PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 138, No. 1, 1989

MATRICES DE STOKES ET GROUPE DE GALOIS DES EQUATIONS HYPERGEOMETRIQUES CONFLUENTES GENERALISEES

ANNE DUVAL ET CLAUDE MITSCHI

On s'intéresse à l'équation différentielle:

$$D_{q,p} = (-1)^{q-p} z \prod_{j=1}^{p} (\partial + \mu_j) - \prod_{j=1}^{q} (\partial + \nu_j - 1)$$

où ∂ désigne l'opérateur d'Euler $z\, d/dz$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p, \nu_1, \ldots, \nu_q$ sont des paramètres complexes.

Cette équation est l'équation différentielle la plus générale dont la transformée de Mellin est une équation aux différences du premier ordre, donc "sommable" à l'aide de la fonction Γ. On peut ainsi obtenir pour certaines solutions de $D_{q,p}$ (G-fonctions) des représentations intégrales (formules de Barnes-Mellin).

Lorsque $q \geq p+1$ ($q \geq 2$) (ce qu'on supposera dans tout cet article) le point ∞ est irrégulier et le polygone de Newton de $D_{q,p}$ en ce point a un côté horizontal de longueur p et un côté de pente $1/q-p$ (de "longueur" q). Nous construisons, à l'aide des G-fonctions, dans tout "bon" secteur un système fondamental de solutions de $D_{q,p}$ ayant dans ce secteur un développement asymptotique prescrit. Nous appelerons *matrices de Stokes* les matrices de passage d'un système à un autre sur l'intersection de deux "bons" secteurs consécutifs. Ce n'est pas la définition "traditionnelle": c'est celle qu'adopte J.-P. Ramis et qui semble correspondre à une meilleure normalisation. Cette étude qui utilise à la fois des formules établies par C. S. Meijer en 1946 et les résultats de J.-P. Ramis constitue la lère partie de cet article.

Pour les petites valeurs des entiers p et q on peut ensuite décrire complètement le groupe de Galois différentiel de $D_{q,p}$. Le seul autre point singulier (l'origine) étant régulier on sait que le groupe $\mathrm{Gal}_{C(z)}(D_{q,p})$ s'identifie au groupe local à l'infini et que ce dernier est l'adhérence de Zariski du groupe engendré dans $\mathrm{Gl}(q, \mathrm{C})$ par les trois sous-groupes correspondant à la monodromie formelle, au tore exponentiel et aux matrices de Stokes. Le calcul explicite de ces divers groupes pour $q = 3$ et $p = 1$ ou 2 est l'objet de la 2ème partie. Des calculs de groupe de Galois dans des situations voisines se trouvent chez N. Katz.

1ÈRE PARTIE: MATRICES DE STOKES

0. Notations.

• La lettre σ désigne l'entier positif $q-p$ et on définit ε par $\varepsilon = 1$ si $\sigma \geq 2$, $\varepsilon = 1/2$ si $\sigma = 1$.

• Si x est un réel, $[x]$ désigne sa partie entière.

• Si $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n$ on note:

$$|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$\underline{\alpha}_{\hat{i}} = (\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) \qquad (\text{donc } \underline{\alpha}_{\hat{i}} \in \mathbf{C}^{n-1})$$

$$\lambda + \underline{\alpha} = (\lambda + \alpha_1, \dots, \lambda + \alpha_n) \qquad (\lambda \in \mathbf{C})$$

$$\underline{\alpha}_i^* = (\underline{\alpha} - \alpha_i)_{\hat{i}} \quad (\in \mathbf{C}^{n-1})$$

$$\Gamma(\underline{\alpha}) = \prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i) \qquad (\underline{\alpha} \in (\mathbf{C} - \mathbf{Z}^-)^n)$$

$$\langle \underline{\alpha} \rangle_m = \prod_{j=1}^{n} \langle \alpha_j \rangle_m = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(\alpha_j + 1) \cdots (\alpha_j + m - 1)$$

$$x^{\underline{\alpha}} = (x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}) \qquad (x \in \mathbf{C}).$$

• On réserve les lettres $\underline{\nu}$ et $\underline{\mu}$ aux vecteurs $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_q)$ et $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ associés aux paramètres de l'équation $D_{q,p}$.

• On note ${}_nF_m(\underline{\alpha}; \underline{\beta}|z)$ ($\underline{\alpha} \in \mathbf{C}^n, \underline{\beta} \in (\mathbf{C} - \mathbf{Z}^-)^m$) la série formelle hypergéométrique généralisée

$${}_nF_m(\underline{\alpha}; \underline{\beta}|z) = \sum_{i \geq 0} \frac{\langle \underline{\alpha} \rangle_i}{\langle \underline{\beta} \rangle_i} \frac{z^i}{i!}.$$

• On désigne par $\tilde{\mathbf{C}}$ le revêtement universel de $\mathbf{C} - \{0\}$ (surface de Riemann de $\log z$). Si α_1 et α_2 sont des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2$ on pose:

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2) = \{z \in \tilde{\mathbf{C}} | \arg z \in]\alpha_1, \alpha_2[\}.$$

• Si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $z \in \tilde{\mathbf{C}}$, z^λ désigne l'élément de $\tilde{\mathbf{C}}$ obtenu à partir de la détermination principale de $\log z$. Si $r \in \mathbf{R}$, $ze^{ri\pi}$ désigne l'élément de $\tilde{\mathbf{C}}$ d'argument: $\arg z + r\pi$.

• On dit qu'une fonction $g(z)$ holomorphe dans $\theta(\alpha_1, \alpha_2)$ y admet le *développement asymptotique* (à l'infini) $e^{q(z)} z^\lambda \chi(z)$, où $q(z) \in \mathbf{C}[z^{1/n}]$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\chi(z) \in \mathbf{C}[[z^{-1/n}]]$ ($n \in \mathbf{N}$) si $\chi(t^n)$ est le développement asymptotique de la fonction $e^{-q(t^n)} t^{-n\lambda} g(t^n)$ dans $\theta(\frac{1}{n}\alpha_1, \frac{1}{n}\alpha_2)$.

• On note $\mathbb{I}_n$ la matrice unité d'ordre n (on supprime l'indice lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) et $\mathbb{E}_{i,j}$ la matrice dont l'unique élément non nul est situé à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne et vaut 1.

1. ***G*-fonctions solutions de $D_{q,p}$ et leurs développements asymptotiques.** La transformée de Mellin de $D_{q,p}$ est l'opérateur aux différences d'ordre 1:

$$\Delta_{q,p} = \langle s + \underline{\nu} \rangle_1 \tau - (-1)^{q-p} \langle s + \underline{\mu} \rangle_1$$

où τ désigne l'opérateur de translation unité: $\tau f(s) = f(s+1)$.

Si $\mathscr{M}_e(\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ à croissance verticale au plus exponentielle d'ordre 1, la solution générale de $\Delta_{q,p}$ dans $\mathscr{M}_e(\mathbf{C})$ s'écrit (Ramis **[Ra3]**):

$$\frac{\Gamma(\underline{\mu}+s)}{\Gamma(\underline{\nu}+s)}e^{i\pi(q-p)s}\pi(s) \quad \text{où } \pi(s)\in\mathbf{C}(e^{2i\pi s}).$$

La fonction $\Gamma(\lambda+s)\Gamma(1-\lambda-s)e^{i\pi s}$ ($\lambda\in\mathbf{C}$) est une fraction rationnelle en $e^{2i\pi s}$: ceci permet de "faire passer" du numérateur au dénominateur (ou vice-versa) autant de facteurs Γ que l'on veut dans la formule précédente.

Si, pour k fixé, $\nu_j-\mu_k$ ($j=1,\dots,q$) n'est jamais entier positif, il est possible de tracer dans le plan complexe un contour γ_k joignant le point $-i\infty$ au point $i\infty$ en laissant à sa droite les points $-\nu_j+n$ ($j=1,\dots,q$, $n\in\mathbf{N}$) et à sa gauche les points $-\mu_k-n$ ($n\in\mathbf{N}$).

Ces remarques permettent d'établir les propositions suivantes (Meijer **[Me]**, Luke **[L]**):

PROPOSITION 1.1. *Pour $k=1,\dots,p$, si $\nu_j-\mu_k$ ($j=1,\dots,q$) n'est jamais entier positif, alors la fonction:*

$$G_k(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k}\frac{\Gamma(1-\underline{\nu}-s)\Gamma(\mu_k+s)}{\Gamma((1-\underline{\mu}-s)_{\widehat{k}})}e^{i\pi s}z^s\,ds$$

est une solution de $D_{q,p}$ holomorphe dans $\theta(-2\pi-\sigma\pi/2,\sigma\pi/2)$ et admettant quand $z\to\infty$ dans ce secteur le développement asymptotique:

$$e^{-i\pi\mu_k}\frac{\Gamma(1+\mu_k-\underline{\nu})}{\Gamma(1+\mu_k-\underline{\mu})}z^{-\mu_k}{}_qF_{p-1}\left(1+\mu_k-\underline{\nu};1-\underline{\mu}_k^*\,\middle|\,\frac{1}{z}\right).$$

PROPOSITION 1.2. *Soit γ un contour du plan complexe joignant $-i\infty$ à $i\infty$ en laissant à sa droite les points $-\nu_j+n$ ($j=1,\dots,q;n\in\mathbf{N}$). La fonction:*

$$G_0(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\Gamma(1-\underline{\nu}-s)}{\Gamma(1-\underline{\mu}-s)}z^s\,ds$$

est une solution de $D_{q,p}$ holomorphe dans $\theta(-\sigma\pi/2,\sigma\pi/2)$.

PROPOSITION 1.3. *Le prolongement analytique de G_0 (que l'on note encore G_0) au secteur $\theta(-(\sigma+\varepsilon)\pi,(\sigma+\varepsilon)\pi)$ y admet quand $z\to\infty$ le développement asymptotique:*

$$e^{-\sigma z^{1/\sigma}}z^{\lambda/\sigma}\Theta(z),$$

où $\lambda=\frac{1}{2}(\sigma+1)+|\underline{\mu}|-|\underline{\nu}|$ et Θ est une série formelle en $z^{-1/\sigma}$

dont le terme constant est: $(2\pi)^{(\sigma-1)/2}\sigma^{-1/2}$ *(les autres coefficients peuvent se calculer par récurrence).*

PROPOSITION 1.4. *Pour* $z \in \theta(-\sigma\pi/2, \sigma\pi/2)$ *et* $k = 1, \dots, p$ *tel que* $\mu_k - \nu_j \notin \mathbf{Z}$ $(j = 1, \dots, q)$. *On a:*

$$(\mathrm{I}_k) \quad e^{i\pi\mu_k} G_k(z) - e^{-i\pi\mu_k} G_k(ze^{-2i\pi}) = 2i\pi G_0(z).$$

PROPOSITION 1.5. *Soit m un entier tel que:* $\varepsilon + \sigma/2 \leq 2m \leq 2 - \varepsilon + 3\sigma/2$, *et* $z \in \theta((\sigma - \varepsilon)\pi, (\sigma + \varepsilon)\pi)$. *On a:*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}_m)\colon G_0(z) &= \sum_{h=1}^{\sigma-m} A_h G_0(ze^{-2i\pi h}) + \sum_{h=0}^{m-1} B_h G_0(ze^{-2i\pi(\sigma-h)}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p} C_k G_k(ze^{-2i\pi(\sigma-m+1)}) \\
\textit{où: } A_h &= -\frac{d^h}{dx^h}\left(\frac{\langle 1 - xe^{-2i\pi\underline{\nu}}\rangle_1}{\langle 1 - xe^{-2i\pi\underline{\mu}}\rangle_1}\right)\Bigg|_{x=0}, \\
B_h &= e^{2i\pi\lambda}\frac{d^h}{dx^h}\left(\frac{\langle 1 - xe^{2i\pi\underline{\nu}}\rangle_1}{\langle 1 - xe^{2i\pi\underline{\mu}}\rangle_1}\right)\Bigg|_{x=0} \\
\textit{et } C_k &= (2i\pi)^\sigma i e^{i\pi(\lambda-(\sigma-2m+1)\mu_k)} \frac{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\mu})\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\nu})}.
\end{aligned}$$

REMARQUES. 1. Tous ces résultats sont des cas particuliers de ceux établis par Meijer **[Me]**. Ils se démontrent en utilisant l'expression des fonctions G_k sur la base "naturelle" de solutions entières de l'équation différentielle obtenue en appliquant la méthode de Fuchs en 0.

2. La Proposition 1.5 est valable sans hypothèse sur $\nu_j - \mu_k$ car, lorsque cette quantité est un entier, C_k est nul et la formule obtenue reste valable sans qu'il soit nécessaire de définir G_k.

2. Solutions formelles. Monodromie formelle. Un calcul classique permet d'établir la

PROPOSITION 2.1. *Si pour* $i, j = 1, \dots, q$, $\mu_j - \mu_i$ *n'est jamais entier, une base de solutions formelles de* $D_{q,p}$ *(à l'infini) est constituée des* *fonctions*:

$$\begin{cases} \Phi_k(z) = z^{-\mu_k} {}_qF_{p-1}\left(1+\mu_k-\underline{\nu}; 1-\underline{\mu}_k^* \middle| \frac{1}{z}\right), \qquad k = 1, \ldots, p, \\ \Theta_j(z) = e^{-\sigma\zeta^j z^{1/\sigma}} z^{\lambda/\sigma}\Theta(ze^{2i\pi j}) \\ \qquad \textit{où } \zeta = e^{2i\pi/\sigma} \textit{ et } j \textit{ appartient à l'ensemble} \\ \qquad \textit{ordonné } \mathbf{I}_\sigma \textit{ défini par}: \\ \qquad \mathbf{I}_\sigma = \mathbf{Z} \cap [1-\sigma/2, \sigma/2] \quad \textit{si } \sigma \textit{ est pair}, \\ \qquad \mathbf{I}_\sigma = \mathbf{Z} \cap [-(\sigma-1)/2, (\sigma-1)/2] \quad \textit{si } \sigma \textit{ est impair}. \end{cases}$$

REMARQUE. S'il existe j tel que $\mu_k - \nu_j$ est un entier positif, alors $z^{\mu_k}\Phi_k(z)$ est un polynôme en $1/z$. Dans le cas contraire, c'est une série divergente pour tout $z \neq \infty$. L'hypothèse $\mu_i - \mu_j$ non entier est, elle, essentielle et sera supposée réalisée dans toute la suite.

On utilise la notation $\Sigma(z)$ pour désigner la base de la proposition précédente écrite dans l'ordre suivant:

$$\Sigma(z) = (\Phi_k(z),\ k = 1, \ldots, p; \Theta_j(z),\ j \in \mathbf{I}_\sigma).$$

La *matrice de monodromie formelle* dans cette base est par définition la matrice $\mathbb{M}_\infty$ telle que

$$\Sigma(ze^{2i\pi}) = \Sigma(z)\mathbb{M}_\infty.$$

Une conséquence immédiate de la proposition précédente est la

PROPOSITION 2.2. *La matrice $\mathbb{M}_\infty$ est donnée par les formules suivantes*:

(1) *si* $\sigma = 1$, $\quad \mathbb{M}_\infty = \operatorname{diag}\{e^{-2i\pi\underline{\mu}}, e^{2i\pi\lambda}\}$

(2) *si* $\sigma \geq 2$, $\quad \mathbb{M}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$

où $\mathbb{A} = \operatorname{diag}\{e^{-2i\pi\underline{\mu}}\}$ (*matrice carrée d'ordre* p) *et*

$$\mathbb{R} = e^{2i\pi\lambda/\sigma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsque $\sigma \geq 2$, il est plus commode (et plus conforme à la tradition) d'étudier le phénomène de Stokes après ramification, c'est-à-dire dans le "plan" des t où t est lié à z par la relation:

$$t = z^{1/\sigma}.$$

Dans le plan des t (ou plutôt dans son revêtement universel) une base de solutions formelles est donnée par:

$$\underline{\Sigma}(t) = (\underline{\Phi}_k(t), k = 1, \dots, p; \underline{\Theta}_j(t), j \in \mathbf{I}_\sigma)$$

$$\text{où } \underline{\Phi}_k(t) = t^{-\sigma\mu_k} {}_qF_{p-1}(1 + \mu_k - \underline{\nu}; 1 - \underline{\mu}_k^* | t^{-\sigma})$$

$$\text{et } \underline{\Theta}_j(t) = e^{-\sigma\zeta^j t} t^\lambda \underline{\Theta}(\zeta^j t) \quad \text{où } \underline{\Theta}(t) = \Theta(t^\sigma) \in \mathbf{C}[[1/t]].$$

La relation $\zeta^\sigma = e^{2i\pi}$ et la définition de $\mathbb{M}_\infty$ donnent la

PROPOSITION 2.3. *Cette base vérifie la relation*:

$$\underline{\Sigma}(\zeta t) = \underline{\Sigma}(t)\mathbb{M}_\infty.$$

Pour homogénéiser les notations on remplace aussi z par t lorsque $\sigma = 1$.

On note $\underline{D}_{q,p}$ l'équation obtenue après changement de variable.

Nous aurons besoin d'une description du *tore exponentiel* $\mathscr{E}$ (Ramis [**Ra2**]). En utilisant le Lemme 4.1 de [**Ra2**] on montre:

LEMME 2.4. *Soit r le rang sur $\mathbf{Z}$ du sous-groupe additif de $\mathbf{C}$ engendré par les racines σ-ièmes de l'unité. Alors $\mathscr{E}$ est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^r$ et est constitué de matrices de la forme*:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{D} \end{bmatrix} \quad \text{où } \mathbb{D} \text{ est une matrice diagonale.}$$

3. Définition des matrices de Stokes. Les secteurs de décroissance de l'exponentielle $\exp[-\sigma\zeta^j t]$ sont déterminés par la condition

$$\cos\left(\arg t + \frac{2j\pi}{\sigma}\right) > 0.$$

Les bords de ces secteurs constituent une première famille de *lignes de Stokes*, les demi-droites:

$$\arg t \in \left\{-2j\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + n\pi \middle| n \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{I}_\sigma\right\}.$$

Si $\sigma \geq 2$, les secteurs de décroissance des exponentielles $\exp[\sigma(\zeta^j - \zeta^h)t]$ $(h \neq j)$ sont déterminés par la condition:

$$\sin\left(\arg t + \frac{(j+h)\pi}{\sigma}\right) \sin\frac{(j-h)\pi}{\sigma} > 0.$$

Les bords de ces secteurs donnent une deuxième famille de lignes de Stokes, les demi-droites

$$\arg t \in \left\{-\frac{(k+j)\pi}{\sigma} + n\pi \middle| n \in \mathbf{Z}, k, j \in \mathbf{I}_\sigma, k \neq j\right\}.$$

Cette deuxième famille contient la première lorsque σ est pair.

Proposition 3.1. *L'ouverture maximum d'un secteur ouvert ne contenant aucune ligne de Stokes est*

$$\begin{cases} \pi & \text{si } \sigma = 1 \text{ ou } 2 \\ \dfrac{\pi}{2\sigma} & \text{si } \sigma \text{ est impair } \geq 3 \\ \dfrac{\pi}{\sigma} & \text{si } \sigma \text{ est pair } \geq 4. \end{cases}$$

Définition 3.2. *Si $\sigma = 1$ ou 2 on note $N_\sigma = \mathbf{N} \cap [0, 2]$ et pour $n \in N_\sigma$ on pose:*

$$\theta_n = \theta\left(-\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right).$$

Si σ est impair ≥ 3 on note $N_\sigma = \mathbf{N} \cap [0, 4\sigma]$ et pour $n \in N_\sigma$ on pose:

$$\theta_n = \theta\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2\sigma}, \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2\sigma}\right).$$

Si σ est pair ≥ 4 on note $N_\sigma = \mathbf{N} \cap [0, 2\sigma]$ et pour $n \in N_\sigma$ on pose:

$$\theta_n = \theta\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(n-1)\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{\sigma}\right).$$

On note N_σ^* l'ensemble N_σ privé de son élément maximal (de sorte que si n appartient à N_σ^*, $n+1$ appartient à N_σ).

Proposition 3.3 (*Ramis* **[Ra2]** *Théorème* 2.1). *Pour chaque secteur θ_n ($n \in N_\sigma$) il existe une unique base de solutions $\Sigma_n(t)$ de $\underline{D}_{q,p}$ qui soit dans θ_n asymptotique (à l'infini) à $\underline{\Sigma}(t)$.*

Cette solution correspond à une "resommation" de $\underline{\Sigma}(t)$ dans une direction appartenant à l'intervalle:

$$\begin{cases} \theta\left(\dfrac{(n-1)\pi}{2\sigma}, \dfrac{n\pi}{2\sigma}\right) & \text{si } \sigma \text{ est impair } \geq 3 \\ \theta\left(\dfrac{(n-1)\pi}{\sigma}, \dfrac{n\pi}{\sigma}\right) & \text{si } \sigma \text{ est pair } \geq 4 \\ \theta((n-1)\pi, n\pi) & \text{si } \sigma = 1 \text{ ou } 2. \end{cases}$$

Definition 3.4. *Si $n \in N_\sigma^*$, la matrice $\mathbb{S}_n$ définie par l'égalité:*

$$\Sigma_n(t) = \Sigma_{n+1}(t)\mathbb{S}_n, \qquad t \in \theta_n \cap \theta_{n+1}$$

est appelée <u>matrice de Stokes</u> correspondant au franchissement de la ligne singulière:

$$\begin{cases} \dfrac{n\pi}{2\sigma} & \text{si } \sigma \text{ est impair } \geq 3 \\ \dfrac{n\pi}{\sigma} & \text{si } \sigma \text{ est pair } \geq 4 \\ n\pi & \text{si } \sigma = 1 \text{ ou } 2. \end{cases}$$

LEMME 3.5. *Si n et n' appartiennent à N_σ ($\sigma \geq 3$) et vérifient $n'-n =$ 4 si σ est pair, 2 si σ est impair, alors:* $\Sigma_{n'}(\zeta t) = \Sigma_n(t)\mathsf{M}_\infty$.

Démonstration. Si t appartient à θ_n, ζt appartient à $\theta_{n'}$ et $\Sigma_{n'}(\zeta t)(\mathsf{M}_\infty)^{-1}$ est une base de solutions de $\underline{D}_{q,p}$ dans θ_n qui y admet pour développement asymptotique $\underline{\Sigma}(t)$ d'après la Proposition 2.3. L'unicité affirmée dans la Proposition 3.3 implique alors l'égalité voulue.

La proposition suivante en découle aisément.

PROPOSITION 3.6. (a) *Pour $\sigma = 2$, les matrices $\mathbb{S}_0$, $\mathbb{S}_1$ et M_∞ vérifient la relation:*

$$\mathbb{S}_1 = \mathsf{M}_\infty^{-1}\mathbb{S}_0\mathsf{M}_\infty.$$

(b) *Pour $\sigma \geq 3$ et $n \in N_\sigma^*$, si m et r désignent le quotient et le reste de la division de n par 4 si σ est impair, 2 si σ est pair, alors:*

$$\mathbb{S}_n = \mathsf{M}_\infty^{-m}\mathbb{S}_r\mathsf{M}_\infty^{m}.$$

Cette proposition réduit le calcul des matrices de Stokes à celui de 2 ou 4 matrices suivant la parité de σ (une seule si $\sigma = 2$, 2 (et non 4), si $\sigma = 1$). Pour mettre en évidence la ligne singulière dont le franchissement est associé à chacune de ces matrices on adopte les notations suivantes: ($\sigma \geq 3$)

$$\begin{cases} \text{si } \sigma \text{ est impair: } \mathbb{S}_0, \mathbb{S}_{\pi/2\sigma}, \mathbb{S}_{\pi/\sigma} \text{ et } \mathbb{S}_{3\pi/2\sigma}, \\ \text{si } \sigma \text{ est pair: } \mathbb{S}_0 \text{ et } \mathbb{S}_{\pi/\sigma}. \end{cases}$$

4. Resommation de $\underline{\Sigma}(t)$. Les deux résultats suivants sont des cas particuliers des Théorèmes 1 et 5 de [L] p. 179.

LEMME 4.1. (a) *Pour $k = 1, \ldots, p$, si $\mu_k - \nu_j$ n'est pas entier positif pour $j = 1, \ldots, q$, la fonction:*

$$U_k(t) = e^{i\pi\mu_k}\frac{\Gamma(1+\mu_k-\underline{\mu})}{\Gamma(1+\mu_k-\underline{\nu})}G_k(t^\sigma)$$

est asymptotique à $\underline{\Phi}_k(t)$ dans le secteur θ_0.

(b) *Dans $\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4$ si σ est impair, $\theta_1 \cup \theta_2$ si σ est pair, la fonction:*

$$e^{-2i\pi\mu_k}U_k(t\zeta^{-1}) \text{ est asymptotique à } \underline{\Phi}_k(t).$$

REMARQUE. Si $\mu_k - \nu_j \in \mathbf{N}$, la fonction $\underline{\Phi}_k$ est sa propre somme: on la notera encore U_k par souci d'homogénéité.

LEMME 4.2. *La fonction* $V(t) = G_0(t^\sigma)$ *est asymptotique à* $\underline{\Theta}_0(t)$ *dans* $\theta(-\pi/2 - \varepsilon\pi/\sigma, \pi + \varepsilon\pi/\sigma)$.

La transposition au plan des t de la Proposition 1.4 donne le

LEMME 4.3. *Pour* $k = 1, \dots, p$ *et* $t \in \theta(-\pi/2, \pi/2)$ *la relation suivante est vérifiée*:

$$(\underline{I}_k):\ U_k(t) - e^{-2i\pi\mu_k} U_k(t\zeta^{-1}) = 2i\pi \frac{\Gamma(1+\mu_k - \underline{\mu})}{\Gamma(1+\mu_k - \underline{\nu})} V(t).$$

LEMME 4.4. *Si* $t \in \theta(\pi - \varepsilon\pi/\sigma, \pi + \varepsilon\pi/\sigma)$ *on a, suivant la parité de* σ, *l'une des relations*:

$$(\underline{\mathrm{II}}_{\mathrm{imp.}}):\ V(t) - e^{2i\pi\lambda} V(te^{-2i\pi}) = \sum_{h=1}^{(\sigma-1)/2} [A_h V(t\zeta^{-h}) + B_h V(te^{-2i\pi}\zeta^h)] + \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{-(\sigma+1)/2})$$

$$(\underline{\mathrm{II}}_{\mathrm{pair}}) V(t) - e^{2i\pi\lambda} V(te^{-2i\pi}) = \sum_{h=1}^{\sigma/2-1} [A_h V(t\zeta^{-h}) + B_h V(te^{-2i\pi}\zeta^h)] + A_{\sigma/2} V(t\zeta^{-\sigma/2}) + \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{-1-\sigma/2})$$

où $C_{k,\sigma} = (2\pi)^\sigma i e^{i\pi(\lambda - \alpha_\sigma \mu_k)} \dfrac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)}$ *avec* $\alpha_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } \sigma \text{ est pair.} \end{cases}$

Démonstration. On applique la Proposition 1.5 en choisissant pour m: $(\sigma+1)/2$ si σ est impair, $\sigma/2$ si σ est pair.

PROPOSITION 4.5. *Si* $\sigma = 1$ *et* $n \in \{0, 1, 2\}$, $\Sigma_n(t) = (X_{n,k}(t), k = 1, \dots, q-1; Y_n(t))$ *où*:

$$X_{0,k}(t) = U_k(t); \quad X_{n,k}(t) = e^{-2i\pi\mu_k} U_k(te^{-2i\pi}) \quad k = 1, \dots, q-1,\ n = 1, 2;$$

$$Y_n(t) = V(t), \quad n = 0, 1; \qquad Y_2(t) = e^{2i\pi\lambda} V(te^{-2i\pi}).$$

PROPOSITION 4.6. *Si* $\sigma = 2$ *et* $n \in \{0, 1\}$,

$\Sigma_n(t) = (X_{n,k}(t), k = 1, \dots, p; Y_{n,j}(t), j \in \mathbf{I}_2 = \{0, 1\})$ *avec*:

$X_{0,k}(t) = U_k(t); \quad X_{1,k}(t) = e^{-2i\pi\mu_k} U_k(te^{-2i\pi}), \qquad k = 1, \dots, p,$

$Y_{n,0}(t) = V(t),$

$Y_{0,1}(t) = e^{-i\pi\lambda} V(te^{i\pi}); \quad Y_{1,1}(t) = e^{i\pi\lambda} V(te^{-i\pi}).$

PROPOSITION 4.7. *Si σ est impair ≥ 3 et $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$,*

$$\Sigma_n(t) = (X_{n,k}(t), k = 1, \dots, p; Y_{n,j}(t), j \in \mathbf{I}_\sigma) \text{ avec:}$$

(i) $X_{0,k}(t) = U_k(t)$; $\quad X_{n,k}(t) = e^{-2i\pi\mu_k} U_k(t\zeta^{-1})$ *si* $n \geq 1$.

(ii)(a) *si* $-\sigma - n - 1 \leq 4j \leq \sigma - n + 2$, $Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j} V(t\zeta^j)$

(b) *si* $\sigma - n + 3 \leq 4j \leq 2(\sigma - 1)$

si $t \in \theta\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{(n-1)\pi}{2\sigma}, \pi - \dfrac{(2j-1)\pi}{\sigma}\right)$,

$$\begin{aligned} Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j} \Bigg[& V(t\zeta^j) - \sum_{h=1}^{M_{n,j}} A_h V(t\zeta^{j-h}) \\ & - \delta_n^4 \delta^j_{(\sigma-1)/2} B_{(\sigma-1)/2} V(t\zeta^{-1}) \\ & - \delta^n_{3,4} \delta^j_{(\sigma-1)/2} \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{-1}) \Bigg], \end{aligned}$$

et si $t \in \theta\left(\pi - \dfrac{(2j+1)\pi}{\sigma}, \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{n\pi}{2\sigma}\right)$,

$$\begin{aligned} Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j} \Bigg[& e^{2i\pi\lambda} V(te^{-2i\pi}\zeta^j) + \sum_{h=M_{n,j}+1}^{(\sigma-1)/2} A_h V(t\zeta^{j-h}) \\ & + \sum_{h=1}^{(\sigma-1)/2-1} B_h V(te^{-2i\pi}\zeta^{j+h}) \\ & + (1 - \delta_n^4 \delta^j_{(\sigma-1)/2}) B_{(\sigma-1)/2} V(t\zeta^{j-(\sigma+1)/2}) \\ & + (1 - \delta^n_{3,4} \delta^j_{(\sigma-1)/2}) \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{j-(\sigma+1)/2}) \Bigg], \end{aligned}$$

où

$\cdot\delta^\alpha_\beta$ *est le symbole de Kronecker*

$$\cdot\delta^\alpha_{\beta,\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\cdot M_{n,j} = \begin{cases} 2j - \dfrac{\sigma+1}{2} \text{ si } n = 0 \text{ ou } 1, \\ 2j - \dfrac{\sigma-1}{2} \text{ si } n = 2 \text{ ou } 3 \text{ ou si } n = 4 \text{ et } j = \dfrac{\sigma-1}{2}, \\ 2j - \dfrac{\sigma-1}{2} + 1 \text{ si } n = 4 \text{ et } j \neq \dfrac{\sigma-1}{2}. \end{cases}$$

(c) *si* $\underline{-2(\sigma-1) \leq 4j \leq -\sigma-n-2}$

$$si\ t \in \theta\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{2\sigma}, -\pi-\frac{(2j-1)\pi}{\sigma}\right),$$

$$Y_{n,j}(t) = e^{-2i\pi\lambda}\zeta^{-\lambda j}\left[V(te^{2i\pi}\zeta^j) - \sum_{h=N_{n,j}+1}^{(\sigma-1)/2} B_h V(t\zeta^{j+h}) - \sum_{h=1}^{(\sigma-1)/2} A_h V(te^{2i\pi}\zeta^{j-h}) - \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{j+(\sigma-1)/2})\right],$$

et si $t \in \theta\left(-\pi-\frac{2(j+1)\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2\sigma}\right)$,

$$Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j}\left[V(t\zeta^j) + \sum_{h=1}^{N_{n,j}} e^{-2i\pi\lambda} B_h V(t\zeta^{j+h})\right],$$

$$\text{où } N_{n,j} = \begin{cases} -2j - \dfrac{\sigma+1}{2} & si\ n = 0\ ou\ 1, \\ -2j - \dfrac{\sigma+1}{2} - 1 & si\ n = 2\ ou\ 3, \\ -2j - \dfrac{\sigma+1}{2} - 2 & si\ n = 4. \end{cases}$$

Démonstration. La fonction $\zeta^{-\lambda j}V(t\zeta^j)$ est utilisée lorsqu'elle est définie dans tout l'intervalle considéré (cas(a)). Elle est modifiée par des fonctions plates devant elle (ou devant la fonction décalée de 2π) de manière à assurer la concordance dans l'intervalle commun (c'est ce qu'assure la formule ($\underline{\text{II}}_{\text{imp}}$) appliquée à $V(t\zeta^j)$ dans le cas (b), à $V(te^{2i\pi}\zeta^j)$ dans le cas (c).

Sur le même principe on établit la

PROPOSITION 4.8. *Si σ est pair ≥ 4 et $n \in \{0, 1, 2\}$,*

$$\Sigma_n(t) = (X_{n,k}(t), k = 1, \dots, p; Y_{n,j}(t), j \in \mathbf{I}_\sigma) \text{ avec:}$$

(i) $X_{0,k}(t) = U_k(t); X_{n,k}(t) = e^{-2i\pi\mu_k}U_k(t\zeta^{-1})$ *si* $n = 1$ *ou* 2.

(ii)(a) *si* $\underline{-\sigma-2n \leq 4j \leq \sigma-2n+2}$, $Y_{n,j}(t) = \zeta_{-\lambda j}V(t\zeta^j)$.

(b) *si* $\underline{\sigma-2n+3 \leq 4j \leq 2\sigma}$,

$$si\ t \in \theta\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{\sigma}, \pi - \frac{(2j-1)\pi}{\sigma}\right),$$

$$Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j}\left[V(t\zeta^j) - \sum_{h=1}^{M_{n,j}} A_h V(t\zeta^{j-h}) - \delta_n^2 \delta_{\sigma/2}^j B_{\sigma/2-1} V(t\zeta^{-1}) \right.$$
$$\left. - \delta_{1,2}^n \delta_{\sigma/2}^j \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{-1})\right],$$

$$et\ si\ t \in \theta\left(\pi - \frac{(2j+1)\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{\sigma}\right),$$

$$Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j}\left[e^{2i\pi\lambda} V(te^{-2i\pi}\zeta^j) + \sum_{h=M_{n,j}+1}^{\sigma/2} A_h V(t\zeta^{j-h}) \right.$$
$$+ \sum_{h=1}^{\sigma/2-2} B_h V(te^{-2i\pi}\zeta^{j+h})$$
$$+ (1-\delta_2^n \delta_{\sigma/2}^j) B_{\sigma/2-1} V(t\zeta^{j-\sigma/2-1})$$
$$\left. + (1-\delta_{1,2}^n \delta_{\sigma/2}^j) \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{j-\sigma/2-1})\right],$$

$$où\ M_{n,j} = \begin{cases} 2j+n-\frac{\sigma}{2}-1 & si\ n \neq 2\ ou\ j \neq \frac{\sigma}{2}, \\ \frac{\sigma}{2} & si\ n = 2\ et\ j = \frac{\sigma}{2}. \end{cases}$$

(c) $si\ \underline{-2(\sigma-2) \leq 4j \leq -\sigma - 2n - 1},$

$$si\ t \in \theta\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{\sigma}, -\pi - \frac{(2j-1)\pi}{\sigma}\right),$$

$$Y_{n,j}(t) = e^{-2i\pi\lambda}\zeta^{-\lambda j}\left[V(te^{2i\pi}\zeta^j) - \sum_{h=N_{n,j}+1}^{\sigma/2-1} B_h V(t\zeta^{j+h}) \right.$$
$$- \sum_{h=1}^{\sigma/2} A_h V(te^{2i\pi}\zeta^{j-h})$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{p} C_{k,\sigma} U_k(t\zeta^{j+\sigma/2-1})\right]$$

et si $t \in \theta\left(-\pi - \frac{2(j+1)\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{\sigma}\right)$

$$Y_{n,j}(t) = \zeta^{-\lambda j}\left[V(t\zeta^j) + \sum_{h=1}^{N_{n,j}} e^{-2i\pi\lambda} B_h V(t\zeta^{j+h})\right],$$

$$\text{où } N_{n,j} = -2j - n - \sigma/2.$$

REMARQUE. Pour calculer, dans chaque cas, la dernière somme, on peut aussi utiliser la formule du Lemme 3.5: le calcul est moins agréable.

5. Calcul des matrices de Stokes. Les résultats précédents montrent que la forme des matrices de Stokes dépend non seulement de la parité de σ mais aussi de sa position par rapport aux multiples de 4. Toutes ces matrices se calculent suivant le même principe: on traitera un exemple après avoir dressé la liste des résultats.

THÉORÈME 5.1 (a) ($\sigma = 1$). *Si* $q = p + 1$,

$$\mathbb{S}_0 = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{q-1} 2i\pi \frac{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\mu})}{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\nu})} \mathbb{E}_{q,k}$$

$$\mathbb{S}_\pi = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{q-1} 2i\pi e^{i\pi(\lambda + \mu_k)} \frac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)} \mathbb{E}_{k,q}.$$

THÉORÈME 5.1 (b) ($\sigma = 2$). *Si* $q = p + 2$,

$$\mathbb{S}_0 = \mathbb{I} + A_1 \mathbb{E}_{q-1,q} + \sum_{k=1}^{q-2} 4i\pi^2 \frac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)} \mathbb{E}_{k,q}$$

$$+ \sum_{k=1}^{q-2} 2i\pi \frac{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\mu})}{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\nu})} \mathbb{E}_{q-1,k}.$$

THÉORÈME 5.2 (a) ($\sigma \equiv 0 \bmod 4$). *Si* σ (≥ 4) *est congru à* 0 *modulo* 4, *alors*

$$\mathbb{S}_0 = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{p} (2\pi)^\sigma i \frac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)} \mathbb{E}_{k,q} + \sum_{k=1}^{p} 2i\pi \frac{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\mu})}{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\nu})} \mathbb{E}_{\sigma/2+p,k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\sigma/4} \zeta^{-2\lambda k} A_{2k} \mathbb{E}_{3\sigma/4+p-k,3\sigma/4+p+k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\sigma/4-1} e^{-2i\pi\lambda} \zeta^{2\lambda k} B_{2k} \mathbb{E}_{\sigma/4+p+k,\sigma/4+p-k},$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_{\pi/\sigma} = \mathbb{I} &+ \sum_{k=1}^{\sigma/4} \zeta^{-\lambda(2k-1)} A_{2k-1} \mathbb{E}_{3\sigma/4+p-k,3\sigma/4+p+k-1} \\
&+ \sum_{k=1}^{\sigma/4-1} e^{-2i\pi\lambda} \zeta^{\lambda(2k-1)} B_{2k-1} \mathbb{E}_{\sigma/4+p+k-1,\sigma/4+p-k} \\
&+ e^{-i\lambda\pi} \zeta^{-\lambda} B_{\sigma/2-1} \mathbb{E}_{\sigma/2+p-1,q}.
\end{aligned}
$$

THÉORÈME 5.2 (b) ($\sigma \equiv 2 \bmod 4$). *Si σ est congru à 2 modulo 4 alors*:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_0 = \mathbb{I} &+ \sum_{k=1}^{p} (2\pi)^{\sigma} i \frac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)} \mathbb{E}_{k,q} + \sum_{k=1}^{p} 2i\pi \frac{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\mu})}{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\nu})} \mathbb{E}_{\sigma/2+p,k} \\
&+ \sum_{k=1}^{(\sigma+2)/4} \zeta^{-\lambda(2k-1)} A_{2k-1} \mathbb{E}_{3(\sigma+2)/4+p-k-1,3(\sigma-2)/4+p+k+1} \\
&+ \sum_{k=1}^{(\sigma-2)/4} e^{-2i\pi\lambda} \zeta^{\lambda(2k-1)} B_{2k-1} \mathbb{E}_{(\sigma-2)/4+p+k,(\sigma+2)/4+p-k}
\end{aligned}
$$

et:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_{\pi/\sigma} = \mathbb{I} &+ \sum_{k=1}^{(\sigma-2)/4} \zeta^{-2\lambda k} A_{2k} \mathbb{E}_{3(\sigma-2)/4+p-k+1,3(\sigma-2)/4+p+k+1} \\
&+ e^{-i\pi\lambda} \zeta^{-\lambda} B_{\sigma/2-1} \mathbb{E}_{\sigma/2+p-1,q} \\
&+ \sum_{k=1}^{(\sigma-2)/4-1} e^{-2i\pi\lambda} \zeta^{2\lambda k} B_{2k} \mathbb{E}_{(\sigma-2)/4+p+k,(\sigma-2)/4+p-k}.
\end{aligned}
$$

THÉORÈME 5.3 (*σ impair*). *Si σ est impair ($\sigma \geq 3$) alors*:

(i)

$$
\mathbb{S}_0 = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{p} 2i\pi \frac{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\mu})}{\Gamma(1 + \mu_k - \underline{\nu})} \mathbb{E}_{(p+q+1)/2,k},
$$

(ii)

$$
\mathbb{S}_{\pi/\sigma} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{p} (2\pi)^{\sigma_1} e^{i\pi(\mu_k + (\lambda/\sigma))} \frac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu} - \mu_k)} \mathbb{E}_{k,q}.
$$

Si σ est congru à 1 *modulo* 4, *alors*:
(iii)(a)

$$\mathbb{S}_{\pi/2\sigma} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{(\sigma-1)/4} \zeta^{-2\lambda k} A_{2k} \mathbb{E}_{3(\sigma-1)/4+p-k+1,3(\sigma-1)/4+p+k+1} + \sum_{k=1}^{(\sigma-1)/4} e^{-2i\pi\lambda}\zeta^{\lambda(2k-1)} B_{2k-1} \mathbb{E}_{(\sigma-1)/4+p+k,(\sigma-1)/4+p-k+1}.$$

(iv)(a)

$$\mathbb{S}_{3\pi/2\sigma} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{(\sigma-1)/4} \zeta^{-\lambda(2k-1)} A_{2k-1} \mathbb{E}_{3(\sigma-1)/4+p-k+1,3(\sigma-1)/4+p+k} + \sum_{k=1}^{(\sigma-1)/4-1} e^{-2i\pi\lambda}\zeta^{2\lambda k} B_{2k} \mathbb{E}_{(\sigma-1)/4+p+k,(\sigma-1)/4+p-k} + e^{-i\lambda\pi}\zeta^{-\lambda/2} B_{(\sigma-1)/2} \mathbb{E}_{(\sigma-1)/2+p,q}.$$

Si σ est congru à 3 *modulo* 4 *alors*:
(iii)(b)

$$\mathbb{S}_{\pi/2\sigma} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{(\sigma+1)/4} \zeta^{-\lambda(2k-1)} A_{2k-1} \mathbb{E}_{3(\sigma+1)/4+p-k,3(\sigma+1)/4+p+k-1} + \sum_{k=1}^{(\sigma+1)/4-1} e^{-2i\pi\lambda}\zeta^{2\lambda k} B_{2k} \mathbb{E}_{(\sigma+1)/4+p+k,(\sigma+1)/4+p-k}.$$

(iv)(b)

$$\mathbb{S}_{3\pi/2\sigma} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{(\sigma+1)/4-1} \zeta^{-2\lambda k} A_{2k} \mathbb{E}_{3(\sigma+1)/4+p-k-1,3(\sigma+1)/4+p+k-1} + \sum_{k=1}^{(\sigma+1)/4-1} e^{-2i\pi\lambda}\zeta^{\lambda(2k-1)} B_{2k-1} \mathbb{E}_{(\sigma+1)/4+p+k-1,(\sigma+1)/4+p-k} + e^{-i\lambda\pi}\zeta^{-\lambda/2} B_{(\sigma-1)/2} \mathbb{E}_{(\sigma-1)/2+p,q}.$$

Démonstration. Expliquons par exemple le calcul de $\mathbb{S}_{\pi/2\sigma}$ (σ impair):

Pour $t \in \theta_1 \cap \theta_2$ on voit en utilisant la Proposition 4.7 que:

$\cdot X_{1,k}(t) = X_{2,k}(t)$ pour $k = 1, \dots, p$

$$\cdot Y_{1,j}(t) = Y_{2,j}(t) \text{ pour } \begin{cases} \text{(a) si } \sigma \equiv 1 \bmod 4: \ -\dfrac{\sigma-1}{4} \le j \le \dfrac{\sigma-1}{4}, \\ \text{(b) si } \sigma \equiv -1 \bmod 4: \ -\dfrac{\sigma+1}{4} \le j \le \dfrac{\sigma-3}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cdot Y_{1,j}(t) &= Y_{2,j}(t) + \zeta^{-\lambda j} A_{2j-(\sigma-1)/2} V(t\zeta^{(\sigma-1)/2-j}) \\ &= Y_{2,j}(t) + \zeta^{-\lambda(2j-(\sigma-1)/2)} A_{2j-(\sigma-1)/2} Y_{2,(\sigma-1)/2-j}(t) \end{aligned}$$

$$\text{pour} \begin{cases} \text{(a) si } \sigma \equiv 1 \bmod 4: \ \dfrac{\sigma+3}{4} \le j \le \dfrac{\sigma-1}{2}, \\ \text{(b) si } \sigma \equiv -1 \bmod 4: \ \dfrac{\sigma+1}{4} \le j \le \dfrac{\sigma-1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cdot Y_{1,j}(t) &= Y_{2,j}(t) + e^{-2i\pi\lambda} \zeta^{-\lambda j} B_{-2j-(\sigma-1)/2-1} V(t\zeta^{-(\sigma+1)/2-j}) \\ &= Y_{2,j}(t) + \zeta^{-\lambda(3(\sigma+1)/2+2j-1)} B_{-2j-(\sigma-1)/2-1} Y_{2,-j-(\sigma+1)/2} \end{aligned}$$

$$\text{pour} \begin{cases} \text{(a) si } \sigma \equiv 1 \bmod 4: \ -\dfrac{\sigma-1}{2} \le j \le -\dfrac{\sigma+3}{4} \\ \text{(b) si } \sigma \equiv -1 \bmod 4: \ -\dfrac{\sigma-1}{2} \le j \le -\dfrac{\sigma+1}{4} - 1. \end{cases}$$

Donc (si par exemple $\sigma \equiv 1 \bmod 4$):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\pi/2\sigma} = \mathbb{I} &+ \sum_{j=(\sigma+1)/4}^{(\sigma-1)/2} \zeta^{-\lambda(2j-(\sigma-1)/2)} A_{2j-(\sigma-1)/2} \mathbb{E}_{q-j,(p+q+1)/2+j} \\ &+ \sum_{j=-(\sigma-1)/2}^{-(\sigma+1)/4-1} \zeta^{-\lambda(3(\sigma+1)/2+2j-1)} B_{-2j-(\sigma-1)/2-1} \mathbb{E}_{p-j,(p+q+1)/2+j} \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\pi/2\sigma} = \mathbb{I} &+ \sum_{k=1}^{(\sigma+1)/4} \zeta^{-\lambda(2k-1)} A_{2k-1} \mathbb{E}_{3(\sigma+1)/4+p-k,3(\sigma+1)/4+p+k-1} \\ &+ \sum_{k=1}^{(\sigma+1)/4-1} e^{-2i\pi\lambda} \zeta^{2\lambda k} B_{2k} \mathbb{E}_{(\sigma+1)/4+p+k,(\sigma+1)/4+p-k}. \end{aligned}$$

REMARQUE (1). Ces formules font intervenir les coefficients suivants:

$$\begin{cases} A_1, \dots, A_{\sigma/2} \text{ et } B_1, \dots, B_{\sigma/2-1} & \text{lorsque } \sigma \text{ est pair,} \\ A_1, \dots, A_{(\sigma-1)/2} \text{ et } B_1, \dots, B_{(\sigma-1)/2} & \text{lorsque } \sigma \text{ est impair.} \end{cases}$$

(2) Si $\sigma = 1$, la formule (ii) (avec $\sigma = 1$) est encore valable pour la matrice:

$$\mathbb{S}_\pi = \mathbb{M}_\infty^{-1} \mathbb{S}_0 \mathbb{M}_\infty.$$

6. Applications. Remarquons tout d'abord que l'on peut obtenir facilement la monodromie (la "vraie") à l'infini, dans l'une quelconque des bases $\Sigma_n(t)$.

PROPOSITION 6.1. *Dans la base* $\Sigma_0(t)$ *la matrice de monodromie est donnée par la formule*:

$$\begin{cases} \text{(i) } si\ \sigma = 2,\ \mathbb{M}^0_\infty = \mathbb{M}_\infty \mathbb{S}_0, \\ \text{(ii) } si\ \sigma\ est\ impair\ (\geq 3), \mathbb{M}^0_\infty = \mathbb{M}_\infty \mathbb{S}_{3\pi/2\sigma} \mathbb{S}_{\pi/\sigma} \mathbb{S}_{\pi/2\sigma} \mathbb{S}_0, \\ \text{(iii) } si\ \sigma\ est\ pair\ (\geq 4)\ ou\ \sigma = 1, \mathbb{M}^0_\infty = \mathbb{M}_\infty \mathbb{S}_{\pi/\sigma} \mathbb{S}_0. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons par exemple σ impair ≥ 3 (les autres cas sont analogues). Notons $\Sigma(t)$ le prolongement analytique à $\mathbf{C}$ de la solution $\Sigma_0(t)$ (qui est définie dans θ_0). Par définition de $\mathbb{S}_0$ on a dans $\theta_0 \cap \theta_1$: $\Sigma_0(t) = \Sigma_1(t)\mathbb{S}_0$. Le deuxième membre de cette égalité est défini dans θ_1 et coïncide avec $\Sigma(t)$ dans $\theta_0 \cap \theta_1$ donc (unicité du prolongement analytique):

$$\Sigma(t) = \Sigma_1(t)\mathbb{S}_0 \quad \text{dans } \theta_1.$$

De même on a pour $t \in \theta_1 \cap \theta_2$:

$$\Sigma_1(t) = \Sigma_2(t)\mathbb{S}_{\pi/2\sigma} \text{ et donc pour } t \in \theta_2\text{: } \Sigma(t) = \Sigma_2(t)\mathbb{S}_{\pi/2\sigma}\mathbb{S}_0.$$

Finalement pour $t \in \theta_4$ on a:

$$\Sigma(t) = \Sigma_4(t)\mathbb{S}_{3\pi/2\sigma}\mathbb{S}_{\pi/\sigma}\mathbb{S}_{\pi/2\sigma}\mathbb{S}_0 = \Sigma_0(t\zeta^{-1})\mathbb{M}_\infty\mathbb{S}_{3\pi/2\sigma}\mathbb{S}_{\pi/\sigma}\mathbb{S}_{\pi/2\sigma}\mathbb{S}_0$$

(d'après le Lemme 3.6). La formule (ii) s'en déduit par comparaison avec la définition de la matrice de monodromie:

$$\text{matrice } \mathbb{M}^0_\infty \text{ telle que: } \Sigma(t\zeta) = \Sigma(t)\mathbb{M}^0_\infty \text{ pour } t \in \tilde{\mathbf{C}}.$$

On peut aussi déduire des calculs précédents l'irréductibilité (générique) de $\mathbf{D}_{q,p}$, résultat établi par une autre méthode par Beukers-Brownawell-Heckman **[B-B-H]** (qui utilisent un autre "morceau" du groupe de Galois).

On dit que $\mathbf{D}_{q,p}$ est linéairement irréductible ou irréductible sur $\mathbf{C}(z)$ si son groupe de Galois agit irréductiblement sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de ses solutions.

THÉORÈME 6.2. *Supposons, pour tout* i, j, $\mu_i - \mu_j$ *non entier. L'équation différentielle* $\mathbf{D}_{q,p}$ *est irréductible sur* $\mathbf{C}(z)$ *si et seulement si, pour tout* i, j, $\mu_i - \nu_j$ *n'est pas entier.*

Démonstration. La conjonction des deux hypothèses assure que pour $k = 1, \dots, p$, les nombres suivants sont définis et non nuls:

$$\gamma_k = 2i\pi \frac{\Gamma(1+\mu_k-\underline{\mu})}{\Gamma(1+\mu_k-\underline{\nu})}$$

$$\delta_k = \begin{cases} (2\pi)^\sigma i \dfrac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu}-\mu_k)} & \text{si } \sigma \text{ est pair } (\geq 0) \\ (2\pi)^\sigma i e^{i\pi(\mu_k+\lambda/\sigma)} \dfrac{\Gamma(\underline{\mu}_k^*)}{\Gamma(\underline{\nu}-\mu_k)} & \text{si } \sigma \text{ est impair } (\geq 1). \end{cases}$$

Il suffit de voir que l'action du groupe de Galois de $\underline{D}_{q,p}$, identifié à un sous groupe de $\mathrm{Gl}(q, \mathbf{C})$, sur un espace vectoriel V de dimension q ne laisse aucun sous-espace propre invariant. On décompose V (identifié à $\mathbf{C}^q$ par le choix d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_q)$) en $V = V_p \oplus V_\sigma$ où V_p est engendré par les p premiers vecteurs de la base choisie dans V et V_σ par les σ derniers (si on prend pour V l'espace vectoriel des solutions de $\mathbf{D}_{q,p}$ dans un secteur θ_n la base $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ est la base Σ_n).

La démonstration se fait en trois étapes: si F est un sous-espace invariant, on montre que:

(i) si $V_p \supseteq F$, alors $F = 0$,
(ii) si $F \supseteq V_\sigma$, alors $F = V$,
(iii) si $F \cap V_\sigma \neq 0$, alors $F \supseteq V_\sigma$.

(i) Si $v = \sum_{k=1}^p v_k e_k$, alors $\mathbb{S}_0 v = v + (\sum_{k=1}^p v_k \gamma_k) e_{[(p+q+1)/2]}$ qui appartient à V_p si et seulement si: $\sum_{k=1}^p v_k \gamma_k = 0$.

D'autre part, $\mathsf{M}_\infty^n v = \sum_{k=1}^p v_k e^{-2in\pi\mu_k} e_k$ et la condition: $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\mathbb{S}_0 \mathsf{M}_\infty^n v \in V_p$ s'écrit:

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \sum_{k=1}^p v_k \gamma_k e^{-2in\pi\mu_k} = 0.$$

Sous les deux hypothèses faites sur les paramètres de $\underline{D}_{q,p}$ ces relations sont satisfaites si et seulement si: $v = 0$.

(ii) Posons

$$\mathbb{S}_1 = \begin{cases} \mathbb{S}_0 & \text{si } \sigma \text{ est pair} \\ \mathbb{S}_{\pi/\sigma} & \text{si } \sigma \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors $\mathbb{S}_1 e_q = \sum_{k=1}^p \delta_k e_k + w$, où w appartient à V_σ donc à F. Donc le vecteur $\mathbb{S}_1 e_q - w$ appartient à F, de même que ses images par les puissances de M_∞, c'est-à-dire les vecteurs: $v_n = \sum_{k=1}^p \delta_k e^{-2in\pi\mu_k} e_k$, $n \in \mathbf{Z}$.

Or, toujours sous les deux hypothèses faites sur les paramètres, les vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ engendrent V_p.

(iii) L'espace vectoriel $F_\sigma = F \cap V_\sigma$ est invariant par toute matrice $T \in \mathscr{E}$ (car F et V_σ ont cette propriété). Choisissons une matrice T dont toutes les valeurs propres autres que 1 sont distinctes (ce qui est possible). Comme T a un vecteur propre dans F_σ (si $F_\sigma \neq 0$), l'un des vecteurs de la base, soit e_i $(p+1 \leq i \leq q)$ appartient à F_σ.

Donc $\mathrm{M}_\infty e_i = e^{2i\pi\lambda/\sigma} e_{i+1}$ appartient à F_σ (avec la convention $e_{q+1} = e_{p+1}$)

Et finalement $F_\sigma = V_\sigma$.

Toujours sous l'hypothèse $\mu_i - \mu_j \notin \mathbf{Z}$, $\forall i, j$, supposons que $\mu_{i0} - \nu_{j0} \in \mathbf{Z}$. Alors l'un des deux nombres γ_{i0} ou δ_{i0} est nul.

Si $\gamma_{i0} = 0$, le vecteur e_{i0} est propre pour toutes les matrices du groupe de Galois.

Si $\delta_{i0} = 0$, l'hyperplan de coordonnées $\{x_{i0} = 0\}$ est conservé par toutes les matrices du groupe de Galois.

2ème partie: Calcul de Quelques Groupes

1. Groupe de Galois de $D_{3,1}$.

$$D_{3,1} = z(\partial + \mu) - \prod_{j=1}^{3} (\partial + \nu_j - 1).$$

Dans tout ce qui suit, on pose:

$$\alpha = \frac{2i\pi}{\Gamma(1+\mu-\underline{\nu})}, \quad \beta = \frac{4i\pi^2}{\Gamma(\underline{\nu}-\mu)}, \quad \gamma = \sum_{j=1}^{3} e^{-i\pi(\lambda+2\nu_j)} - e^{-i\pi(\lambda+2\mu)},$$

$$a = \alpha e^{-i\pi(\lambda+2\mu)}, \quad b = \beta e^{i\pi(\lambda+2\mu)}, \quad c = \gamma - \frac{\alpha\beta}{2},$$

où on rappelle que $\lambda = \mu - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 + 3/2$.

On remarque que $\alpha\beta = \gamma + \overline{\gamma}$.

(1) *Sous-groupes de Stokes.* Appelons *sous-groupe de Stokes* et notons G_s l'adhérence dans $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ du sous-groupe engendré par les matrices de Stokes $\sim_0$ et $\sim_1$ de $D_{3,1}$ où:

$$\sim_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ \alpha & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sim_1 = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

On note $\mathfrak{G}_s$ l'algèbre de Lie de G_s. Elle est engendrée par les matrices $\mathbb{s}_0$ et $\mathbb{s}_1$, où:

$$\mathbb{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 \end{bmatrix}.$$

LEMME 1.1. *Si $\alpha\beta \neq 0$, G_s est semi-simple.*

Démonstration. Si $\alpha\beta \neq 0$, on montre que la représentation $\mathbf{C}^3$ de G_s est irréductible. Comme $\mathfrak{G}_s$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{sl}(3, \mathbf{C})$, $\mathfrak{G}_s$ est semi-simple ([**Hu**], Prop. 19.1 (6) p. 102). Il en est de même de G_s qui est connexe.

PROPOSITION 1.2. *Supposons $\alpha\beta \neq 0$. Alors,*

(i)

$$si\ \frac{a}{\alpha} \neq \frac{b}{\beta}\ et\ c \neq 0, \quad G_s = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C}),$$

(ii)

$$si\ \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}\ ou\ c = 0, \quad G_s \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C}).$$

Démonstration. Dans le cas (i) on montre que la dimension de $\mathfrak{G}_s$ est au moins égale à 7. Comme $\mathfrak{G}_s$ est semi-simple, $\dim \mathfrak{G}_s = 8$. Dans le cas (ii), on voit facilement que $\mathfrak{G}_s$ est isomorphe à $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$.

En fait, si ρ: $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \to \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$ désigne la représentation irréductible de degré 3 de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, G_s est conjugué de $\rho(\mathrm{SL}(2, \mathbf{C}))$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et on sait que ρ se factorise par $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$.

REMARQUE. Lorsque $\alpha\beta \neq 0$, la condition $c = 0$ est équivalente à $\gamma \in \mathbf{R}^*$, et la condition $a/\beta = b/\beta$ à $(\lambda + 2\mu) \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 1.3. *Supposons $\alpha\beta = 0$. Alors:*

(i) *si $\gamma \neq 0$, $G_s \cong \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$,*

(ii) *si $\gamma = 0$, alors:*

(1) *si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, $G_s = \{\mathbb{I} + s\mathbb{E}_{12} + t\mathbb{E}_{13} | (s, t) \in \mathbf{C}^2\}$.*

(2) *si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, G_s est le transposé du groupe précédent.*

(3) *si $\alpha = \beta = 0$, $G_s = \{\mathrm{id}\}$.*

Démonstration. Dans le cas (i) on peut toujours trouver une base de $\mathbf{C}^3$ dans laquelle on a

$$G_s = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{bmatrix}, \mathbb{M} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \right\}.$$

Le (ii) est obtenu par un calcul direct.

Le tableau qui suit donne des conditions équivalentes portant sur les paramètres de l'équation $D_{3,1}$. Posons $I = \{1, 2, 3\}$.

			Groupe de Stokes	Conditions sur les paramètres
$\alpha\beta \neq 0$	$\frac{a}{\alpha} \neq \frac{b}{\beta}$ ou $c \neq 0$		$\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$	$\forall j, (\mu - \nu_j) \notin \mathbf{Z}$ et $\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}(\mu - \nu_j + \frac{1}{2}) \notin \mathbf{Z} \\ \text{ou } \forall j, (\mu - \nu_j + \frac{1}{2}) \notin \mathbf{Z} \end{cases}$
	$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ et $c = 0$		$\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$	$\forall j, (\mu - \nu_j) \notin \mathbf{Z}, \sum_{j=1}^{3}(\mu - \nu_j + \frac{1}{2}) \in \mathbf{Z}$ et $\exists k, (\mu - \nu_k + \frac{1}{2}) \in \mathbf{Z}$
$\alpha\beta = 0$	$\gamma \neq 0$	$\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$	$\exists j, (\mu - \nu_j) \in -\mathbf{N}^*$ et $\forall k, (\mu - \nu_k) \notin \mathbf{N}$ et $(\nu_k - \nu_l) \notin \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ pour (k, l) tels que $\{j, k, l\} = I$
		$\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$	$\forall j, (\mu - \nu_j) \notin -\mathbf{N}^*$ et $\exists k, (\mu - \nu_k) \in \mathbf{N}$ et $(\nu_j - \nu_l) \notin \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ pour (j, l) tels que $\{j, k, l\} = I$
		$\alpha = \beta = 0$	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$	$\exists j, (\mu - \nu_j) \in -\mathbf{N}^*$ et $\exists k, (\mu - \nu_k) \in \mathbf{N}$ et $(\nu_k - \nu_l) \notin \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ pour l tel que $\{j, k, l\} = I$
	$\gamma = 0$	$\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$	$\mathbf{C} \times \mathbf{C}$	$\exists j, (\mu - \nu_j) \in -\mathbf{N}^*$ et $\forall k, (\mu - \nu_k) \notin \mathbf{N}$ et $(\nu_k - \nu_l) \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ pour (k, l) tels que $\{j, k, l\} = I$
		$\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$	$\mathbf{C} \times \mathbf{C}$	$\forall j, (\mu - \nu_j) \notin -\mathbf{N}^*$ et $\exists k, (\mu - \nu_k) \in \mathbf{N}$ et $(\nu_j - \nu_l) \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ pour j, l tels que $\{j, k, l\} = I$
		$\alpha = \beta = 0$	$\{\mathrm{id}\}$	$\exists j, (\mu - \nu_j) \notin -\mathbf{N}^*$ et $\exists k, (\mu - \nu_k) \in \mathbf{N}$ et $(\nu_j - \nu_l) \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ pour l tel que $\{j, k, l\} = I$

(2) *Monodromie formelle.* Notons G^f_{mono} l'adhérence dans $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ du sous-groupe engendré par la matrice de monodromie formelle:

$$\mathbb{M}_\infty = e^{-2i\pi\mu}\mathbb{E}_{11} + e^{i\pi\lambda}(\mathbb{E}_{23} + \mathbb{E}_{32}).$$

Remarquons que $\mathbb{M}_\infty = e^{i\pi\lambda}\mathbb{J}\mathbb{I}(e^{-i\pi(\lambda+2\mu)})$ où

$$\mathbb{J} = \mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{23} + \mathbb{E}_{32} \text{ et}$$

$$\mathbb{I}(z) = z\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33}.$$

Ces matrices vérifient $\mathbb{J}^2 = \mathrm{id}$ et $\mathbb{J}\mathbb{I}(z) = \mathbb{I}(z)\mathbb{J}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

PROPOSITION 1.4. *Supposons que ni λ, ni μ ne sont rationnels. Alors*:

(i) *Si pour tous* $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, $(2p\mu + q\lambda) \notin \mathbf{Z}$, *on a*:

$$G^f_{\text{mono}} = \{u\mathbb{E}_{11} + v(\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33}) | (u, v) \in \mathbf{C}^{*2}\} \\ \cup \{u\mathbb{E}_{11} + v(\mathbb{E}_{23} + \mathbb{E}_{32}) | (u, v) \in \mathbf{C}^{*2}\}.$$

(ii) *S'il existe* $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ *tels que* $(2p\mu + q\lambda) \in \mathbf{Z}$, *alors, en supposant* q *positif et minimal pour cette propriété,*

$$G^f_{\text{mono}} = \{u\mathbb{E}_{11} + v(\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33}) | (u, v) \in \mathbf{C}^{*2}, P(u, v) = 0\} \\ \cup \{u\mathbb{E}_{11} + v(\mathbb{E}_{23} + \mathbb{E}_{32}) | (u, v) \in \mathbf{C}^{*2}, P_*(u, v) = 0\}$$

où $P \in \mathbf{C}[X, Y]$ *est le polynôme*

$P(X, Y) = Y^q - X^p$ *si* p *est positif,*

$P(X, Y) = Y^q X^{-p} - 1$ *sinon*

et où $P_* \in \mathbf{C}[X, Y]$ *est le polynôme*

$P_*(X, Y) = Y^q - (-1)^{2p\mu + q\lambda} X^p$ *si* p *est positif,*

$P_*(X, Y) = Y^q X^{-p} - (-1)^{2p\mu + q\lambda}$ *sinon.*

Démonstration. Les puissances paires (resp. impaires) de $\mathbb{M}_\infty$ sont contenues dans le sous-ensemble de $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ isomorphe à $\mathbf{C}^{*2}$:

$$\{u\mathbb{E}_{11} + v(\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33}) | (u, v) \in \mathbf{C}^{*2}\} \\ (\text{resp.} \{u\mathbb{E}_{11} + v(\mathbb{E}_{23} + \mathbb{E}_{32}) | (u, v) \in \mathbf{C}^{*2}\}).$$

Notons A_n le point de $\mathbf{C}^2$ de coordonnées $(e^{-2i\pi\mu n}, e^{i\pi\lambda n})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) les points A_{2n} $(n \in \mathbf{Z})$ sont situés sur une même courbe algébrique

(ii) les points A_{2n+1} $(n \in \mathbf{Z})$ sont situés sur une même courbe algébrique

(iii) il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, tels que $(2p\mu + q\lambda) \in \mathbf{Z}$.

Dans ce cas $P = 0$ (resp. $P_* = 0$) est l'équation de degré minimal d'une courbe algébrique contenant tous les points A_{2n} (resp. A_{2n+1}).

Dans toute la suite, si λ (resp. μ) est rationnel, on pose $\xi = e^{i\pi\lambda}$ (resp. $\eta = e^{-2i\pi\mu}$)

PROPOSITION 1.5. *Supposons* λ *ou* μ *rationnel. Alors*:

(i) *Si* $\lambda \notin \mathbf{Q}$ *et* $\mu \in \mathbf{Q}$, *et si* m *désigne l'ordre de la racine de l'unité* $-\eta$,

$$G^f_{\text{mono}} \cong \mathbf{C}^* \times (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$$

via l'isomorphisme: $(u, n) \to u\mathbb{J}^n\mathbb{I}(\eta^n/u)$

(ii) *Si $\lambda \in \mathbf{Q}$ et $\mu \notin \mathbf{Q}$, et si m désigne l'ordre de la racine de l'unité $-\xi$, on a :*

$$G^f_{\mathrm{mono}} \cong \mathbf{C}^* \times (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$$

via l'isomorphisme: $(u, n) \to \xi^n \mathbb{J}^n \mathbb{I}(u)$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbf{Q}$ et $\mu \in \mathbf{Q}$, G^f_{mono} est le sous-groupe fini constitué des puissances de M_∞, isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ où $m \in \mathbf{N}$ est le plus petit entier tel que $\xi^m = \eta^m = 1$.

(3) *Tore exponentiel.*

Proposition 1.6. *Le tore exponentiel est le sous-groupe $\mathscr{E}$ de* $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ *constitué des matrices de la forme*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{bmatrix}, \quad \textit{où } t \in \mathbf{C}^*.$$

(4) *Groupe de Galois.*

Posons $G = \mathrm{Gal}_{C(z)}(D_{31})$.

Proposition 1.7 (*cas générique*). *Supposons que $\alpha\beta \neq 0$, que λ et μ ne sont pas tous deux rationnels, que $(\lambda - \mu) \notin \mathbf{Q}$ et que l'on n'a pas simultanément $\gamma \in \mathbf{R}^*$ et $(\lambda + 2\mu) \in \mathbf{Z}$. Alors $G = \mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$.*

Démonstration. Sous les hypothèses ci-dessus, on voit que $\det(G^f_{\mathrm{mono}}) = \mathbf{C}^*$, donc que $\dim G \geq 1 + \dim G_s$, et l'on est dans le cas où $G_s = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$, d'où le résultat.

Notons $(h_1), \ldots, (h_5), (H), (H')$ les hypothèses suivantes, portant sur les paramètres de l'équation:

(h_1) λ et μ ne sont pas rationnels et pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, $(2p\mu + q\lambda) \notin \mathbf{Z}$.

(h_2) λ et μ ne sont pas rationnels et il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $(2p\mu + q\lambda) \in \mathbf{Z}$. Dans ce cas on supposera toujours q positif et minimal pour cette propriété. Si P et P_* sont les polynômes définis dans la proposition 1.4, on définit le polynôme Q (resp. Q_*) tel que:

$$Q(X, Y^2) = P(X, Y) \text{ si } \quad q \text{ est pair}$$
$$Q(X, Y) = P(X^2, Y^2) \quad \text{sinon.}$$

(h_3) $\lambda \notin \mathbf{Q}$ et $\mu \in \mathbf{Q}$.

(h_4) $\lambda \in \mathbf{Q}$ et $\mu \notin \mathbf{Q}$.

(h_5) $\lambda \in \mathbf{Q}$ et $\mu \in \mathbf{Q}$.

(H) $\gamma \notin \mathbf{R}^*$ ou $(\lambda + 2\mu) \notin \mathbf{Z}$.
(H′) $\gamma \in \mathbf{R}^*$ et $(\lambda + 2\mu) \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 1.8. *Supposons que* $\alpha\beta \neq 0$. *Alors*:
(i) *Si* (H) *et* (h_5) *sont vérifiées,*

$$G = \{\mathbb{M} \in \mathrm{GL}(3, \mathbf{C}) | \exists p \in \mathbf{N},\ \text{dét}\, \mathbb{M} = (-1)^p \eta^p \xi^{2p}\}.$$

(ii) *Si* (H′) *et* (h_2) *sont vérifiées, G est le produit de* $\mathbf{C}^*$ *et d'un produit semi-direct de* G_s *(donc* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$*) par* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(iii) *Si* (H′) *et* (h_5) *sont vérifiées, G est produit semi-direct de* $G_s \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ *par le groupe fini:*

$$G^f_{\text{mono}} / G^f_{\text{mono}} \cap G_s$$

(iv) *Si* (H) *est vérifiée et si* $(\lambda - \mu) \in \mathbf{Q}$, *il existe* $m \in \mathbf{Z}$, *tel que* $C \simeq \mathrm{SL}(3, \mathbf{C}) \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Démonstration. (i) se déduit facilement du fait que le tore exponentiel $\mathscr{E}$ est inclus dans $G_s = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. Si (H′) est vérifiée on montre que $\mathscr{E}$ est contenu dans G_s. Dans le cas (ii), posons $\varepsilon = e^{i\pi(\lambda + 2\mu)} = \pm 1$. Alors G^f_{mono} est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ engendré par $\mathbb{I}(\varepsilon)$, $\mathbb{J}$ et les matrices scalaires. G^f_{mono} est donc isomorphe à

$$\mathbf{C}^* \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \text{ si } \varepsilon = 1 \text{ et à } \mathbf{C}^* \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \text{ si } \varepsilon = -1.$$

On vérifie que G^f_{mono} opère par conjugaison sur G_s. On vérifie que $\mathbb{J}\mathbb{I}(-1)$ est dans G_s, mais non $\mathbb{J}$. Comme d'autre part les matrices scalaires opèrent trivialement, on a le résultat. Dans le cas (iii), le sous-groupe fini G^f_{mono} opère par conjugaison sur G_s.

Notons G_1 le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} u & s & t \\ 0 & & \\ & \mathbb{M} & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad \text{où } \mathbb{M} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}),\ u \in \mathbf{C}^*,\ (s, t) \in \mathbf{C}^2.$$

PROPOSITION 1.9. *Supposons que* $\alpha\beta = 0$ *et* $\gamma \neq 0$. *Alors*:
(i) *Si* (h_1) *est réalisée, G est isomorphe à* G_1 *(resp.* ${}^tG_1$, *resp.* $G_1 \cap {}^tG_1$*) si* $\beta \neq 0$, *(resp.* $\alpha \neq 0$, *resp.* $\alpha = \beta = 0$*).*
(ii) *Sinon, G est isomorphe au sous-groupe de* G_1 *(resp.* ${}^tG_1$, resp. $G_1 \cap {}^tG_1$*), caractérisé par*:
- *si* (h_2) *est réalisée*: $Q(u, \text{dét}\,\mathbb{M}) = 0$ *ou* $Q_*(u, -\text{dét}\,\mathbb{M}) = 0$,
- *si* (h_3) *est réalisée*: $\exists p \in \mathbf{N},\ u = \eta^p$,
- *si* (h_4) *est réalisée*: $\exists p \in \mathbf{N}, \text{dét}\,\mathbb{M} = (-1)^p \xi^{2p}$,
- *si* (h_5) *est réalisée*: $\exists p \in \mathbf{N},\ u = \eta^p$ et $\text{dét}\,\mathbb{M} = (-1)^p \xi^{2p}$.

Démonstration. Il suffit de décrire l'action de G relativement à la base:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}b\\0\\\gamma\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\beta\\\gamma\\0\end{bmatrix} \text{ de } \mathbf{C}^3 \quad \text{si } \alpha = 0 \text{ et } \beta \neq 0,$$

$$\begin{bmatrix}-\gamma\\0\\a\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{si } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta = 0,$$

canonique si $\alpha = \beta = 0$.

PROPOSITION 1.10. *Supposons que* $\alpha\beta = \gamma = 0$. *Alors*:

(i) *Si* (h_1) *est réalisée, G est isomorphe au sous-groupe* G_2 (*resp.* ${}^tG_2$, *resp.* $G_2 \cap {}^tG_2$) *de* G_1 (*resp.* ${}^tG_1$, *resp.* $G_1 \cap {}^tG_1$) *si* $\beta \neq 0$ (*resp.* $\alpha \neq 0$, *resp.* $\alpha = \beta = 0$.) *constitué des matrices de la forme*:

$$\begin{bmatrix} u & s & t \\ 0 & & \\ & \mathsf{M} & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad \text{où } \mathsf{M} \text{ est diagonale ou antidiagonale.}$$

Posons $\varepsilon(\mathsf{M}) = 1$ (*resp.* -1) *si* M *est diagonale* (*resp. antidiagonale*).

(ii) *Sinon, G est isomorphe au sous-groupe de* G_2 (*resp.* ${}^tG_2$, *resp.* $G_2 \cap {}^tG_2$) *caractérisé par*:

∘ *si* (h_2) *est réalisée*: $Q_{\varepsilon(\mathsf{M})}(u, \varepsilon(\mathsf{M})\,\mathrm{dét}\,\mathsf{M}) = 0$ *où* $Q_1 = Q$ *et* $Q_{-1} = Q_*$,

∘ *si* (h_3) *est réalisée*: $\exists p \in \mathbf{N},\ u = \eta^p$,

∘ *si* (h_4) *est réalisée*: $\exists p \in \mathbf{N},\ \mathrm{dét}\,\mathsf{M} = (-1)^p\xi^{2p}$ *et* $\varepsilon(\mathsf{M}) = (-1)^p$,

∘ *si* (h_5) *est réalisée*: $\exists p \in \mathbf{N},\ u = \eta^p,\ \mathrm{dét}\,\mathsf{M} = (-1)^p\xi^{2p}$ *et* $\varepsilon(\mathsf{M}) = (-1)^p$.

Reportons dans un tableau la dimension du groupe de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathbf{C}(z)}(D_{31})$ dans les différents cas.

	$\alpha\beta \neq 0$ et $\left\{\begin{array}{l}\gamma \notin \mathbf{R} \text{ ou}\\ \lambda + 2\mu \notin \mathbf{Z}\end{array}\right.$	$\gamma \in \mathbf{R}^*$ et $\lambda + 2\mu \in \mathbf{Z}$	$\beta\gamma \neq 0$ et $\alpha = 0$ ou $\alpha\gamma \neq 0$ et $\beta = 0$	un et un seul des nombres α, β, γ est non nul	$\alpha = \beta = \gamma = 0$
(h_1)	9		7	5	3
(h_2) (h_3) (h_4)	9	4	6	4	2
(h_5)	8	3	5	3	1

2. Groupe de Galois de $D_{3,2}$.

$$D_{3,2} = z\prod_{i=1}^{2}(\partial + \mu_i) - \prod_{j=1}^{3}(\partial + \nu_j - 1).$$

Posons:

$$\alpha = \frac{2i\pi\Gamma(1+\mu_1-\mu_2)}{\Gamma(1+\mu_1-\underline{\nu})}, \quad \beta = \frac{2i\pi\Gamma(1+\mu_2-\mu_1)}{\Gamma(1+\mu_2-\underline{\nu})},$$
$$\gamma = \frac{2i\pi e^{i\pi(\lambda+\mu_1)}\Gamma(\mu_2-\mu_1)}{\Gamma(\underline{\nu}-\mu_1)}, \quad \delta = \frac{2i\pi e^{i\pi(\lambda+\mu_2)}\Gamma(\mu_1-\mu_2)}{\Gamma(\underline{\nu}-\mu_2)},$$

où on rappelle que $\lambda = \mu_1 + \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 + 1$ et que l'on suppose $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbf{Z}$.

(1) *Sous-groupe de Stokes.* Notons comme précédemment G_s le *sous-groupe de Stokes*, adhérence dans $GL(3,\mathbf{C})$ du sous-groupe engendré par les matrices de Stokes $\mathbb{S}_0$ et $\mathbb{S}_1$ de D_{32} où

$$\mathbb{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPOSITION 2.1.

(i) *Si* $\alpha\gamma + \beta\delta \neq 0$, *alors*:

$$G_s \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{bmatrix}, \mathbb{M} \in SL(2,\mathbf{C}) \right\}.$$

(ii) *Si* $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ *et* $(\gamma,\delta) \neq (0,0)$, *alors*:

$$G_s \cong \{\mathbb{I} + r\mathbb{E}_{12} + s\mathbb{E}_{13} + t\mathbb{E}_{23},\ (r,s,t) \in \mathbf{C}^3\}.$$

(iii) *Si* $\alpha = \beta = 0$ *et* $(\gamma,\delta) \neq (0,0)$ (*resp.* $\gamma = \delta = 0$ *et* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$), *alors*:

$$G_s \cong \{\mathbb{I} + t(\gamma\mathbb{E}_{13} + \delta\mathbb{E}_{23}), (\textit{resp. } \mathbb{I} + t(\alpha\mathbb{E}_{31} + \beta\mathbb{E}_{32})),\ t \in \mathbf{C}\}.$$

(iv) *Si* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, $G_s = \{\mathbb{I}\}$.

Démonstration. On décrit l'action de G_s relativement à la base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{C}^3$, où dans le cas

(i)

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(ii)

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\text{resp. } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} \quad \text{si } \gamma \neq 0 \text{ (resp. } \delta \neq 0).$$

$\mathscr{B}$ étant la base canonique dans les autres cas.

(2) *Tore exponentiel et monodromie formelle.*

Proposition 2.2. *Le tore exponentiel de D_{32} est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$:

$$\mathscr{E} = \{\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{22} + t\mathbb{E}_{33},\ t \in \mathbf{C}^*\}.$$

On rappelle que la matrice de monodromie formelle de l'équation D_{32} est:

$$\mathbb{M}_\infty = e^{-2i\pi\mu_1}\mathbb{E}_{11} + e^{-2i\pi\mu_2}\mathbb{E}_{22} + e^{2i\pi\lambda}\mathbb{E}_{33}.$$

Notons G_{MT} l'adhérence dans $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ du sous-groupe engendré par $\mathscr{E}$ et $\mathbb{M}_\infty$. Lorsque μ_1 (resp. μ_2) est rationnel, posons $\eta = e^{-2i\pi\mu_1}$ (resp. $\zeta = e^{-2i\pi\mu_2}$)

Remarquons que l'on a toujours $\eta \neq \zeta$.

Notons $(c_1), \ldots, (c_5)$ les conditions suivantes sur les paramètres μ_1 et μ_2:

(c_1) $\mu_1 \notin \mathbf{Q}$, $\mu_2 \notin \mathbf{Q}$ et pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, $(p\mu_1 + q\mu_2) \notin \mathbf{Z}$.

(c_2) $\mu_1 \notin \mathbf{Q}$, $\mu_2 \notin \mathbf{Q}$ et il existe $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{Z}$ tels que $(p\mu_1 - q\mu_2) \in \mathbf{Z}$. On supposera toujours, dans ce cas, p minimal pour cette propriété, et on notera $P \in C[X, Y]$ le polynôme:

$$P(X, Y) = X^p - Y^q \quad \text{si } q > 0$$
$$P(X, Y) = X^p Y^{-q} - 1 \quad \text{sinon.}$$

(c_3) $\mu_1 \notin \mathbf{Q}$ et $\mu_2 \in \mathbf{Q}$.

(c_4) $\mu_1 \in \mathbf{Q}$ et $\mu_2 \notin \mathbf{Q}$.

(c_5) $\mu_1 \in \mathbf{Q}$ et $\mu_2 \in \mathbf{Q}$.

Notons Δ le sous groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ constitué des matrices diagonales:

$$\Delta = \{u\mathbb{E}_{11} + v\mathbb{E}_{22} + w\mathbb{E}_{33}, (u, v, w) \in \mathbf{C}^{*3}\}.$$

Proposition 2.3.

(i) *Si la condition (c_1) est vérifiée, $G_{MT} = \Delta$.*

(ii) *Sinon, G_{MT} est le sous-groupe de Δ caractérisé par:*

- *si (c_2) est vérifiée: $P(u, v) = 0$*
- *si (c_3) est vérifiée: $\exists p \in \mathbf{N}$, $v = \zeta^p$*
- *si (c_4) est vérifiée: $\exists p \in \mathbf{N}$, $u = \eta^p$*
- *si (c_5) est vérifiée: $\exists p \in \mathbf{N}$, $u = \eta^p$ et $v = \zeta^p$.*

Démonstration. Les matrices de $\mathscr{E}$ et $\mathbb{M}_\infty$ engendrent le même sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$ que

$$\{e^{-2i\pi\mu_1}\mathbb{E}_{11} + e^{-2i\pi\mu_2}\mathbb{E}_{22} + t\mathbb{E}_{33},\, t \in \mathbf{C}^*\}.$$

Les conditions caractérisant le sous-groupe G_{MT} de Δ ne portent donc que sur u et v (selon que μ_1 on μ_2 est rationnel). Ces conditions s'obtiennent comme dans la Proposition 1.4.

(3) *Groupe de Galois.*
Posons $G = \mathrm{Gal}_{\mathbf{C}(z)}(D_{32})$.

PROPOSITION 2.4 (*cas générique*). *Si $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, alors $G = \mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathfrak{G}_s$, resp. $\mathfrak{G}_{MT}$) l'algèbre de Lie de G (resp. G_s, resp. G_{MT}). Si les conditions (c_1), (c_2) avec $p \neq q$, (c_3) ou (c_4) sont vérifiées, les algèbres $\mathfrak{G}_s$ et $\mathfrak{G}_{MT}$ engendrent $\mathrm{gl}(3,\mathbf{C})$.

Si (c_2) est vérifiée avec $p = q$, on obtient le résultat en décrivant G_s et G_{MT} dans la base

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{si } \alpha\gamma + \beta\delta \neq 0,$$

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{sinon.}$$

Si (c_5) est vérifiée, $\mathfrak{G}$ contient l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}'_s$ du sous-groupe conjugué de G_s par la matrice $M = \eta\mathbb{E}_{11} + \zeta\mathbb{E}_{21} + \mathbb{E}_{33}$ de G_{MT}. On montre que $\mathfrak{G}_s$, $\mathfrak{G}'_s$ et $\mathbb{E}_{33}$ (générateur de $\mathfrak{G}_{MT}$) engendrent $\mathrm{gl}(3,\mathbf{C})$.

Notons G_2 le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} u & s & t \\ 0 & & \\ & \mathbb{M} & \\ 0 & & \end{bmatrix}, u \in \mathbf{C}^*, (s,t) \in \mathbf{C}^2, \mathbb{M} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C}) \right\}.$$

PROPOSITION 2.5.

(i) *Si $\alpha = 0$ et $\beta\gamma\delta \neq 0$ (resp. $\beta = 0$ et $\alpha\gamma\delta \neq 0$), alors:*

∘ *si μ_1 (resp. μ_2) $\notin \mathbf{Q}$, G est isomorphe à G_2*

∘ *si μ_1 (resp. μ_2) $\in \mathbf{Q}$, G est isomorphe au sous groupe G_3 de G_2 caractérisé par la condition: $\exists p \in \mathbf{N}, u = \eta^p$ (resp. ζ^p).*

(ii) *Si* $\gamma = 0$ *et* $\alpha\beta\delta \neq 0$ (*resp.* $\delta = 0$ *et* $\alpha\beta\gamma \neq 0$), *alors*:
- *si* μ_1 (*resp.* μ_2) $\notin \mathbf{Q}, G \cong {}^tG_2$
- *si* μ_1 (*resp.* μ_2) $\in \mathbf{Q}, G \cong {}^tG_3$

(iii) *Si* $\alpha = \gamma = 0$ *et* $\beta\delta \neq 0$ (*resp.* $\beta = \delta = 0$ *et* $\alpha\gamma \neq 0$), *alors*:
- *si* μ_1 (*resp.* μ_2) $\notin \mathbf{Q}$, $G \cong G_2 \cap {}^tG_2$
- *si* μ_1 (*resp.* μ_2) $\in \mathbf{Q}$, $G \cong G_3 \cap {}^tG_3$

(iv) *Si* $\alpha = \delta = 0$ *et* $\beta\gamma \neq 0$ (*resp.* $\beta = \gamma = 0$ *et* $\alpha\delta \neq 0$), *alors*:

(a) *si* (c_1) *est vérifiée, G est isomorphe au sous-groupe de* GL$(3, \mathbf{C})$:

$$G_4 = \left\{ \begin{bmatrix} u & r & s \\ 0 & v & t \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix}, (u, v, w) \in \mathbf{C}^{*3}, (r, s, t) \in \mathbf{C}^3 \right\}$$

(b) *sinon, G est le sous-groupe de* G_4 *caractérisé par*:
- *si* (c_2) *est vérifiée*: $P(u, v) = 0$,
- *si* (c_3) *est vérifiée*: $\exists p \in \mathbf{N}$, $w = \zeta^p$ (*resp.* $u = \zeta^p$),
- *si* (c_4) *est vérifiée*: $\exists p \in \mathbf{N}$, $u = \eta^p$ (*resp.* $w = \eta^p$),
- *si* (c_5) *est vérifiée*: $\exists p \in \mathbf{N}$, $u = \eta^p$ *et* $w = \zeta^p$.

(v) *Si* $\alpha = \beta = 0$ *et* $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ (*resp.* $\gamma = \delta = 0$ *et* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$), *alors*:

(a) *si* (c_1) *est vérifiée, G est le sous-groupe de* G_4 *caractérisé par la condition*: $r = 0$.

(b) *sinon, G est le sous-groupe de* G_4 (*resp.* ${}^tG_4$) *caractérisé par la condition*: $r = 0$ *et*:
- *si* (c_2) *est vérifiée*: $P(u, v) = 0$,
- *si* (c_3) *est vérifiée*: $\exists p \in \mathbf{N}$, $v = \zeta^p$,
- *si* (c_4) *est vérifiée*: $\exists p \in \mathbf{N}$, $u = \eta^p$,
- *si* (c_5) *est vérifiée*: $\exists p \in \mathbf{N}$, $u = \eta^p$ *et* $v = \zeta^p$.

(vi) *Si* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, *G est le sous-groupe de* G_{MT} *décrit en* 2.

Démonstration. Il suffit de décrire l'action du groupe de Galois relativement à la base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{C}^3$, où dans les différents cas:

(i)

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\text{resp. } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(ii)

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\text{resp. } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(iii)

$$\mathscr{B} \text{ est la base canonique } \left(\text{resp. } \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}\right)$$

(iv)

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\} \left(\text{resp. } \left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}\right)$$

$\mathscr{B}$ étant dans les autres cas la base canonique.

Reportons dans un tableau la dimension du groupe de Galois dans chaque cas, en donnant des conditions équivalentes portant sur les paramètres de l'équation D_{32}.

Notations. –Pour tout μ_i (resp. ν_i) on admet sans l'écrire que $i \in \{1, 2\}$ (resp. $\{1, 2, 3\}$).
–Pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, on note: $\mathscr{P}(n) = \mathbf{N}^*$ si $n > 0$, $\mathscr{P}(n) = -\mathbf{N}$ si $n \leq 0$.

Dimension du groupe de Galois de $\mathrm{Gal}_{\mathbf{C}(z)}(D_{32})$:

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
$\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$	9	9	9	9	9
$\alpha = 0$ et $\beta\gamma\delta \neq 0$ ou $\gamma = 0$ et $\alpha\beta\delta \neq 0$	7	7	7	6	6
$\beta = 0$ et $\alpha\gamma\delta \neq 0$ ou $\delta = 0$ et $\alpha\beta\gamma \neq 0$	7	7	6	7	6
$\alpha = \gamma = 0$ et $\beta\delta \neq 0$	5	5	5	4	4
$\beta = \delta = 0$ et $\alpha\gamma \neq 0$	5	5	4	5	4
$\alpha = \delta = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$ ou $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha\delta \neq 0$	6	5	5	5	4
$\alpha = \beta = 0,\ (\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ ou $\gamma = \delta = 0,\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$	5	4	4	4	3
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$	3	2	2	2	1

<table>
<tr><th colspan="2">Conditions sur les paramètres</th><th colspan="3">Dimension du groupe de Galois</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\forall i, j, (\nu_i - \mu_j) \notin \mathbf{Z}$</td><td colspan="3">9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\exists i, j (\nu_i - \mu_j) \in \mathbf{Z}$
et
$\forall k (\nu_k - \mu_j) \notin \mathbf{Z} \backslash \mathscr{P}(\nu_i - \mu_j)$
et
$\forall 1 (\nu_1 - \mu_j) \notin \mathbf{Z}$ pour $j' = j$</td><td>$\mu_j \notin \mathbf{Q}$</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td>$\mu_j \in \mathbf{Q}$</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\exists i, j (\nu_i - \mu_j) \in \mathbf{N}$
et
$\forall k (\nu_k - \mu_j) \in -\mathbf{N}$
et
$\forall 1 (\nu_1 - \mu_j) \notin \mathbf{Z}$ pour $j' = j$</td><td>$\mu_j \notin \mathbf{Q}$</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>$\mu_j \in \mathbf{Q}$</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\mu_1 \notin \mathbf{Q}, \mu_2 \notin \mathbf{Q}$
et $\forall (p, q) \in \mathbf{Z}^2$
$p\mu_1 + q\mu_2 \notin \mathbf{Z}$</td><td>$\mu_1 \notin \mathbf{Q}, \mu_2 \notin \mathbf{Q}$,
$\exists p, q$ entiers
$p\mu_1 + q\mu_2 \in \mathbf{Z}$
ou $\mu_i \notin \mathbf{Q}$,
$\mu_j \in \mathbf{Q}, i \neq j$</td><td>$\mu_1 \in \mathbf{Q}$
et
$\mu_2 \in \mathbf{Q}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\exists i (\nu_i - \mu_1) \in \mathbf{Z}$
et $\exists j (\nu_j - \mu_2) \in \mathbf{Z} \backslash \mathscr{P}(\nu_i - \mu_1)$
et $\forall k \begin{cases} (\nu_k - \mu_1) \in \mathbf{Z} \backslash \mathscr{P}(\nu_i - \mu_1) \\ \text{et } (\nu_k - \mu_2 \in \mathscr{P}(\nu_i - \mu_1) \end{cases}$</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\exists i (\nu_i - \mu_1) \in \mathbf{Z}$
$\exists j (\nu_j - \mu_2) \in \mathscr{P}(\nu_i - \mu_1)$
$\exists k, \forall 1 (\nu_1 - \mu_k) \notin \mathbf{Z} \backslash \mathscr{P}(\nu_i - \mu_1)$</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\exists i, j, k, 1 (\nu_i - \mu_1) \in \mathbf{N}^*$,
$(\nu_j - \mu_1) \in -\mathbf{N}, (\nu_k - \mu_2) \in \mathbf{N}^*$,
$(\nu_1 - \mu_2) \in -\mathbf{N}$</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

Bibliography

[B-B-H] F. F. Beukers, D. Brownawell and G. Heckmann, *Siegel normality*, preprint 1986.

[Hu] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag.

[K-R] N. Katz and R. Pink, *A note on pseudo-CM representation and differential Galois groups*, Duke Math. J., **54** no. 1 (1987), 57–65.

[L] Y. Luke, *The Special Functions and their Approximations*, Academic Press 1969.

[Ma] B. Malgrange, *La classification des connexions irrégulières à une variable*, Séminaire E.N.S. (1981–1982) exposé 6, Birkhaüser (1983).

[Me] C. S. Meijer, *On the G-functions* I à VIII. Indag. Math., **8** (1946), 124–134; 213–225; 312–324; 391–400; 468–475; 595–602; 661–670; 713–723.

[Ra1] J.-P. Ramis, *Théorème d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **296** (1984).

[Ra2] ———, *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, Informes de Mathematica Serie A-045/85.

[Ra3] ———, *Etude des solutions méromorphes des équations aux différences algébriques*, en préparation.

Received November 25, 1987 and in revised form April 4, 1988.

UNIVERSITE LOUIS PASTEUR
67084 STRASBOURG, FRANCE