Delanoë, Ph.
Osaka J. Math.
33 (1996), 829–846

SUR L'ANALOGUE PRESQUE-COMPLEXE DE L'EQUATION DE CALABI-YAU

PHILIPPE DELANOË*

(Received March 6, 1995)

1. Digression introductive

Soit V une variété différentielle compacte de dimension paire $2m$ munie d'une forme symplectique σ. Notons $[\sigma]\in H^2(V,\boldsymbol{R})$ la classe de cohomologie de De Rham définie par σ, et $[\sigma]^m\in H^{2m}(V,\boldsymbol{R})$, celle définie par

$$\sigma^m:=\underbrace{\sigma\wedge\cdots\wedge\sigma}_{(m\text{ fois})}.$$

Théorème 1. *Etant donnée une forme arbitraire non dégénérée $\omega\in[\sigma]^m$, il existe $\sigma'\in[\sigma]$ non-dégénérée, racine extérieure m-ième de ω, c'est-à-dire, solution sur V de l'équation*:

$$(\sigma')^m=\omega. \tag{1}$$

Preuve. (Si $m=1$. la question est triviale.) Si σ' vérifie l'équation (1) il est immédiat (en raisonnant par l'absurde) qu'elle doit être non dégénérée. Pour l'existence de σ', utilisons le résultat de Moser [6]: il construit un difféomorphisme $f: V\to V$ isotope à l'identité (flot d'un champ de vecteurs) tel que

$$f^*(\sigma^m)=\omega.$$

Donc $f^*\sigma$ est bien cohomologue à σ (grand merci à Etienne Ghys de me l'avoir fait observer), et $f^*\sigma$ vérifie l'équation (1) $\therefore$

Cet article peut être vu comme un essai pour définir de façon unique dans $[\sigma]$ la racine m-ième d'une telle forme ω. au moyen d'une structure presque-complexe adaptée (section 2). Ceci est touioure possible avec ω assez proche de σ^m (section 3): mais il semble qu'en général on n'y parvienne (grâce au théorème de Calabi-Yau) que si σ provient d'une structure *Kählérienne* (section 4) ce qut suppose des

---

* Chargé de recherches au CNRS, membre du réseau européen GADGET II (contrat n°CHRX-CT92-0050)

restrictions sur la topologie de V.

2. L'équation de Calabi-Yau vue par Gromov

Soit J une structure presque-complexe sur V, c'est-à-dire un endomorphisme du fibré tangent

$$\begin{tikzcd} TV \arrow[rr, "J"] \arrow[dr] & & TV \arrow[dl] \\ & V & \end{tikzcd}$$

dont le carré vaut moins l'identité.

DEFINITION 1. Une 2-forme de V, α, est dite J-positive en $x \in V$ si $\alpha(v,Jv) > 0$ pour tout vecteur tangent en x non nul, v. Elle est dite J-positive sur V (ou simplement "positive", lorsque V et J s'entendent) si elle est J-positive en tout point.

DEFINITION 2. La structure presque-complexe J est dite adaptée à la forme symplectique σ, si σ est J-positive et si J est un symplectomorphisme de chaque espace tangent muni de σ i.e. si $\sigma(J.,J.) = \sigma$ (on dit alors que J est "calibrée" par σ).

L'existence sur V d'une structure presque complexe adaptée à σ est classique (voir e.g. [8], lecture 2).

Désormais nous fixons J adaptée à σ, et nous considérons la question suivante: existe-t'il une fonction réelle $\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ telle que la 2-forme

$$\Sigma(\phi) := \sigma + d\,{}^tJd\phi$$

soit J-positive et vérifie l'équation (1) ? (bien sûr ${}^tJ$ désigne l'endomorphisme *transposé* de J). L'équation ainsi posée pour ϕ:

$$(1') \qquad [\Sigma(\phi)]^m = \omega, \qquad \Sigma(\phi) \quad \text{positive},$$

n'est autre que l'écriture presque-complexe de l'équation de Calabi-Yau (cf. section 4, preuve du théorème 3), soluble dans le cas Kählérien [9]. Je suis profondément reconnaissant à M. Gromov de m'avoir interrogé sur la possibilité d'étendre la résolution de cette équation au cas où la structure presque-complexe *n'est* plus *intégrable*, ce qu'exprime la question précédente. La réponse est: oui localement (section 3): sans doute non globalement (section 4)... J'ai longtemps essayé d'établir une réponse globale affirmative, en vain, et c'est finalement par sa mise en doute que j'ai pu, hélas seulement en dimension deux, comprendre comment la non-nullité de la torsion peut faire obstacle (section 4).

Commençons par nous assurer du type *elliptique* de l'équation (1'), réécrite scalairement:

Proposition 1. *L'opérateur différentiel scalaire non linéaire du second ordre F sur V défini par*

$$\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R}) \to F(\phi)\sigma^m = [\Sigma(\phi)]^m$$

est de type elliptique sur l'ouvert

$$C^\infty_+ := \{\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R}),\ \Sigma(\phi) \textit{ est positive pour } J\}.$$

Preuve. Fixons $\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$, $x \in V$, $\alpha \in T^*_x V$, posons $L = dF(\phi)$ et prenons au voisinage de x une fonction réelle u vérifiant

$$u(x) = 0, \qquad du(x) = \alpha.$$

Le symbole principal de L en (x,α) s'obtient en calculant

$$\begin{aligned}[L(u^2/2)\sigma^m](x) &= m\{[\Sigma(\phi)]^{m-1} \wedge d\,{}^tJd(u^2/2)\}(x)\\ &= -m({}^tJ\alpha) \wedge \alpha \wedge [\Sigma(\phi)(x)]^{m-1}.\end{aligned}$$

D'après l'appendice 3 (cf. infra), si $\alpha \neq 0$ et si $\phi \in C^\infty_+$,

$$L(u^2/2) < 0 \qquad \therefore$$

REMARQUE 1. L'opérateur L s'annule manifestement sur les fonctions constantes. Etant scalaire elliptique du second ordre (et V sans bord), le principe du maximum de Hopf [4] entraine que le noyau de L est *uniquement* constitué des fonctions constantes.

REMARQUE 2. La positivité de $\Sigma(\phi)$ est essentielle pour l'ellipticité de F: la non-dégénérescence de $\Sigma(\phi)$ ne suffit pas. Prenons en effet l'exemple, sur $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ muni de la structure complexe standard, de la 2-forme réelle non-dégénérée

$$\Sigma = dz^1 \wedge dz^2 + d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2.$$

Cette forme s'avère immédiatement nulle sur tout couple de vecteurs de la forme (v, Jv). Prenons $\alpha = dz^1 + d\bar{z}^1$, alors

$${}^tJ\alpha \wedge \alpha \wedge \Sigma = 2i\ dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \Sigma = 0.$$

3. Surjectivité locale de F

Localité au sens de la variété V:

Au voisinage d'un point arbitraire $x \in V$, sur lequel on se donne une fonction positive lisse f, il existe (cf infra, appendice 2) une fonction locale ϕ vérifiant au point x: $\Sigma(\phi)$ positive et $F(\phi) = f$. La preuve de la proposition 1 montre que l'opérateur

F est *elliptique* en ϕ au point x. Dès lors on est assuré, comme dans [3] (theorem 3.1), de l'existence d'une solution (elliptique) locale de l'équation $F(u)=f$.

Localité au sens fonctionnel, globalement sur V:

Considérons les sous-variétés de Fréchet (affines) fermées de codimension 1 suivantes:

$$A:=\{\phi \in C^{\infty}(V,\boldsymbol{R}),\ \int_V \phi\sigma^m=0\}$$

$$B:=\{f\in C^{\infty}(V,\boldsymbol{R}),\ \int_V f\sigma^m=\int_V \sigma^m\}.$$

Par construction, l'opérateur F envoie $C^{\infty}(V,\boldsymbol{R})$ dans B. Notons encore F sa restriction à

$$A_+:=A\cap C^{\infty}_+;$$

celle-ci est à valeurs dans

$$B_+:=B\cap\{f\in C^{\infty}(V,\boldsymbol{R}),\ f>0\}$$

comme le montre la preuve du lemme de l'appendice 3.

REMARQUE 3. L'ouvert C^{∞}_+ est *convexe* (ainsi donc que A_+). En effet, si ϕ_0 et ϕ_1 sont dans C^{∞}_+, posant pour $t\in[0,1]$,

$$\phi_t:=t\phi_1+(1-t)\phi_0,$$

nous avons

$$\Sigma(\phi_t)=t\Sigma(\phi_0)+(1-t)\Sigma(\phi_1)$$

et la positivité de $\Sigma(\phi_0)$ et de $\Sigma(\phi_1)$ entraine évidemment celle de $\Sigma(\phi_t)$, donc $\phi_t\in C^{\infty}_+$ $\therefore$

Proposition 2. *L'opérateur $F\colon A_+\to B_+$ est injectif.*

Preuve. Soient ϕ_0 et ϕ_1 dans A_+ ayant même image par F. En reprenant les notations de la remarque 3, l'identité

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}[F(\phi_t)]dt=0$$

s'écrit encore:

$$\mathscr{L}(\phi_1-\phi_0)=0,$$

où l'opérateur *linéaire* $\mathscr{L}$ est défini par la relation

$$(\mathscr{L}u)\sigma^m=\left(\int_0^1[\Sigma(\phi_t)]^{m-1}dt\right)\wedge d\,{}^tJdu.$$

D'après la remarque 3, $\mathscr{L}$ est *elliptique.* Comme dans la remarque 1, le noyau de $\mathscr{L}$ est réduit aux constantes. Donc $(\phi_1-\phi_0)$ est constante; étant dans A, elle est *nulle* $\therefore$.

Théorème 2. *F est un difféomorphisme lisse de A_+ sur $F(A_+)$.*

Preuve. Compte-tenu de la proposition 2, il suffit de montrer que $F:A_+\to F(A_+)\subset B_+$ est un C^∞ difféomorphisme local. Cela découle du théorème d'inversion locale "elliptique" de [2] (theorem 2, p.686), moyennant la

Proposition 3. *Pour tout $\phi\in A_+$, le sous-espace fermé A constitue l'espace de Fréchet tangent aussi bien à A_+ en ϕ qu'à B_+ en $F(\phi)$, et $dF(\phi)$ est un automorphisme de A.*

Preuve (de la proposition 3). Fixons $\phi\in A_+$ et posons $L=dF(\phi)$. En dérivant au point ϕ la fonctionnelle constante

$$\psi\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})\to\int_V F(\psi)\sigma^m\equiv\int_V\sigma^m$$

nous voyons d'abord que L envoie $C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ dans A, lequel est bien l'espace tangent à B_+ en $F(\phi)$. L'opérateur différentiel L étant elliptique, sa surjectivité suit d'après la théorie de Fredholm-Riesz-Schauder (voir e.g. [1]. p.183–189) de l'orthogonalité dans l'espace de Hilbert $L^2(\sigma^m)$, du sous-espace A et du noyau de l'adjoint formel L^* de L. Rappelons que L^* est défini, pour tout couple $(\delta\phi,\delta\psi)$ de $C^\infty(V,\boldsymbol{R})$, par:

$$\int_V(\delta\phi)L^*(\delta\psi)\sigma^m=\int_V(\delta\psi)L(\delta\phi)\sigma^m.$$

Pour identifier le noyau de L^*, observons que pour tout $\delta\phi\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$

$$\int_V (\delta\phi)L^*(1)\sigma^m = \int_V L(\delta\phi)\sigma^m \equiv 0$$

puisque L est à valeurs dans A. Le noyau de L^* contient donc les fontions constantes. Mais d'après la théorie de Fredholm-Riesz-Schauder [1] (p.187), les noyaux de L et L^* ont même dimension, et celle-ci vaut 1 d'après la remarque 1. Donc le noyau de L^* est exactement constitué des fonctions constantes: l'orthogonalité requise entre ce noyau et A dans $L^2(\sigma^m)$ a donc bien lieu. Etant surjective, et évidemment continue, l'application linéaire $L: A \to A$ est *ouverte* (classique). En outre, cette application est *injective* d'après la remarque 1. C'est donc bien un automorphisme $\therefore$

En particulier le théorème 2 montre que l'application $F: A_+ \to B_+$ est *ouverte*, et il permet d'affiner le résultat du théorème 1 comme suit:

Corollaire 1. *Si $\omega \in [\sigma]^m$ est suffisament proche de σ^m en topologie C^∞, la structure presque-complexe J permet d'en définir la racine extérieure m-ième de manière (unique et) différentiable par rapport à ω (via l'équation (1′) et en contraignant ϕ à rester dans A).*

4. Discussion de la surjectivité globale de F

Le théorème 2 répond donc oui à la question de Gromov posée section 2, mais seulement de manière *locale*. Posée globalement, cette question va maintenant recevoir une réponse nuancée, dont la remarque 2 constituait un premier indice. La preuve du théorème 3 utilisera des notions et des notations (choix de bons repères locaux et d'une bonne connexion en présence de la structure presque-complexe J) indispensables pour calculer des expressions locales significatives de $\Sigma(\phi)$ et de $F(\phi)$, et au sujet desquelles on voudra bien se reporter systématiquement à l'appendice 1 ci-après.

Théorème 3. *Si la structure presque-complexe J est intégrable, l'opérateur $F: A_+ \to B_+$ est surjectif. Réciproquement si F est surjectif et si $m=2$, la structure J doit être intégrable.*

Preuve. Supposons J intégrable. La différentielle extérieure d sur V se scinde alors en deux parties, d' et d'', d'ordre respectif (1,0) et (0,1), qui vérifient les relations

$$d'^2=0, \qquad d''^2=0, \qquad d'd''+d''d'=0$$

(voir [5], p.267), de sorte que l'opérateur différentiel agissant sur les fonctions

$$d^{\prime}Jd = i(d''d' - d'd'') = -2i\,d'd''$$

est purement de type (1,1). Ainsi (cf. appendice 1): $\Sigma = H$ et $F = F_0$, en accord avec la proposition 5 puisqu'ici, compte-tenu de (2):

$$J \text{ intégrable} \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \tau=0 \Rightarrow \forall j>0, \quad F_j=0.$$

D'après le théorème de Newlander-Nirenberg étendu au cadre C^∞ [7], nous pouvons disposer d'un atlas de V constitué de cartes à valeurs dans $\boldsymbol{C}^m$ dont chaque coordonnée complexe z vérifie: $d''z=0$. Les changements de cartes de cet atlas sont *holomorphes* (au sens usuel). Dans cet atlas, l'opérateur $G(\psi) := F(-\psi/2)$ n'est autre que l'opérateur non-linéaire elliptique de type *Monge-Ampère complexe* dont la surjectivité est attestée par le théorème 1 de [9] (voir [9] p.362–363). L'opérateur F est donc bien surjectif et la première partie du théorème 3 est acquise.

Pour la seconde partie du théorème 3, raisonnons *par l'absurde* en supposant J non intégrable, $m=2$, et en construisant un élément de B_+ non atteint par F sur A_+. Mon idée est la suivante: mettre en évidence une fonction ϕ_0 située sur la *frontière* de l'ouvert A_+ dans A et telle que $F(\phi_0) \in B_+$. Les considérations exposées dans la remarque 3 et la preuve de la proposition 2 montrent que $F(\phi_0)$ ne peut être l'image par F d'aucun élément de A_+. En effet, si $\phi_1 \in A_+$ vérifie $F(\phi_1) = F(\phi_0)$, alors pour tout $t \in]0,1]$, $\phi_t = [t\phi_1 + (1-t)\phi_0]$ est dans A_+ et la preuve de la proposition 2 s'applique, conduisant à l'égalité absurde $\phi_1 = \phi_0$. Il nous reste donc seulement à construire sur V une telle fonction ϕ_0.

Commençons par énoncer une définition auxiliaire.

DEFINITION 3. Soit (V,J) une variété presque-complexe compacte et soit Σ une 2-forme J-positive sur V. Pour toute fonction non constante $\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$, *l'amplitude de positivité* de ϕ relativement à (J et) Σ est le réel:

$$a_\Sigma(\phi) = \sup\{s \in]0,\infty[,\ (\Sigma + s\,d^{\prime}Jd\phi) \quad \text{est } J\text{-positive sur } V\}.$$

REMARQUE 4. La variété V étant compacte, il est facile de s'assurer à l'aide du principe du maximum de Hopf [4] que l'amplitude de positivité d'une fonction est *infinie* si et seulement si cette fonction est *constante*.

REMARQUE 5. Etendons de manière évidente la notation C_+^∞ en y précisant la 2-forme J-positive de base: il est alors clair que pour toute fonction $\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ non constante, la fonction *amplifiée* $a_\Sigma(\phi)\phi$ se trouve sur la *frontière* de $C_+^\infty(\Sigma)$.

Passons à la construction de ϕ_0. J n'étant pas intégrable, de l'expression (4) de τ (appendice 1) suit l'existence de $(x_0,\phi) \in V \times A$ tel que $\tau(\phi)(x_0) \neq 0$. Quitte à multiplier ϕ par un réel positif inférieur à $a_\sigma(\phi)$, nous pouvons prendre ϕ dans

A_+ sans altérer la précédente condition au point x_0 (car l'opérateur τ est *linéaire*). Désormais le couple (x_0,ϕ) est ainsi fixé; en outre, $m=2$.

Au voisinage de x_0 sur V, prenons un champ de repères complexes adapté (e_1,e_2) tel que la matrice de $h(\phi)$ (appendice 1, rq. 7) y soit *diagonale* au point x_0; soient (λ_1,λ_2) les valeurs propres (réelles positives) de cette matrice. Prenons une carte de V centrée en x_0 à valeurs dans $\boldsymbol{C}^2 : x\in V \to z\in \boldsymbol{C}^2$, telle qu'au point x_0 :

$$\partial/\partial z^\alpha = e_\alpha, \qquad \alpha=1,2.$$

Fixons deux réels positifs r et ε assez petits pour que, sur

$$B(r) := \{x\in V,\ |z^1|^2+|z^2|^2 \leqq r^2\}.$$

l'on ait: $|\tau(\phi)|>2\varepsilon$, en notant $|\tau(\phi)|$ le module de la composante stricte de la (2,0)-forme complexe $\tau(\phi)$ (module *indépendant* du choix du repère complexe adapté). Soit $\theta\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ une fonction-plateau égale à 1 sur $B(r/2)$, nulle hors de $B(r)$, et soit $\psi\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ *globalement* définie par

$$\psi := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\theta(z)\,(\lambda_1|z^1|^2+\lambda_2|z^2|^2) & \text{sur} \quad B(r) \\ 0 \quad \text{hors de} \quad B(r). \end{cases}$$

Un calcul de routine de l'expression de $d\,{}^tJd\psi(x_0)$ dans la carte z montre que $H(\phi+\psi)(x_0)=0$. Pour $R\in[1,\infty[$, la fonction

$$\psi_R := \begin{cases} R^{-2}\psi(Rz) & \text{sur} \quad B(r/R) \\ 0 \quad \text{hors de} \quad B(r/R) \end{cases}$$

coïncide avec ψ dans $B(r/2R)$. Ainsi aura-t'on toujours

$$H(\phi+\psi_R)(x_0)=0. \tag{2}$$

Simultanément, comme

$$d\psi_R(z)=R^{-1}d\psi(Rz),$$

on pourra trouver $R\geqq 1$ assez grand pour que sur $B(r/R)$: $|\tau(\psi_R)|<\varepsilon$. Fixons désormais un tel réel R. Ce choix implique

$$|\tau(\phi+\psi_R)|>\varepsilon \quad \text{sur} \quad B(r/R). \tag{3}$$

Par addition d'une constante convenable, nous projetons ψ_R sur A sans altérer les propriétés (2) et (3); notons encore abusivement ψ_R cette projection.

D'après (2),

$$a_{\Sigma(\phi)}(\psi_R) \leqq 1.$$

Donc (3) reste valide en y remplaçant ψ_R par: $a_{\Sigma(\phi)}(\psi_R)\psi_R$. Prenons

$$\phi_0 := \phi + a_{\Sigma(\phi)}(\psi_R)\psi_R$$

et vérifions pour ce choix les propriétés requises (cf. *supra*).

D'une part, ϕ_0 se trouve bien dans l'espace vectoriel A, car ϕ et ψ s'y trouvent. D'autre part, l'introduction de $a_{\Sigma(\phi)}(\psi_R)$ dans l'expression de ϕ_0 implique (voir remarque 5) que ϕ_0 est bien située sur la *frontière* de $A_+ = A_+(\sigma)$. Nous en déduisons que sur V:

$$F_0(\phi_0) \geqq 0,$$

comme il ressort des calculs de l'appendice 3 ci-après. En outre, d'après ces mêmes calculs,

$$F_1(\phi_0) = |\tau(\phi_0)|^2,$$

et grâce à (3), nous avons sur $B(r/R)$:

$$F_1(\phi_0) > \varepsilon^2.$$

Ainsi sur $B(r/R)$, compte-tenu de la proposition 5 (appendice 1):

$$F(\phi_0) \geqq F_1(\phi_0) > 0,$$

et hors de $B(r/R)$: $F(\phi_0) \equiv F(\phi) > 0$. On a donc bien: $F(\phi_0) \in B_+$ $\therefore$

COMMENTAIRE. Lorsque $m > 2$, on ne peut plus construire ϕ_0 par la méthode précédente car τ possède *plusieurs* composantes strictes et la non-annulation de $\tau(\phi)(x_0)$ implique seulement celle *d'une seule* de ses composantes en x_0; la proposition 5 montre alors *que c'est pour* $j=1$ qu'il faut établir la positivité de $F_j(\phi_0)$ sur $B(r/R)$. Mais le paramètre R ne permet plus de propager cette positivité (aisément obtenue au point x_0) à la boule fermée $B(r/R)$, car il est sans effet sur la taille des dérivées *secondes* de ψ_R.

REMARQUE 6. Le défaut de surjectivité globale démontré au théorème 3 persiste en dimension $2m > 4$ dans toute situation "produit": $(V, \sigma, J) = (V' \times V'', \sigma' + \sigma'', J' + J'')$ où V' est de dimension 4 et J' non intégrable. Il suffit en effet de considérer comme "fonction ϕ_0" (cf. *supra*) sur $V' \times V''$, toute fonction ϕ_0 construite sur V'.

Le théorème 3 et la remarque 6 conduisent à poser la

CONJECTURE. L'opérateur $F: A_+ \to B_+$ est surjectif si et seulement si la structure presque-complexe J est intégrable.

Appendice 1

Bien que cette section ne fasse appel qu'à des notions classiques (voir par exemple [5]) j'ai préféré y inclure de brèves explications afin d'en rendre la lecture autonome.

Scindages déterminés par J

L'extension par $\boldsymbol{C}$-linéarité de la structure presque-complexe J au fibré tangent complexifié $TV\otimes\underline{C}$ détermine un scindage de $TV\otimes\underline{C}$ en deux sous-fibrés, conjugués complexes l'un de l'autre, noté

$$TV\otimes \boldsymbol{C}=T^{1,0}+T^{0,1},$$

tels que la matrice de J relativement à ce scindage s'écrive:

$$J=i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

en désignant par I le morphisme identité de chaque sous-fibré. Par dualité, on obtient un scindage du fibré cotangent complexifié dont, en particulier, le carré extérieur peut s'écrire

$$\wedge^2 T^*V\otimes\underline{C}=T_{2,0}\oplus T_{1,1}\oplus T_{0,2}.$$

Désignons par $p_{2,0}$, $p_{1,1}$ et $p_{0,2}$ les morphismes de projection correspondants, et considérons les opérateurs différentiels τ et H qui, à toute fonction réelle lisse ϕ, associent les sections lisses respectives de $T_{2,0}$ et de $T_{1,1}$ définies par:

$$\tau(\phi):=p_{2,0}[\Sigma(\phi)],\ H(\phi):=p_{1,1}[\Sigma(\phi)].$$

Soulignons un fait élémentaire mais important, dont le lecteur pourra aisément s'assurer par lui-même.

Proposition 4. *Pour tout $\phi\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$, la positivité de $\Sigma(\phi)$ équivaut à celle de $H(\phi)$ ("positivité" s'entend relativement à J).*

Soit $[m/2]$ la partie entière du réel $m/2$. Pour chaque $j\in\{0,\cdots,[m/2]\}$ considérons l'opérateur différentiel non-linéaire, allant de $C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ dans lui-même, défini par la relation:

$$F_j\sigma^m=\frac{m!}{(j!)^2(m-2j)!}\tau^j\wedge\bar{\tau}^j\wedge H^{m-2j}.$$

La proposition suivante découle de la preuve du lemme de positivité objet de l'appendice 3 (cf. *infra*).

Proposition 5. *L'opérateur F admet la décomposition*:

$$F = F_0 + \cdots + F_{[m/2]},$$

où, pour tout $\phi \in C^\infty_+$: $F_0(\phi) > 0$ *et pour tout* $j \in \{0, \cdots, [m/2]\}$, $F_j(\phi) \geqq 0$.

Pour obtenir des expressions géométriquement significatives de τ et de H, permettant de calculer les opérateurs F_j, il nous faut introduire de bons repères locaux et une bonne connexion.

Repères locaux de $T^{1,0}$ adaptés à (σ, J)

Ayant choisi la structure presque-complexe J adaptée à la 2-forme σ (cf. *supra*), le 2-tenseur h défini par $h := \sigma(\cdot, J.)$ s'avère être une métrique riemannienne pour laquelle le morphisme J est une transformation *orthogonale*. En outre, notant que $h(J., \cdot) \equiv \sigma$, on voit que pour tout vecteur tangent v, les vecteurs v et Jv sont *orthogonaux* pour h. Cette remarque permet de construire des champs de repères locaux de TV "adaptés" à (σ, J), en particulier orthonormés pour h. En effet, partant d'un champ de vecteurs unitaires local, ε_1, on obtient le couple orthonormé $(\varepsilon_1, J\varepsilon_1)$, qui engendre un champ local dc 2-sous-espaces π_1. Puis prenant un champ local de vecteurs unitaires orthogonal à π_1, ε_2, on obtient le quadruple orthonormé $(\varepsilon_1, J\varepsilon_1, \varepsilon_2, J\varepsilon_2)$, lequel engendre un champ local de 4-sous-espaces π_2. Répétant m fois ce procédé, on aboutit à un champ local de repères orthonormés de TV de la forme:

$$(\varepsilon_1, J\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, J\varepsilon_m).$$

Considérant ce champ comme champ de repères local de $TV \otimes \underline{C}$, on lui préfère le nouveau champ (dit "complexe adapté")

$$(e_1, \cdots, e_m, \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m)$$

où la barre indique la conjugaison complexe et où, pour tout $n \in \{1, \cdots, m\}$, on pose

$$e_n := (\varepsilon_n - iJ\varepsilon_n)/\sqrt{2},$$

car, l'extension $\boldsymbol{C}$-linéaire de J à $TV \otimes \underline{C}$ vérifiant, pour tout n,

$$Je_n = ie_n,$$

on voit que $(e_1, \cdots, e_m)$ est un champ de repères local de $T^{1,0}$. Soit $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ le champ de corepères *dual*. En convenant de sommer de 1 à m sur les indices muets répétés, les extensions $\boldsymbol{C}$-linéaires de J, h et σ s'écrivent localement:

$$J=i(\theta^\alpha\otimes e_\alpha-\bar\theta^\alpha\otimes\bar e_\alpha)$$
$$h=\theta^\alpha\otimes\bar\theta^\alpha+\bar\theta^\alpha\otimes\theta^\alpha$$
$$\sigma=h(J.,\cdot)=i\theta^\alpha\wedge\bar\theta^\alpha.$$

Connexion sur $T^{1,0}$ adaptée à (J,h)

Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de h. Son extension par C-linéarité s'écrit dans le champ de repères local précédent:

$$\nabla e_\alpha=\omega_\alpha^\beta\otimes e_\beta+\omega_\alpha^{\bar\beta}\otimes\bar e_\beta$$
$$\nabla\bar e_\alpha=\omega_{\bar\alpha}^\beta\otimes e_\beta+\omega_{\bar\alpha}^{\bar\beta}\otimes\bar e_\beta,$$

où, ∇ étant réelle, h parallèle pour ∇ et les repères adaptés à J et h, les 1-formes locales ω vérifient les relations:

$$\omega_{\bar\alpha}^{\bar\beta}=\bar\omega_\alpha^\beta,\quad \omega_{\bar\alpha}^\beta=\bar\omega_\alpha^{\bar\beta},$$
$$\omega_\alpha^\beta+\omega_{\bar\beta}^{\bar\alpha}=0,\quad \omega_{\bar\alpha}^\beta+\omega_{\bar\beta}^\alpha=0.$$

La connexion ∇ étant dépourvue de torsion, son premier groupe d'équations de structure s'écrit simplement:

$$d\theta^\alpha=-(\omega_\beta^\alpha\wedge\theta^\beta+\omega_{\bar\beta}^\alpha\wedge\bar\theta^\beta).$$

On définit (voir [5], p.236–237) une connexion linéaire ∇^* sur le fibré $T^{1,0}\to V$, dite *adaptée* à h et J, par la formule

$$\nabla^*e_\alpha=\omega_\alpha^\beta\otimes e_\beta.$$

Le premier groupe d'équations de structure de ∇^* s'écrit alors:

$$d\theta^\alpha=-\omega_\beta^\alpha\wedge\theta^\beta+\Theta^\alpha$$

en désignant par

$$\Theta=\Theta^\alpha\otimes e_\alpha,$$

la torsion de ∇^* qui représente une 2-forme globale sur $TV\otimes\underline{C}$ à valeurs dans $T^{1,0}$. Le premier groupe d'équations de structure de ∇, rappelé ci-dessus, implique

$$\Theta^\alpha\equiv-\omega_{\bar\beta}^\alpha\wedge\bar\theta^\beta,$$

donc ∇^* vérifie

$$p_{2,0}(\Theta^\alpha)=0.$$

D'après le critère de Frobenius (dans la version d'Elie Cartan), l'intégrabilité du sous-fibré

$$\begin{tikzcd} T^{1,0} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & TV\otimes \underline{C} \arrow[d] \\ & V \end{tikzcd}$$

résulte de l'annulation de la 2-forme $t=t^\alpha\otimes e_\alpha$, où

$$t^\alpha := p_{0,2}(\Theta^\alpha).$$

Cette 2-forme t n'est autre que la *torsion* de la structure presque-complexe J. Son annulation revêt pour V deux significations: l'une différentielle, puisqu'elle est équivalente à l'existence sur V d'un *atlas holomorphe* relativement à J (théorème de Newlander-Nirenberg [7]); l'autre topologique, puisqu'alors V est *Kählérienne*, donc ses nombres de Betti d'ordre impair sont nécessairement *pairs*. En introduisant des symboles de Christoffel (relatifs à la métrique h), t s'écrit localement

$$t^\alpha = \Gamma^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma}\bar\theta^\beta\wedge\bar\theta^\gamma.$$

Nous poserons: $s=\Theta-t$, de sorte que

$$s=s^\alpha\otimes e_\alpha = p_{1,1}(\Theta^\alpha)\otimes e_\alpha.$$

Calcul des expressions locales de τ et de H

Pour toute fonction $\phi\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$, nous pouvons à présent calculer dans un champ de repères complexe adapté et avec la connexion adaptée ∇^*:

$$d\phi = \phi_\alpha\theta^\alpha + \bar\phi_\alpha\bar\theta^\alpha$$
$${}^tJd\phi = i(\phi_\alpha\theta^\alpha - \bar\phi_\alpha\bar\theta^\alpha),$$

puis,

$$d\phi_\alpha = \phi_{\alpha\beta}\theta^\beta + \phi_{\alpha\bar\beta}\bar\theta^\beta + \phi_\beta\omega^\beta_\alpha.$$

De l'équivalence

$$d^2\phi = 0 \Leftrightarrow -d(\bar\phi_\alpha\bar\theta^\alpha) = d(\phi_\alpha\theta^\alpha),$$

nous déduisons

$$d\,{}^tJd\phi = 2i\ d(\phi_\alpha\theta^\alpha)$$

c'est-à-dire

$$d\,{}^tJd\phi = 2i\ (d\phi_\alpha\wedge\theta^\alpha + \phi_\alpha d\theta^\alpha).$$

Utilisant les équations de structure de ∇^*, nous trouvons

$$d\mathcal{J}d\phi = 2i\ (\phi_{\alpha\beta}\theta^\beta \wedge \theta^\alpha + \phi_{\alpha\bar\beta}\bar\theta^\beta \wedge \theta^\alpha + \phi_\alpha \Theta^\alpha).$$

Enfin, la réalité de $d\mathcal{J}d\phi$ combinée à l'observation: $p_{2,0}(\Theta^\alpha) = 0$ faite plus haut, fournit aussitôt l'identité

$$\phi_{\alpha\beta}\theta^\beta \wedge \theta^\alpha \equiv -\bar\phi_\alpha \bar t^\alpha.$$

Ainsi nous obtenons (voir plus haut la définition de τ et H):

(4)
$$\tau(\phi) = -2i\bar\phi_\alpha \bar t^\alpha$$
$$H(\phi) = i[(\delta_{\alpha\beta} - 2\phi_{\alpha\bar\beta})\theta^\alpha \wedge \bar\theta^\beta + 2\phi_\alpha s^\alpha],$$

soit encore, en faisant apparaître certains symboles de Christoffel relatifs à la métrique h (les composantes de la 2-forme s en repère complexe adapté):

(5)
$$H(\phi) = i(\delta_{\alpha\beta} - 2\phi_{\alpha\bar\beta} - 2\phi_\gamma \Gamma^\gamma_{\bar\beta\alpha})\theta^\alpha \wedge \bar\theta^\beta.$$

REMARQUE 7. Considérons l'opérateur différentiel $\phi \to h(\phi)$ défini, pour tout couple de vecteurs tangents (u,v), par:

$$h(\phi)(u,v) := \tfrac{1}{2}[\Sigma(\phi)(u,Jv) + \Sigma(\phi)(v,Ju)].$$

Notons que

$$h(\phi)(u,v) \equiv \tfrac{1}{2}[H(\phi)(u,Jv) + H(\phi)(v,Ju)],$$

donc l'expression de h en repère complexe adapté se déduit aussitôt de celle de H; elle vaut

$$h(\phi) = (\delta_{\alpha\beta} - 2\phi_{\alpha\bar\beta} - 2\phi_\gamma \Gamma^\gamma_{\bar\beta\alpha})(\theta^\alpha \otimes \bar\theta^\beta + \bar\theta^\beta \otimes \theta^\alpha).$$

Pour toute fonction $\phi \in C^\infty_+$, $h(\phi)$ est une *métrique hermitienne* relativement à J, et sa matrice $m \times m$ en repère complexe adapté

$$(\delta_{\alpha\beta} - 2\phi_{\alpha\bar\beta} - 2\phi_\gamma \Gamma^\gamma_{\bar\beta\alpha})$$

est hermitienne définie positive. Réciproquement, la proposition 4 montre que si $\phi \in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ est telle que $h(\phi)$ soit une métrique hermitienne sur (V,J), alors $\phi \in C^\infty_+$ $\therefore$

Appendice 2

L'objet de ce bref appendice est d'établir le résultat de *solubilité infinitésimale* requis au début de la section 3.

Nous allons raisonner au voisinage d'un point $x \in V$ arbitrairement fixé; on s'y donne une fonction positive f: il s'agit de construire une fonction réelle u telle que $\Sigma(u)$ soit J-positive en x et que $F(u)(x)=f(x)$.

Prenons un champ local de repères complexes adapté $(e_1,\cdots,e_m)$ et une carte à valeurs dans $\boldsymbol{C}^m$ telle que:

$$\forall\alpha=1,\cdots,m,\quad z^\alpha(x)=0,\quad \partial/\partial z^\alpha(x)=e_\alpha(x).$$

Calculons dans cette carte l'expression de $d\,{}^tJd\phi(x)$ où $\phi=|z^1|^2$; on trouve

$$d\,{}^tJd\phi(x)=2i\bar\theta^1\wedge\theta^1.$$

Donc pour tout réel t, on a

$$\Sigma(t\phi)(x)=i[(1-2t)\theta^1\wedge\bar\theta^1+\sum_{\alpha>1}\theta^\alpha\wedge\bar\theta^\alpha]$$

et $F(t\phi)(x)=(1-2t)$. Ainsi $u=t\phi$ convient avec $(1-2t)=f(x)>0$ $\therefore$

Appendice 3

L'objet de cet appendice est d'établir un lemme de positivité.

Lemme. *Soient $\phi\in C^\infty_+$, π une 1-forme (réelle) sur V et $p\in\{0,\cdots,m-1\}$. Considérons la fonction $f\in C^\infty(V,\boldsymbol{R})$ définie par:*

$$f\sigma^m=({}^tJ\pi)\wedge\pi\wedge\sigma^{m-1-p}\wedge[\Sigma(\phi)]^p.$$

Alors f est non-négative sur V, et positive en tout point où π est non nulle.

Pour la preuve de la proposition 1 (section 2), on utilise le lemme avec $p=m-1$. La positivité de $F(\phi)$ utilisée section 3, et la preuve de la proposition 5 (appendice 1), se lisent sur le calcul effectué ci-après de $[\Sigma(\phi)]^p$ en prenant $p=$ m.

Preuve du lemme. Fixons $x\in V$ et prenons au voisinage de x un champ de repères complexes *adapté* à J et à $h=\sigma(\cdot,J.)$ (cf. appendice 1). Choisissons ce champ $(e_1,\cdots,e_m)$ tel qu'au point x soient vérifiées les deux conditions suivantes ($|\cdot|$ désigne la norme dans la métrique h et $(\theta^1,\cdots,\theta^m)$ le corepère dual):

(i) $\pi/|\pi|=(\theta^m+\bar\theta^m)/\sqrt{2}$:

(ii) Posons: $H(\phi)=iH_{\alpha\bar\beta}\theta^\alpha\wedge\bar\theta^\beta$, la matrice $(H_{\alpha\bar\beta})$ étant

hermitienne définie positive. Alors, la sous-matrice obtenue au point x en prenant $(\alpha,\beta)\in\{1,\cdots,m-1\}^2$ est *diagonale*.

Pour prouver le lemme, notons d'abord qu'en x, d'après (i):

$$({}^tJ\pi)\wedge\pi=i|\pi|^2\theta^m\wedge\bar\theta^m.$$

Rappelons ensuite que σ s'écrit simplement

$$\sigma=i\theta^\alpha\wedge\bar\theta^\alpha.$$

Ainsi, en posant $q=(m-1-p)$ et en sommant sur les arrangements en q éléments distincts $(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$ de l'ensemble $\{1,\cdots,m-1\}$:

$$({}^tJ\pi)\wedge\pi\wedge\sigma^q\wedge[\Sigma(\phi)]^p$$
$$=i^{m-p}|\pi|^2\theta^m\wedge\bar\theta^m\wedge(\theta^{\alpha_1}\wedge\bar\theta^{\alpha_1})\wedge\cdots\wedge(\theta^{\alpha_q}\wedge\bar\theta^{\alpha_q})\wedge[\Sigma(\phi)]^p.$$

Pour chaque combinaison non ordonnée $(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$, le calcul correspondant de $[\Sigma(\phi)]^p$ en x va donc s'effectuer *modulo* l'ideál engendré par les $2(m-p)$ formes $(\theta^{\alpha_1},\bar\theta^{\alpha_1},\cdots,\theta^{\alpha_q},\bar\theta^{\alpha_q},\theta^m,\bar\theta^m)$. Les égalités *modulo* cet idéal seront notées: $\equiv\mathrm{mod}(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$. Rappelons la décomposition (cf. appendice 1)

$$\Sigma(\phi)=\tau(\phi)+H(\phi)+\bar\tau(\phi)$$

et utilisons la formule du binôme de Newton (sans précaution de signe puisque le produit extérieur des 2-formes est *commutatif*); nous obtenons, en calculant $\mathrm{mod}(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$,

$$[\Sigma(\phi)]^p\equiv\sum_{k=0}^{[p/2]}\frac{p!}{(k!)^2(p-2k)!}[\tau(\phi)]^k\wedge[\bar\tau(\phi)]^k\wedge[H(\phi)]^{p-2k}$$

ayant observé chemin faisant que les termes où $\tau(\phi)$ et $\bar\tau(\phi)$ n'ont pas le *même* exposant sont nécessairement $\equiv 0\ \mathrm{mod}(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$. D'après la condition (ii), il vient en posant $r=p-2k$ et en sommant sur les arrangements en r éléments distincts $(\beta_1,\cdots,\beta_r)$ du complémentaire de $(\alpha_1,\cdots,\alpha_q,m)$ dans $\{1,\cdots,m\}$:

$$[\Sigma(\phi)]^p\equiv\sum_{k=0}^{[p/2]}\frac{p!}{(k!)^2(p-2k)!}i^rH_{\beta_1\bar\beta_1}\cdots H_{\beta_r\bar\beta_r}\theta^{\beta_1}\wedge\bar\theta^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\beta_r}\wedge\bar\theta^{\beta_r}\wedge[\tau(\phi)]^k\wedge[\bar\tau(\phi)]^k$$

toujours $\mathrm{mod}(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$. Rappelons que les $H_{\beta\bar\beta}$ sont *réels positifs* (cf. condition (ii)).

REMARQUE 8. Lorsque $k=0$, fixons $(\beta_1,\cdots,\beta_p)$. La somme des termes correspondants dans

$$({}^tJ\pi)\wedge\pi\wedge\sigma^q\wedge[\Sigma(\phi)]^p(x)$$

est égale à

$$q!p!i^m|\pi|^2H_{\beta_1\bar\beta_1}\cdots H_{\beta_p\bar\beta_p}\theta^1\wedge\bar\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m\wedge\bar\theta^m$$
$$=\frac{p!(m-1-p)!}{m!}|\pi|^2H_{\beta_1\bar\beta_1}\cdots H_{\beta_p\bar\beta_p}\sigma^m.$$

Cette somme est donc *positivement* proportionnelle à σ^m $\therefore$

Pour évaluer la contribution des termes où $k\neq 0$, nous sommes ainsi ramenés à calculer $\operatorname{mod}(\alpha_1,\cdots,\alpha_q,\beta_1,\cdots,\beta_r)$ l'expression

$$[\tau(\phi)]^k\wedge[\bar{\tau}(\phi)]^k.$$

Posons

$$\tau(\phi)=i\tau_{\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta,$$

et, sans restreindre la généralité, supposons que le complémentaire de $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_q,$ $\beta_1,\cdots,\beta_r,m)$ dans $\{1,\cdots,m\}$ soit l'ensemble $\{1,\cdots,2k\}$. Il vient alors, en calculant $\operatorname{mod}(\alpha_1,\cdots,\beta_r)$ et en sommant sur les permutations s et s' de l'ensemble $\{1,\cdots,2k\}$, de *signatures* respectives $\varepsilon(s)$ et $\varepsilon(s')$:

$$[\tau(\phi)]^k\wedge[\bar{\tau}(\phi)]^k\equiv(2k)!\sum_{s,s'}\varepsilon(s)\varepsilon(s')\tau_{s(1)s(2)}\cdots\tau_{s(2k-1)s(2k)}\bar{\tau}_{s'(1)s'(2)}\cdots\bar{\tau}_{s'(2k-1)s'(2k)}$$
$$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^{2k}\wedge\bar{\theta}^1\wedge\cdots\wedge\bar{\theta}^{2k}.$$

Pour tout entier N, on établit aisément la formule:

$$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^N\wedge\bar{\theta}^1\wedge\cdots\wedge\bar{\theta}^N$$
$$=(-1)^{N(N-1)/2}\theta^1\wedge\bar{\theta}^1\wedge\cdots\wedge\theta^N\wedge\bar{\theta}^N,$$

que l'on utilisera ci-après avec $N=2k$. En introduisant la notation abrégée

$$T(s):=\tau_{s(1)s(2)}\cdots\tau_{s(2k-1)s(2k)},$$

et en tenant compte du caractère *réel* de l'expression

$$[\tau(\phi)]^k\wedge[\bar{\tau}(\phi)]^k,$$

nous égalons finalement cette dernière, $\operatorname{mod}(\alpha_1,\cdots,\beta_r)$, à:

$$i^{2k}(2k)!\left\{\sum_{s,s'}\varepsilon(s)\varepsilon(s')\frac{1}{2}[T(s)\bar{T}(s')+\bar{T}(s)T(s')]\right\}\theta^1\wedge\bar{\theta}^1\wedge\cdots\wedge\theta^{2k}\wedge\bar{\theta}^{2k}.$$

Observons que la somme entre accolades peut encore s'écrire

$$\sum_s |T(s)|^2 + \sum_{s \neq s'} \varepsilon(s)\varepsilon(s') \operatorname{Re}[T(s)\bar{T}(s')]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s \neq s'} \{|T(s)|^2 + |T(s')|^2 + 2\varepsilon(s)\varepsilon(s') \operatorname{Re}[T(s)\bar{T}(s')]\}.$$

Or, pour tout $(z,z') \in C^2$, l'expression

$$|z|^2 + |z'|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(zz') \geqq (|z| - |z'|)^2$$

est toujours *non-négative*. En récapitulant, nous trouvons que les termes de

$$({}^tJ\pi) \wedge \pi \wedge \sigma^q \wedge [\Sigma(\phi)]^p(x)$$

pour lesquels $k \neq 0$ sont *non-négativement* proportionnels à σ^m. Ce résultat joint à la remarque 8 apporte la preuve du lemme $\therefore$

Références

[1] L. Bers, F. John et M. Schechter: Partial Differential Equations, (3rd printing) American Math. Society (Lectures in applied math., vol. 3A).

[2] Ph. Delanoë: *Local inversion of elliptic problems on compact manifolds*, Math. Japonica **35** (1990) 679–692.

[3] D. DeTurck: *Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: local theory*, Inventiones Math. **65** (1981) 179–207.

[4] E. Hopf: *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differential gleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. K1. **19** (1927) 147–152.

[5] A. Lichnérowicz: Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Cremonese (Roma, 1955).

[6] J. Moser: *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286–294.

[7] A. Nijenhuis et W.B. Woolf: *Some integration problems in almost-complex and complex manifolds*, Annals of Math. **77** (1963) 424–489.

[8] A. Weinstein: *Lectures on symplectic manifolds*, American Math. Society 1977 (CBMS regional conference series in math. #29).

[9] S.-T. Yau: *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **XXXI** (1978) 339–411.

Université de Nice-Sophia Antipolis
Mathematiques, Parc Valrose
F-06108 NICE CEDEX 2
e-mail: delphi@math.unice.fr