Journal of Mathematics,
Osaka City University,
Vol. 13, No. 2

Sur un théorème du balayage

par Shirô OGAWA

(*Received Nov. 15, 1962*)

1. Introduction

Dans la théorie du potentiel d'ordre α, M. Riesz [5] a démontré à l'aide de la transformation de Kelvin que, étant donné un ensemble fermé F, on peut associer à toute masse ponctuelle une mesure balayée sur F. N. Ninomiya [3] a résolu le problème du balayage de la manière suivante: un noyau positive, continu et symétrique est balayable, pourvu qu'il satisfasse au principe de domination. Mais il n'a traité que le balayage pour un ensemble compact. Dans ce travail on va traiter le balayage pour un ensemble fermé (non compact) relatif aux potentiels pris par rapport au noyau positive, continu et symétrique s'annulant à l'infini et satisfaisant aux principes de domination et du maximum dilaté.

2. Préliminaires

Soit E un espace localement compact tel qu'il soit σ-compact. Par un noyau symétrique sur E on comprend une application $\Phi(x, y)$ de $E\times E$ dans $(0, +\infty)$, continue et symétrique en x et y, $\Phi(x, x)$ pouvant être $+\infty$. Le potentiel et l'énergie d'une mesure μ sur E pris par rapport au noyau Φ sont définis par

$$U^{\mu}(x) = \int \Phi(x, y)d\mu(y)$$

et

$$I(\mu) = \iint \Phi(x, y)d\mu(y)d\mu(x)$$

respectivement. Nous exigeons de Φ l'hypothèse suivante: il existe une mesure positive $\lambda\neq 0$ à support compact $S\lambda$, telle que le potentiel $U^{\lambda}(x)$ soit fini et continu dans E.

Nous considérons les ensembles suivants,

$$\mathscr{E}^{+}\equiv\{\mu\ ;\ \mu\geqq 0 \text{ et } I(\mu)<+\infty\},$$

$$\mathscr{F}^{+}\equiv\{\lambda\ ;\ \lambda\geqq 0,\ S\lambda \text{ compact et } U^{\lambda}(x) \text{ fini et continu }\}$$

et

$$\mathscr{G}^{+}\equiv\{\nu\ ;\ \nu\geqq 0 \text{ et } U^{\nu}(x)\not\equiv+\infty\}.$$

Lorsqu'un noyau s'annule à l'infini, non seulement toute mesure de masse totale finie (naturellement, toute mesure à support compact) appartient à $\mathscr{G}^{+}$ mais encore il est possible que des mesures de masse totale infinie appartiennent à $\mathscr{G}^{+}$. On dira désormais qu'une propriété a lieu "à peu près partout (à p. p. p.)", si elle ne tombe en défaut qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\mu \in \mathscr{E}^+$.

Ensuite, nous énumérons des divers principes et des résultats importants relatifs au potentiel pris par rapport au noyau symétrique.

PRINCIPE DE CONTINUITE : Pour toute mesure μ à support compact $S\mu$, le fait que la réstriction de $U^{\mu}(x)$ à $S\mu$ soit finie et continue entraîne que $U^{\mu}(x)$ soit fini et continu dans E.

PRINCIPE DE DOMINATION : Soient μ une mesure positive d'énergie finie à support compact et ν une mesure positive quelconque. Si on a

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

sur le support $S\mu$, on a la même inégalité partout dans tout l'espace E.

PRINCIPE DU MAXIMUM k-DILATE ($k \geqq 1$) : Soit λ une mesure positive à support compact. Si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq 1$$

sur le support $S\lambda$, on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq k$$

partout dans tout l'espace E.

PRINCIPE DU BALAYAGE : Etant donné un ensemble compact K, on peut associer à toute mesure positive μ au moins une mesure positive μ' portée par K telle que

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x) \qquad \text{à p.p.p. sur } K,$$
$$U^{\mu'}(x) \leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } E,$$
$$\int U^{\mu'} d\nu = \int U^{\mu} d\nu' \qquad \text{pour toute mesure } \nu \in \mathscr{E}^+.$$

Cette mesure μ' s'appelle une mesure balayée de μ sur K.

N. Ninomiya [3] a obtenu les théorèmes suivants.

THEOREME A. *Pour qu'un noyau Φ satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe de domination.*

THEOREME B. *Si un noyau Φ satisfait au principe du maximum k-dilaté ou de domination, il satisfait au principe de continuité.*

M. Kishi [2] a démontré le théorème suivant.

THEOREME C. *Supposons qu'un noyau Φ satisfait à la condition* (*): *pour un ensemble compact K et pour un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K_ε tel que*

$$\Phi(x, y) < \varepsilon \quad \textit{sur } K \times (E - K_\varepsilon).$$

Si une suite des mesures positives $\{\mu_n\}$ de masse totale uniformément bornée converge vaguement vers une mesure μ, on a alors

$$\lim_{n \to \infty} \int U^{\mu_n} d\lambda = \int U^{\mu} d\lambda \qquad \textit{pour toute mesure } \lambda \in \mathscr{F}^+.$$

Le théorème suivant relatif à la topologie vague est très important [1].

THEOREME D. *Dans l'espace des mesures sur E, tout ensemble borné H est* *relativement compact pour la topologie vague.*

3. Balayage pour un ensemble fermé (non compact).

Comme il est dit dans l'introduction, on va démontrer le théorème suivant.

THEOREME. *Si un noyau Φ satisfait à la condition $(*)$ et aux principes de domination et du maximum k-dilaté, pour un ensemble fermé quelconque F on peut associer à toute mesure positive $\mu\in\mathscr{E}^+$ au moins une mesure positive μ' portée par F telle que*

$$U^{\mu'}(x)=U^{\mu}(x) \qquad \text{à p.p.p. sur } F,$$
$$U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } E.$$

Pour démontrer le théorème, nous préparons trois lemmes.

LEMME 1. *Si un noyau Φ satisfait au principe de continuité, la notion de mesure nulle pour toute mesure $\mu\in\mathscr{E}^+$ est équivalent à la notion de mesure nulle pour toute mesure $\lambda\in\mathscr{F}^+$.*

En effet, soit $e\subset E$ un ensemble universellement mesurable tel que $\lambda(e)=0$ pour toute mesure $\lambda\in\mathscr{F}^+$. En tenant compte de $\mathscr{F}^+\subset\mathscr{E}^+$, on va montrer $\mu(e)=0$ pour toute mesure $\mu\in\mathscr{E}^+$. Pour cela, il suffit de le montrer pour toute mesure $\mu\in\mathscr{E}^+$ de masse totale finie. Etant donné une mesure $\mu\in\mathscr{E}^+$, l'ensemble

$$N\equiv\{x\in E\,;\ U^{\mu}(x)=+\infty\}$$

est μ-mesure nulle, parce que le potentiel $U^{\mu}(x)$ est nécessairement μ-intégrable (naturellement, μ-mesurable). Pour tout nombre $\varepsilon>0$, il existe un ensemble compact K contenu dans le complémentaire de N tel que

$$\mu(K)>\mu(E)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

En appliquant le théorème de Lusin pour la fonction $U^{\mu}(x)$, il existe un ensemble compact $K_1\subset K$, tel que $\mu(K\cap CK_1)\leqq\frac{\varepsilon}{2}$, et que la restriction de $U^{\mu}(x)$ à K_1 soit continue. Nous désignons par ν la restriction de μ à K_1. $U^{\mu}(x)$ étant la somme de deux fonctions positives et semi-continues inférieurement (i.e. $U^{\mu}=U^{\nu}+U^{\mu-\nu}$), $U^{\nu}(x)$ et $U^{\mu-\nu}(x)$ sont tous deux continus comme fonctions sur K_1. D'après le principe de continuité, $U^{\nu}(x)$ est fini et continu partout dans tout l'espace E, c'est-à-dire, $\nu\in\mathscr{F}^+$. D'autre part, on a

$$\mu(e)=\nu(e)+(\mu-\nu)(e)=(\mu-\nu)(e)<\mu(E\cap CK_1)<\varepsilon,$$

puisque l'ensemble $e\subset E$ est de mesure nulle pour toute mesure $\lambda\in\mathscr{F}^+$.

LEMME 2. *Supposons qu'un noyau Φ satisfait au principe de continuité et à la condition $(*)$. Considérons une suite des potentiels $\{U^{\mu_n}(x)\}$ telle que*

$$U^{\mu_n}(x)\leqq U^{\mu_{n+1}}(x) \qquad \text{à p.p.p. dans } E,$$
$$U^{\mu_n}(x)\leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } E,$$

où μ est une mesure positive de masse totale finie. Le fait que

$$\lim_{n\to\infty}\int U^{\mu_n}d\lambda=\int U^{\mu'}d\lambda$$

pour une mesure positive μ' *et pour toute mesure* $\lambda \in \mathscr{F}^+$ *entraîne que*

$$\lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x) = U^{\mu'}(x) \quad \textit{à p.p.p. dans } E.$$

En effet, par l'hypothèse, la fonction $U^{\mu}(x)$ est λ-intégrable et il existe une fonction g(x) telle que

$$\lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x) = \mathrm{g}(x) \qquad \text{à p.p.p. dans } E.$$

D'après le théorème de Lebesgue et l'hypothèse, on a alors

$$\lim_{n\to\infty}\int U^{\mu_n} d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} U^{\mu_n} d\lambda = \int U^{\mu'} d\lambda$$

pour toute mesure $\lambda \in \mathscr{F}^+$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x) = U^{\mu'}(x)$$

sur E sauf un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in \mathscr{F}^+$. D'après le lemme 1, il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x) = U^{\mu'}(x) \qquad \text{à p.p.p. dans } E.$$

LEMME 3. *Supposons qu'un noyau* Φ *satisfait aux principes du balayage et du maximum k-dilaté. Désignant par* μ' *une mesure balayée de toute mesure positive* μ *sur un ensemble compact K, on a alors la relation suivante,*

$$\mu'(E) \leqq k\mu(E).$$

En effet, d'abord, supposons qu'un ensemble compact K ne porte aucune mesure positive d'énergie finie. Alors, toute mesure balayée μ' se réduit à la mesure identiquement nulle et donc, on a évidemment la relation recherchée. Si un ensemble compact K porte au moins une mesure positive d'énergie finie, il existe, comme il est bien connu, une mesure positive λ_0 telle que

$$U^{\lambda_0}(x) \geqq 1 \qquad \text{à p.p.p. sur } K,$$
$$U^{\lambda_0}(x) \leqq 1 \qquad \text{sur le support } S\lambda_0 \subset K.$$

En faisant attention qu'une mesure balayée μ' de μ sur K est une limite vague de la suite des mesures positives d'énergie finie $\{\mu_i\}$ portées par K telle que

$$U^{\mu_i}(x) \uparrow U^{\mu'}(x) \qquad \text{à p.p.p. dans } E$$

([3], p. 165. cf. Démonstration du théorème 5), on a alors

$$\mu_i(E) = \mu_i(K) \leqq \int U^{\lambda_0} d\mu_i = \int U^{\mu_i} d\lambda_0 \leqq \int U^{\mu} d\lambda_0 = \int U^{\lambda_0} d\mu \leqq k\mu(E)$$

et donc

$$\mu'(E) = \lim_{i\to\infty} \mu_i(E) = k\mu(E).$$

Démonstration du théorème. Si un ensemble fermé donné F ne porte aucune mesure positive ($\neq 0$) d'énergie finie, toute mesure associée à une mesure positive sur F se réduit à la mesure identiquement nulle. Par suite, soit F un ensemble fermé qui porte des mesures positives d'énergie finie. Par l'hypothèse de la σ-compacité, on peut représenter l'espace E de la manière suivante,

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset K_{n+1},$$

où K_n est un ensemble compact et K_0 désigne la partie vide. Soit

$$F_n = F \cap K_n.$$

Supposons qu'une mesure positive donnée μ est à support compact. Selon le théorème A, on peut associer à la mesure μ au moins une mesure balayée μ_n portée par F_n telle que

$$(1) \qquad \begin{aligned} &U^{\mu_n}(x) = U^{\mu}(x) && \text{à p.p.p. sur } F_n, \\ &U^{\mu_n}(x) \leqq U^{\mu}(x) && \text{partout dans tout l'espace } E, \\ &\int U^{\mu_n} d\nu = \int U^{\mu} d\nu' \ \left(= \int U^{\mu_n} d\nu'\right) && \text{pour toute mesure } \nu \in \mathscr{E}^+. \end{aligned}$$

D'après le théorème A et le lemme 3, on a

$$\mu_n(E) \leqq k\mu(E) < +\infty.$$

On en conclut que la famille des mesures $\{\mu_n\}$ est vaguement bornée et donc, en vertu du théorème D, on peut extraire une suite partielle $\{\mu_{n'}\}$ de $\{\mu_n\}$ qui converge vers une mesure μ'. Cette mesure μ' est portée par F et positive, parce que l'ensemble $\mathscr{M}_F^+$ des mesures positives portées par F est complet pour la structure uniforme déduite de la topologie vague. D'ailleurs, d'après le théorème C, on a

$$(2) \qquad \lim \int U^{\mu_{n'}} d\lambda = \int U^{\mu'} d\lambda \qquad \text{pour toute mesure } \lambda \in \mathscr{F}^+.$$

De (1) et la monotonicité de F_n, il évidemment résulte

$$U^{\mu_n}(x) \leqq U^{\mu_{n+1}}(x) \quad \text{à p.p.p. sur } F_{n+1}.$$

Mais cependant, on peut montrer de plus

$$U^{\mu_n}(x) \leqq U^{\mu_{n+1}}(x) \quad \text{à p.p.p. dans } E.$$

Pour le prouver, il s'agit de montrer

$$U^{\mu_n}(x) \leqq U^{\mu_{n+1}}(x) \quad \text{à p.p.p. dans } CF_{n+1}.$$

Soit

$$e \equiv \{x \in CF_{n+1} \ ; \ U^{\mu_n}(x) - U^{\mu_{n+1}}(x) > 0\}$$

et supposons qu'on peut trouver une mesure $\nu \in \mathscr{E}^+$ telle que $\nu(e) > 0$ et le support compact $S\nu \subset e$. Lorsqu'on désigne par ν_n et par ν_{n+1} les mesures balayées de ν sur F_n et sur F_{n+1} respectivement, on a

$$\begin{aligned} &U^{\nu_n}(x) = U^{\nu}(x) && \text{à p.p.p. sur } F_n, \\ &U^{\nu_{n+1}}(x) = U^{\nu}(x) && \text{à p.p.p. sur } F_{n+1}, \end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de ν_n, $\nu_{n+1} \in \mathscr{E}^+$ et la relation de réciprocité dans (1), on a

$$\begin{aligned} 0 < \int (U^{\mu_n} - U^{\mu_{n+1}}) d\nu &= \int U^{\nu} d\mu_n - \int U^{\nu} d\mu_{n+1} \\ &= \int U^{\nu_n} d\mu_n - \int U^{\nu_{n+1}} d\mu_{n+1} \\ &= \int (U^{\nu_n} - U^{\nu_{n+1}}) d\mu_n + \int U^{\nu_{n+1}} d\mu_n - \int U^{\nu_{n+1}} d\mu_{n+1} \end{aligned}$$

$$=\int (U^{\mu_n}-U^{\mu_{n+1}})d\nu_{n+1}$$
$$\leqq 0,$$

ce qui est évidemment contradictoire. Des relations

$$U^{\mu_{n'}}(x)\leqq U^{\mu_{n'+1}}(x) \quad \text{à p.p.p. dans } E,$$
$$U^{\mu_{n'}}(x)\leqq U^{\mu}(x) \quad \text{partout dans tout l'espace } E,$$

(2), le théorème B et le lemme 2, il résulte

$$\lim_{n'\to\infty} U^{\mu_{n'}}(x)=U^{\mu'}(x) \quad \text{à p.p.p. dans } E.$$

Cette mesure μ' posséde la propriété suivante,

$$U^{\mu'}(x)=U^{\mu}(x) \quad \text{à p.p.p. sur } F,$$
$$U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x) \quad \text{partout dans tout l'espace } E,$$

et donc elle est une mesure balayée de μ sur F. Ensuite, supposons qu'une mesure positive donnée $\mu\in\mathscr{G}^+$ est à support non compact. Soit $\mu^{(n)}$ la restriction de μ à K_n-K_{n-1}. On peut associer à $\mu^{(n)}$ au moins une mesure positive $\mu^{(n)'}$ portée par F telle que

$$U^{\mu^{(n)'}}(x)=U^{\mu^{(n)}}(x) \quad \text{à p.p.p. sur } F,$$
$$U^{\mu^{(n)'}}(x)\leqq U^{\mu^{(n)}}(x) \quad \text{partout dans tout l'espace } E.$$

On peut démontrer que la famille des mesures $\{\sum_{n=1}^{m}\mu^{(n)'}\}$, $m=1, 2, 3, \cdots$ est vaguement bornée. En effet, soit $\mu_K^{(n)\,\prime}$ la restriction de $\mu^{(n)'}$ à tout ensemble compact $K\subset E$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{m} U^{\mu_K^{(n)\prime}}(x)\leqq\sum_{n=1}^{m} U^{\mu^{(n)\prime}}(x)\leqq\sum_{n=1}^{m} U^{\mu^{(n)}}(x)\leqq U^{\mu}(x)$$

partout dans tout l'espace E. Par l'hypothèse de $\mu\in\mathscr{G}^+$, il existe au moins un point x_0 tel que

$$U^{\mu}(x_0)<+\infty.$$

En consequence, on a

$$U^{\sum_{n=1}^{m}\mu_K^{(n)\prime}}(x_0)\leqq U^{\mu}(x_0)<+\infty.$$

On en conclut

$$\sum_{n=1}^{m}\mu^{(n)'}(K)<+\infty$$

pour tout entier m et pour tout ensemble compact $K\subset E$, parce que le noyau considéré est positive. Ainsi, en vertu du théorème D, on peut extraire une suite partielle $\{\sum_{n=1}^{m'}\mu^{(n)'}\}$ de $\{\sum_{n=1}^{m}\mu^{(n)'}\}$ qui converge vers une mesure $\mu'\in\mathscr{M}_F^+$. Cette mesure μ' posséde la propriété suivante,

$$U^{\mu'}(x)=U^{\mu}(x) \quad \text{à p.p.p. sur } F,$$
$$U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x) \quad \text{partout dans tout l'espace } E,$$

et donc, elle est une mesure balayée de μ sur F.

REMARQUE. Nous nous plaçons dans l'espace euclidien à n dimension $R^n (n \geqq 1)$. Soit $\Phi(x)$ une fonction positive, continue, symétrique $(\Phi(x) = \Phi(-x))$ et sommable dans tout voisinage de l'origine telle que $\Phi(0) = \lim_{x \to 0} \Phi(x) \leqq +\infty$. Considérons le potentiel

$$U^{\mu}(x) = \int \Phi(x-y) d\mu(y)$$

d'une mesure positive μ pris par rapport au noyau $\Phi(x)$. Pour les potentiels de ce type, M. Ohtsuka ([4], p. 282) a étudie la relation entre les principes de domination dilaté et du maximum dilaté. Il a obtenu un résultat suivant: Si un noyau $\Phi(x)$ satisfait au principe de domination et à la condition,

$$[\mathrm{M}] \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{\int_{B(0,r)} \Phi(x) dx}{\int_{B(0,r-\rho)} \Phi(x) dx} \leqq k \qquad (k \geqq 1)$$

pour tout nombre $\rho > 0$, $B(a, r)$ désignant la boule de rayon r centrée en le point a, il satisfait au principe du maximum k-dilaté. En particulier, N. Ninomiya ([3], p. 169) a démontré que, si un noyau $\Phi(x)$ satisfaisant au principe de domination est décroissant de la distance $|x|$, il satisfait à la condition [M]. Par consequent, on en conclut que, si un noyau $\Phi(x)$ satisfaisant au principe de domination est décroissant de la distance $|x|$ et s'annule à l'infini, on peut associer à toute mesure $\mu \in \mathscr{S}^+$ au moins une mesure balayée sur un ensemble fermé (non compact) dans l'espace R^n.

Bibliographies

[1] N. Bourbaki: Intégration, Paris, Hermann, 1952.

[2] M. Kishi: Capacitability of analytic sets, Nagoya, Math. J., Vol. **16**, 1960, pp. 91–109.

[3] N. Ninomiya: Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 8, 1957, pp. 147–179.

[4] M. Ohtsuka: On potentials in locally compact spaces. Ser. A-I, Vol. **25**, No. 2, 1961. pp. 136–352.

[5] M. Riesz: Intégrale de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Sci. Szeged **9**, 1938, pp. 1–42.