a une mesure représentative portée par M_0. Supposons qu'il existe une fonction g de H^∞ telle que $\|g\|_\infty = 1$, $\hat{g} = 1$ sur M_0 et $|g| < 1$ m presque partout sur bU. Alors $\varphi_0(g) = 1$ et $\left|\int g(\zeta)dm_0(\zeta)\right| < 1$, ce qui est absurde.

On a les Théorèmes suivants:

THEOREME 1'. *Soit U un ouvert de type L.*

Alors, pour toute partie K de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, les propositions suivantes sont équivalentes:

(1) *K est faiblement relativement compacte;*

(2) *K est bornée, et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $g \in H^\infty$, $\|g\|_\infty \leqq 1$ et $\|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leqq \delta$ implique $\sup_{f\in K} |\langle f, g\rangle| \leqq \varepsilon$;*

(3) $\lim_{C\to+\infty} [\sup_{f\in K} (\inf_{g\in H^\infty, \|g\|_\infty \leqq C} \|f - Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}})] = 0$;

(4) *K est bornée et ne contient aucune suite d'interpolation.*

THEOREME 2'. *Soit U un ouvert de type L. Alors, étant donné un sous ensemble borné K de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, il existe un sous ensemble borné K_1 de $L^1(m)$ tel que $K_1/H^{\infty\perp} = K$ et $\eta(H^\infty, K) = \eta(L^\infty, K_1)$.*

THEOREME 3'. *Soit U un ouvert de type L. Alors, tout espace de Banach B dont le dual est H^∞ est isométriquement isomorphe à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.*

11. Une bonne representation des elements de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$. Soit f un élément de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$; il existe une fonction k dans $L^1(m)$ telle que, pour toute fonction g de H^∞ on ait $\langle f, g\rangle = \int kgdm$. On peut considérer f comme une forme linéaire continue sur $H^\infty(0)$. Alors il existe une mesure μ_f sur M telle que $\|\mu_f\| = \sup\{|\langle f, g\rangle|, g \in H^\infty(0) \|g\|_\infty \leqq 1\}$, et $\int \hat{g} d\mu_f = \langle f, g\rangle$ pour toute fonction g de $H^\infty(0)$.

La mesure $\nu_f = \mu_f + \left(\langle f, 1\rangle - \int d\mu_f\right)\widehat{m_0}$ est une mesure sur M qui vérifie $\int \hat{g} d\nu_f = \langle f, g\rangle$ pour toute fonction g de H^∞. Considérons la décomposition de Lebesgue de la mesure μ_f par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu_f = \widehat{h_f m} + \mu_s$. La mesure $\nu_f - \widehat{km}$ étant orthogonale à $\widehat{H^\infty}$, du fait de la Propriété 3, pour chaque entier n la restriction de la mesure μ_s à M_n est orthogonale à $\widehat{H^\infty}$; la construction de la mesure μ_f donne que $\mu_s/M_n=0$; le même raisonnement vaut pour M_∞. La mesure $\mu_f - \widehat{km}$ est orthogonale à $H^\infty(0)$; la Propriété 4 montre que la mesure μ_s restreinte à la fibre M_0 est orthogonale à la $\widehat{H^\infty}(0)$; la construction de la mesure μ_f donne $\mu_s/M_0 = 0$.

Ainsi on a construit une "bonne" mesure représentant la forme linéaire f de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$: $\nu_f = h_f m + \left(\langle f, 1\rangle - \int h_f dm\right)m_0 = k_f dm$. On l'utilisera plusieurs fois dans la suite.

Puisque $H^\infty(0)$ est fermée pour la topologie faible étoile pour chaque élément f de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, il existe une fonction g_f de $H^\infty(0)$ vérifiant $\|g_f\|_\infty \leqq 1$ et $\langle f, g_f\rangle = \sup\{|\langle f, g\rangle|, g \in H^\infty(0) \|g\|_\infty \leqq 1\}$. En conséquence, du fait de la construction de la mesure μ_f, on a

$$\int g_f h_f dm = \int |h_f| dm ,$$

donc $g_f h_f = |h_f| m$ presque partout et $|g_f| = 1$ μ_f presque partout.

12. Preuve du Theoreme 1′. Considérons un sous ensemble K borné de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ et pour chaque f de K sa bonne représentation $k_f m$.

LEMME 3. *Si K est faiblement relativement compact, alors* $\eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\}) = 0$.

Preuve. Remarquons que $\left\{\langle f, 1\rangle - \int h_f dm, f \in K\right\}$ est borné dans C, en conséquence $\eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\}) = \eta(L^\infty(m), \{h_f, f \in K\})$. De plus $\eta(L^\infty(m), \{h_f, f \in K\}) = \eta(L^\infty(m), \{|h_f|, f \in K\}) = \eta(L^\infty(m), \{h_f g_f, f \in K\})$.

Supposons $\alpha = \eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\})$ non nul et utilisons le lemme de M. I. Kadec et A. Pełczynski [16]. Il existe une suite de sous ensembles mesurables de bU, $\{E_i\}_{i \in N}$, deux à deux disjoints, et une suite $\{f_i\}_{i \in N}$ d'éléments de K telles que: $\lim_{i \to +\infty} \int_{E_i} g_{f_i} h_{f_i} dm = \alpha$ et $\{h_{f_i}(1 - X_{E_i})\}_{i \in N}$ est relativement faiblement compact dans $L^1(m)$. [X_{E_i} désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E_i.]

Considérons une mesure μ sur M vaguement adhérente à la suite $\{\widehat{g_{f_i} h_{f_i} X_{E_i} m}\}_{i \in N}$. C'est une mesure positive singulière par rapport à la mesure $\hat{m}$ et non nulle: $\int 1 d\mu = \alpha$.

Supposons qu'il existe n, $n = 1, 2, \cdots, +\infty$, tel que la restriction μ/M_n de μ à M_n ne soit pas nulle. On peut alors, en utilisant la Propriété 3 et les idées développées dans la preuve des Théorèmes 1 et 2 construire une sous-suite de la suite $\{h_{f_i}X_{E_i}\}_{i\in N}$ qui est d'interpolation pour H^∞. En conséquence K n'est pas faiblement relativement campact, car $\{h_{f_i}(1-X_{E_i})\}_{i\in N}$ est faiblement relativement compact dans $L^1(m)$ donc dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ et $\left\{\langle f, 1\rangle - \int h_f dm,\ f\in K\right\}$ est borné dans C.

On peut donc supposer, en prenant au besoin une sous suite, que la suite de mesures $\{h_{f_i}X_{E_i}m\}_{i\in N}$ converge vaguement sur bU vers une masse ponctuelle au point 0.

Appliquons la Propriété 2. Ou bien, on peut extraire de la suite $\{h_{f_i}X_{E_i}\}_{i\in N}$ une suite d'interpolation pour H^∞ ce qui est absurde comme précédemment, ou bien, la suite $\{h_{f_i}X_{E_i}m\}_{i\in N}$ converge en norme vers 0 sur $H^\infty(0)$, et il existe un entier i tel que

$$\sup\left(\left|\int h_{f_i}X_{E_i}g dm\right|,\ g\in H^\infty(0) \text{ et } \|g\|_\infty \leqq 1\right\}$$
$$< \frac{\alpha}{2} \text{ et } \int |h_i|X_{E_i}dm \geqq \frac{2\alpha}{3}\ .$$

Alors, il existe une fonction l de $L^1(m)$ telle que $\int |l|dm < \alpha/2$ et $\int (l - h_{f_i}X_{E_i})gdm = 0$ pour toute fonction g de $H^\infty(0)$. On a

$$\int [l + h_{f_i}(1-X_{E_i})]gdm = \int [h_{f_i}X_{E_i} + h_{f_i}(1-X_{E_i})]gdm$$
$$= \int h_{f_i}gdm = \langle f_i, g\rangle$$

pour toute fonction g de $H^\infty(0)$, et

$$\int |l + h_{f_i}(1-X_{E_i})|dm \leqq \int |l|dm + \int |h_{f_i}|(1-X_{E_i})dm$$
$$\leqq \frac{\alpha}{2} + \int |h_{f_i}|(1-X_{E_i})dm < \int |h_{f_i}|dm\ ,$$

ce qui est absurde du fait de la construction de la fonction h_{f_i}.

Cela conclut la preuve du lemme.

Signalons deux corollaires immédiats.

COROLLAIRE 2. *K est faiblement relativement compact dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ si et seulement si $\{k_f, f\in K\}$ est faiblement relativement compact dans $L^1(m)$.*

COROLLAIRE 3. *Si K est faiblement relativement compact dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ alors $\eta(H^\infty, K) = 0$.*

La preuve du Théorème 1' se déduit des Corollaires 2 et 3 du Lemme 3 en utilisant les résultats de A. Grothendieck [11] et H. Rosenthal et L. Dor [6] déjá cités.

Remarquons que l'on peut aussi obtenir une preuve directe (n'utilisant pas le Théorème de H. Rosenthal et L. Dor) de l'équivalence des Propositions (1) et (4) du Théorème 1' en utilisant les idées développées dans le Lemme 3.

13. Preuve du Theoreme 2'. Considérons un sous-ensemble K borné de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ et pour chaque f de K sa bonne représentation $k_f m$. Alors $\eta(H^\infty, K) = \eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\})$.

Preuve. De la définition de $\eta(\cdot, \cdot)$ on a $0 \leqq \eta(H^\infty, K) \leqq \eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\})$. Si $\eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\}) = 0$ le résultat est démontré.

Supposons $\alpha = \eta(L^\infty(m), \{k_f, f \in K\}) > 0$. Suivons la preuve du Lemme 3. On obtient une suite de sous ensembles mesurables de bU deux à deux disjoints $\{E_i\}_{i \in N}$ et une suite d'éléments $\{f_i\}_{i \in N}$ de K telles que $\lim_{i \to +\infty} \int_{E_i} g_{f_i} h_{f_i} dm = \alpha$ et $\{h_{f_i}(1 - X_{E_i})\}_{i \in N}$ relativement faiblement compacte dans $L^1(m)$. En conséquence, et du fait que $\left\{\langle f, 1\rangle - \int h_f dm, f \in K\right\}$ est borné dans $\boldsymbol{C}$, il suffit de montrer que $\alpha \leqq \eta(H^\infty, \{h_{f_i} X_{E_i}\}_{i \in N})$.

Notons pour chaque entier n strictement positif $D_n = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| \leqq 1/n\}$. En prenant, au besoin une sous suite, on peut supposer que pour chaque n, la suite $\left\{\int_{E_i \cap D_n} g_{f_i} h_{f_i} dm\right\}$ converge vers α_n. La suite $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ est décroissante et à valeurs positives. Notons $\alpha_0 = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n$. Quitte ă extraire encore une sous suite, on peut supposer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int g_{f_n} h_{f_n} X_{E_n} X_{D_n} dm = \alpha_0 .$$

Considérons dans $L^1(m)$ les deux suites suivantes:

$$S_1 = \{l_{1,n} = g_{f_n} h_{f_n} X_{E_n}(1 - X_{D_n})\}_{n \in N}$$
$$S_2 = \{l_{2,n} = h_{f_n} X_{E_n} X_{D_n}\}_{n \in N} .$$

Soit μ_1 une mesure sur M adhérente vaguement à la suite S_1. C'est une mesure positive portée par un fermé de $\hat{m}$ mesure nulle [voir la preuve du Lemme 2(b)] et vérifiant $\int \hat{X}_{D_k} d\mu_1 = \alpha_k - \alpha_0$. On en déduit que $\lim_{k \to +\infty} \sup_{n \in N} \left(\int l_{1,n} X_{D_k} dm\right) = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe k_0 tel que

$$\sup_{n \in N} \left(\int l_{1,n} X_{D_{k_0}} dm\right) \leqq \varepsilon \text{ et } \int \hat{X}_{D_{k_0}} d\mu_1 \leqq \varepsilon .$$

Remarquons que le support de la mesure $(1-\hat{X}_{D_{k0}})\mu_1$ est un fermé de $\hat{m}$ mesure nulle inclus dans une union finie de M_n, $n=1,\cdots,+\infty$. Il existe donc un pic G de $\hat{m}$ mesure nulle supportant la mesure $(1-\hat{X}_{D_{k0}})\mu_1$, et inclus dans une union finie de M_n, $n=1,\cdots,+\infty$. Soit g une fonction de H^∞ qui pique sur G. Il existe un entier p et un entier $k_1>k_0$ tels que, on ait:

$$\left|\int\hat{g}^p d\mu_1-\int_G d\mu_1\right|\leqq\varepsilon,\ \|g^p X_{D_{k0}}\|_\infty\leqq\varepsilon \text{ et } \|g^p\|_{L^1(m)}\leqq\varepsilon\,.$$

Puisque $\alpha-\alpha_0\geqq\int_G d\mu_1\geqq\int(1-\hat{X}_{D_{k0}})d\mu_1\geqq(\alpha-\alpha_0)-\varepsilon$. On obtient que $\left|\int\widehat{g^p}d\mu_1-(\alpha-\alpha_0)\right|\leqq 2\varepsilon$. De la définition de μ_1 on peut trouver une suite d'entiers $\{n_j\}_{j\in N}$ strictement croissante telle que

$$\left|\int l_{1,n_j}g^p dm-(\alpha-\alpha_0)\right|\leqq 3\varepsilon\,.$$

On a $\int|l_{2,n}|dm=\int g_{f_n}l_{2,n}dm$ avec $\|g_{f_n}\|_\infty\leqq 1$ et g_{f_n} appartient à $H^\infty(0)$. En utilisant la Propriété 5, pour n assez grand, il existe une fonction g'_n de $H^\infty(0)$ vérifiant $\left|\int g_{f_n}l_{2,n}dm-\int g'_n l_{2,n}dm\right|\leqq\varepsilon$ (car la mesure $l_{2,n}m$ est portée par le disque D_n), $\|g'_n(1-X_{D_{k_1}})\|_\infty\leqq\varepsilon$, $\|g'_n\|_\infty\leqq 1+\varepsilon$ et $\|g'_n\|_{L^1(m)}\leqq\varepsilon$. En conséquence, on a

$$\left|\int g'_n l_{2,n}dm-\alpha_0\right|\leqq 2\varepsilon\,.$$

Considérons alors la fonction $g'_{n_j}+g^p g_{f_{n_j}}$ pour j assez grand. C'est une fonction de $H^\infty(0)$ vérifiant: $\|g'_{n_j}+g^p g_{f_{n_j}}\|_\infty\leqq 1+2\varepsilon$ et $\|g'_{n_j}+g_{f_{n_j}}g^p\|_{L^1(m)}\leqq 2\varepsilon$, donc $\|T(g'_{n_j}+g_{f_{n_j}}g^p)\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}}\leqq 2\varepsilon$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\left|\int(g'_{n_j}+g^p g_{f_{n_j}})h_{f_{n_j}}X_{E_{n_j}}dm-\alpha\right|&\leqq\left|\int g'_{n_j}l_{2,n_j}dm-\alpha_0\right|\\&+\left|\int g^p g_{f_{n_j}}l_{2,n_j}dm\right|+\left|\int g^p l_{1,n_j}dm-(\alpha-\alpha_0)\right|+\left|\int g'_{n_j}l_{1,n_j}dm\right|\\&\leqq 2\varepsilon+\varepsilon\sup_{f\in K}\int|k_f|dm+2\varepsilon+\left[\varepsilon\sup_{f\in K}\int|k_f|dm+(1+\varepsilon)\varepsilon\right].\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.

14. Preuve du Theoreme 3'. Soit b un élément de B. Comme forme linéaire sur $H^\infty(0)$, il existe une mesure μ sur M telle que $\|b\|_{H^\infty(0)}=\|\mu\|$ et $\int g d\mu=\langle b,g\rangle$ pour toute fonction g de $H^\infty(0)$. Ecrivons la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à la mesure

$\hat{m}$: $\mu = b\hat{m} + \mu_s$. Pour conclure, il suffit de montrer que μ_s est orthogonale à $H^\infty(0)$.

Supposons le contraire. Il existe une fonction g de $H^\infty(0)$ telle que $\int \hat{g} d\mu_s \neq 0$.

Ou bien, il existe un "entier" n, $n = 1, 2, \cdots, +\infty$, tel que

$$\int_{M_n} \hat{g} d\mu_s \neq 0$$

et on peut répeter l'argument de la preuve du Théorème 3.

Ou bien, $\int_{M_0} \hat{g} d\mu_s \neq 0$. En utilisant la Propriété 4, on construit une suite $\{g_n\}_{n \in N}$ de fonctions de $H^\infty(0)$ vérifiant $\hat{g}_n/M_0 = \hat{g}/M_0$, $\|g_n\|_\infty \leqq K$, $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in M_k} |\hat{g}_n(x)| = 0$ pour $k = 1, 2, \cdots, +\infty$. On conclut alors comme dans la preuve du Théorème 3 en étudiant la suite $\{g_n\}_{n \in N}$.

Note de l'auteur. Récemment T. Ito a montré que tout sous-espace fermé de $L^1(m)$ est le prédual isométrique unique de son dual. [On Uniqueness of Preduals. Notices Amer. Math. Soc., 25 (1978).]

On peut en obtenir la généralisation suivante.

THEOREME. *Dans les hypothèses du théorème* 1, *tout sous-espace fermé de* $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ *est l'unique prédual isométrique de son dual.*

Un résultat analogue peut être aussi obtenu pour les ouverts de type L.

REFERENCES

1. E. Amar, *Sur un théorème de Mooney relatif aux fonctions analytiques bornées*, Pacific J. Math., **16** (1973), 191-194.
2. E. Amar, et A. Lederer, *Points exposés de la boule unité de $H^\infty(D)$*, C. R. Acad. Sc. Paris, A **272** (1971), 1449-1452.
3. T. Ando, *Uniqueness of predual of H^∞*, preprint.
4. I. Cnop et F. Delbaen, *A Dunford Pettis theorem for $L^1/H^{\infty\perp}$*, J. Functional Anal., **24** (1977), 364-378.
5. F. Delbaen, *Weakly compact sets in L^1/H_0^1*. Wrije Universiteit, Brussel (1975), preprint.
6. L. E. Dor, *On sequences spanning l_1 space*, Proc. Amer. Math. Soc., (1975), 515-516.
7. N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators* (*tome* 1), Pure and Appl. Math. Interscience Publ. Inc., New York, (1958).
8. T. W. Camelin, *Uniform algebras*, Prentice Hall. Series in Modern Analysis, (1969).
9. T. W. Gamelin and J. Garnett, *Distinguished homomorphism and fiber algebra*, Amer. J. Math., **42** (1970), 455-474.
10. A. Grothendieck, *Une caractérisation vectorielle métrique des espaces L^1*, Canad. J. Math., (1955), 552-561.
11. ———, *Espaces vectoriels topologiques*, Publ. Soc. Math., Soa Paulo, (1964).
12. V. P. Havin, *The spaces H^∞ and L^1/H_0^1*. (*Investigations on linear operators and theory of functions IV*), Zap. Naucn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov, **39** (1974),

120-140. (en russe).
13. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions,* Prentice Hall series in Modern Analysis, (1962).
14. M. I. Kadec et A. Pełczynski, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces* L_P, Studia Math., **2** (1962), 161-179.
15. Y. Katznelson, *The algebra of continuous functions,* Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 313-315.
16. S. V. Kisliakov, *On the conditions of Dunford-Pettis, Pelczynski and Grothendieck,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **225** (1975), 1252-1255 (en russe).
17. M. C. Mooney, *A theorem on bounded analytic functions,* Pacific J. Math., **43** (1972), 457-462.
18. A. Pełczynski, *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators,* Columbus, Ohio, August 1976, preprint.
19. P. Wojtaszyck, *On projections in spaces of analytic functions with applications,* Warszawa 1977. A paraitre Studia Math.
20. L. Zalcman, *Bounded analytic functions on domains of finite connectivity,* Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), 241-270.

Received February 7, 1978 and in revised form January 31, 1979.

UNIVERSITE DE PARIS SUD
91405 CENTRE D'ORSAY
FRANCE