Osaka Mathematical Journal
Vol. 6, No. 2, December, 1954

Sur Théorème d'Existence dans les Problèmes aux Limites pour l'Équation $\Delta u = F(x, u, \mathit{grad}\ u)$.

Par Seturo SIMODA

Dans le champ des équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique, l'éfficacité d'employer des fonctions très restreintes, soit hölderiennes, soit localement hölderiennes, soit remplissant la condition de Dini, était plus que suffisamment appréciée ; en effet, Jules Schauder, le glorieux mathématicien polonais, qui périt victime de la guerre, obtint autrefois plusieurs fruits intéressants en utilisant adroitement des fonctions hölderienne et des divers théorèmes topologiques tenant à ses mérites.

Toutefois, dans l'étude des équations non linéaires, en particulier, dans l'établissement de l'existence de ses solutions strictes au moyen du théorème des points fixes, il est (occasionnellement) désirable de se servir des fonctions localement hölderiennes en toute liberté. Mais l'emploi de l'espace se composant seulement des fonctions de telle nature ne nous amène jamais de résultat heureux, si bien qu'il est plutôt nécessaire à adopter un espace vectoriel qui enferme toutes les fonctions des espèces énoncées plus haut, en le munissant d'une topologie métrisable par les pseudonormes homogènes qui sont en réalité une sorte d'extension des normes hölderiennes employées autrefois par J. Schauder.[1]

Quoique tel espace se prête tout du moins à notre but présent de traiter l'équation au sujet, il y a une complication sérieuse en computations, laquelle nous force à la fin à utiliser un *laplacien généralisé* et à employer à la topologie seulement celle qui caractérise la convergence localement uniforme, et qui admet, à l'aide du premier, une grande commodité de n'exiger, sur le second membre de l'équation, d'autre hypothèse que continuité.

Il me semble qu'il y a divers questions dans l'amplification de cette méthode aux équations plus générales du type elliptique:

---

1) J. Schauder: *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Math. Zeits., 38 (1934), 257-282.

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x,\ u,\ \text{grad}\ u)\,;$$

je n'y touche point dans ce mémoire.

Avant d'entrer en l'exposé de cette recherche, je tient à remercier bien vivement de toutes leurs suggestions favorables Professeur M. Nagumo, et M. S. Mizohata.

§ 1. Espace $\boldsymbol{C}$ et $\hat{\boldsymbol{C}}$.

Fixons *une fois pour toutes* un domaine borné (non vide) dans l'espace euclidien à n-dimensions R^n $(n \geqq 2)$; nous le désignons toujours désormais par d ; sa frontière par d^* : $d^* = \bar{d} - d$.

On entend par $C(d)$ la totalité des fonctions réelles et continues, prescrites pour tout $x \in d$; c'est un espace linéaire au sens ordinaire.

Nous désignons par $\boldsymbol{C}$ le n-ple de $C(d)$, et par $\hat{\boldsymbol{C}}$ le $(n+1)$-ple de $C(d)$:

$$\boldsymbol{C} = C(d) \times \cdots \times C(d) \qquad (n\text{-ple})$$
$$\hat{\boldsymbol{C}} = C(d) \times \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}$ porte le gradient de fonction u

$$p = (p_1,\ \ldots\ldots,\ p_n) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots\ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \text{grad}\ u\,,$$

et $\hat{\boldsymbol{C}}$ la combinaison (u, p) ; le théorème des points fixes s'appliquera à $\hat{\boldsymbol{C}}$.

À chaque $g \in \boldsymbol{C}$, il correspond un champ vectoriel dans d $g(x) = (g_1(x),\ \ldots\ldots,\ g_n(x))$ biunivoquement ; nous désignons par $|g|$ le champ scalaire dans d

$$|g(x)| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n \{g_i(x)\}^2}\,,$$

qui appartient à $C(d)$. Si g est égale au gradient d'une fonction u continûment différentiable dans d, on peut écrire

$$|g(x)| = |\text{grad}\ u(x)| = \max\ \text{de}\ \left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right|\ \text{pour toute}\ \vec{s}\ ;\text{[2)]}$$

---

2) Quant à la différentiation, on rencontre, fréquemment dans ce mémoire, les notations suivantes : D'abord $\frac{d}{d\vec{s}}u(x)$ signifie la limite

$$\lim_{h \to +0} \frac{u(x+h\vec{s}) - u(x)}{h}$$

lorsqu'elle existe, $\vec{s}$ désignant un vecteur unitaire défini. C'est la dérivée dans la direction c'est la grandeur du grad $u(x)$.

Nous munissons tous les espaces $C(d)$, $\boldsymbol{C}$ et $\hat{\boldsymbol{C}}$ de la topologie qui caractérise la convergence localement uniforme, autrement dit, un voisinge (*convexe*) U de 0 de $C(d)$ (c'est-à-dire la fonction identiquement nulle dans d) et celui V de $0 = (0, \ldots, 0)$ de $\boldsymbol{C}$ sont comme suit :

$$U = U(\varepsilon, B) = \{f \in C(d) : |f(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{dans } B\}$$
$$V = V(\varepsilon, B) = \{g \in \boldsymbol{C} : |g(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{dans } B\},$$

où ε est un nombre > 0 et B un compact[3] $\subset d$; un voisinage (*convexe*) $\hat{V}$ de 0 de $\hat{\boldsymbol{C}}$ est le produit topologique des voisinages, pris arbitrairement un à un, des espaces composants ; si l'on diversifie ε et B, on obtient le système fondamental des voisinages de 0.[4]

Il est facile à voir que tels espaces sont tous métrisables, et que, pour qu'une suite dénombrablement illimitée $\{(f^{(m)}, g^{(m)}) = (f^{(m)}, g_1^{(m)}, \ldots, g_n^{(m)}) : m = 1, 2, \ldots\}$ dans $\hat{\boldsymbol{C}}$ converge vers 0 au sens de cet espace, il faut et suffit que toutes les suites $\{f^{(m)}\}$, $\{g_i^{(m)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ convergent vers 0 localement uniformément dans d simultanément.

$\vec{s}$ au point x. Ensuite, $\frac{d}{d\vec{s}}u(x)$ étant considérée comme fonction de x, on définit $\frac{d^2}{d\vec{t}\,d\vec{s}}u(x)$ par $\frac{d}{d\vec{t}}\left(\frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right)$, $\vec{t}$ désignant encore un vecteur unitaire défini. Tout de méme, on employe la notation $\frac{d^m}{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2 \cdots d\vec{s}_m}u(x)$ à désigner la dérivée ou différentiation du m-iéme ordre dans les directions $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2 \cdots$, $\vec{s}_m$,

Dire que u est continûment différentiable m fois dans un domaine d, c'est dire que, quelles que soient les directions $s_1, \vec{s}_2, \cdots, \vec{s}_m$, la dérivée $\frac{d^m}{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2 d\vec{s}_m}u(x)$ existe partout et est continue en x dans d.

Si u est continûment différentiable une fois dans d, $\frac{d}{d\vec{s}}u(x)$ est continue comme fonction de $(\vec{s}, x)$, oú x parcourt d et $\vec{s}$ est identifié avec le point d'intersection σ de la surface de l'hypersphère unitaire centré sur l'origine et la ligne droite qui passe par l'origine et se dirige dans la direction $\vec{s}$.

Parce que la surface de l'hypersphère est compact, $\left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right|$ atteint son maximum en $\vec{s}$, quand x est fixé ; la fonction (en x)

$$\text{max de } \left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right| \text{ pour toute } \vec{s}.$$

et donc encore continue en x.

3) Le mot *compact* signifie ensemble *compact-en-soi.*

4) On obtient ainsi les espaces vectoriels topologiques (Hausdorff) *à voisinage convexe* $C(d)$, $\boldsymbol{C}$ *et* $\hat{\boldsymbol{C}}$.

§ 2. Fonction de Green.

Nous supposons *toujours désormais* tous les points frontières de d sont réguliers pour d au sens de la théorie du potentiel[5]; cela admet l'existence de la fonction de Green (de la première espèce) $G(x, \xi)$ pour l'équation de Laplace; ce n'est autre que la fonction prescrites pour tout $(x, \xi) \in \bar{d} \times d$ sauf pour $x = \xi$ et jouit de l'expression

$$G(x, \xi) = e(x, \xi) + g(x, \xi),$$

où $e(x, \xi)$ est la fonction élémentaire pour l'équation de Laplace:

$$e(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega_n (n-2) |\xi - x|^{n-2}} & \text{(lorsque } n \geqq 3)^{6)} \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{|\xi - x|} & \text{(lorsque } n = 2); \end{cases}$$

$g(x, \xi)$, le terme compensateur, est bien régulière et harmonique en x dans d, et, lorsque x tend vers un point quelconque $s \in d^*$ la valeur de $G(x, \xi)$ tend vers zéro, quel que soit ξ fixe dans d; $G(x, \xi)$ jouit en résumé des propriétés suivantes:

(1) $G(x, \xi)$ est symétrique, et on peut donc dire qu'elle est prescrite pour tout $(x, \xi) \in d \times \bar{d}$ sauf pour $x = \xi$.

(2) $G(x, \xi)$ est indéfiniment différentiable en x sauf en $x = \xi$, et satisfait à l'équation de Laplace: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} G(x, \xi) = 0$.

(3) $G(x, \xi)$ et toutes ses dérivées en x sont mesurables en ξ dans d.

(4) Il se trouve une fonction $\phi \in C(d)$, non négative et telle que

$$\left. \begin{array}{r} |G(x, \xi)| \cdot |x - \xi|^{n-1} \\ \left| \dfrac{d}{d\vec{s}} G(x, \xi) \right| \cdot |x - \xi|^{n-1} \end{array} \right|$$

---

5) Voir par exemple, M. Brelot: *Famille de Perron et Problème de Dirichlet.* Acta literarum ac scientiarum, Szeged, **9** (1939), 133–153; Définition de p. 142.

6) ω_n désigne la surface de l'hypersphère unitaire à n-dimensions:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

$|\xi - x|$ désign la distance *euclidienne* entre les points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, à savoir

$$|\xi - x| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - x_i|^2}$$

De plus, on se sert dans la suite toutes notations vectorielles.

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{d^2}{d\vec{s}\,d\vec{t}} G(x, \xi)\right| \cdot |x-\xi|^n \\ \left|\dfrac{d^3}{d\vec{r}\,d\vec{s}\,d\vec{t}} G(x, \xi)\right| \cdot |x-\xi|^{n+1} \end{array}\right\} \leqq \phi(x)^{7)}$$

pour tout $(x, \xi) \in d \times d$ sauf pour $x = \xi$ quelles que soient $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$.

(5) La fonction

$$U(x) = \int_d G(x, \xi) d\xi \qquad (x \in d)$$

est indéfiniment différentiable dans d, et satisfait à l'équation de Poisson:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U(x) = 1 .$$

(6) $g(x, \xi)$ et toutes ses dérivées en x sont continues en (x, ξ) dans $\bar{d} \times d$.

On fond le lemme qui suit principalement sur les susdites propriétés (4) et (6).

Lemme 1: — *Soit* $\mu(x)$ *sommable et continue* (ou *localement vraiment bornée*)[8], *dans* d, *alors*

(i) *la fonction*

$$u(x) = \int_d \mu(\xi) G(x, \xi) d\xi \qquad (x \in d)$$

est continûment différentiable dans d:

$$\frac{d}{d\vec{s}} u(x) = \int_d \mu(\xi) \frac{d}{d\vec{s}} G(x, \xi) d\xi ,$$

(ii) *si* $0 < \alpha < 1$,

$$w(x) = \int_d \mu(\xi) \frac{d}{d\vec{s}} G(x, \xi) d\xi \qquad (x \in d)$$

est localement hölderienne dans d *de l'exposant* α.

La preuve de (i) est omise.

Preuve de (ii): — Soit x_0 un point arbitraire de d, et soit r_0 un nombre fixe tel que $0 < r_0 <$ dis (x_0, d^*)[9]; désignons par Σ_0 l'hyper-

---

7) Voil la note 2).

8) Dans n'importe quel compact $\subset d$, μ est bornée à un ensemble de mesure nulle prés.

9) dis (x_0, d^*) désigne la distance euclidienne entre le point x_0 et la frontière d^*.

sphère de rayon r_0 et de centre x_0, et par ϕ_0 et μ_0 les bornes supérieres de $\phi(x)$ et $|\mu(x)|$ dans Σ_0; posons

$$\theta_0 = \max \text{ de} \left| \frac{d^2}{d\vec{s}d\vec{t}} g(x, \xi) \right| \quad \text{pour toutes } \vec{s},\ \vec{t} \text{ et } (x, \xi) \in \overline{\Sigma}_0 \times \overline{d}\,^{10)}.$$

Si $|x-x_0| \leqq r_0$, en désignant par $\vec{t}$ le vecteur unitaire de $x'-x=\overrightarrow{xx'}$, on a

$$\begin{aligned} J_1 &= \left| \int_{\Sigma_0} \mu(\xi) \left\{ \frac{d}{d\vec{s}} g(x, \xi) - \frac{d}{d\vec{s}} g(x_0, \xi) \right\} d\xi \right| \\ &\leqq \mu_0 \int_{\Sigma_0} \int_0^{|x-x_0|} \left| \frac{d^2}{d\vec{t}d\vec{s}} g(x_0+\sigma\vec{t}, \xi) \right| d\sigma d\xi \\ &\leqq \theta_0\mu_0 \int_0^{|x-x_0|} d\sigma \cdot \int_{\Sigma_0} d\xi = \frac{\omega_n r_0^n \theta_0 \mu_0}{n} |x-x_0|. \end{aligned}$$

Or, pour tout α tel que $0<\alpha<1$, on a en général

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{d\vec{s}} e(x, \xi) - \frac{d}{d\vec{s}} e(x', \xi) \right| \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left| \frac{\cos(\vec{s}, x-\xi)}{|x-\xi|^{n-1}} - \frac{\cos(\vec{s}, x'-\xi)}{|x'-\xi|^{n-1}} \right| \\ &\leqq \frac{\big|\, |x-\xi|\cos(\vec{s}, x-\xi) - |x'-\xi|\cos(\vec{s}, x'-\xi) \big|}{\omega_n |x-\xi|^n} + \frac{1}{\omega_n} \left| \frac{|x'-\xi|}{|x-\xi|^n} - \frac{1}{|x'-\xi|^{n-1}} \right| \\ &= \frac{1}{\omega_n |x-\xi|^n} \left\{ \big|\, |x'-x| \cos(\vec{s}, x'-x) \big| + |x'-\xi| \cdot \left| 1 - \frac{|x-\xi|^n}{|x'-\xi|^n} \right| \right\} \\ &\leqq \frac{1}{\omega_n |x-\xi|^n} \left\{ |x'-x| + \big|\, |x'-\xi| - |x-\xi| \,\big| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x-\xi|^k}{|x'-\xi|^k} \right\} \\ &\leqq \frac{|x'-x|}{\omega_n |x-\xi|^n} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x-\xi|^k}{|x'-\xi|^k} \right) \\ &= \frac{|x'-x|}{\omega_n |x'-\xi|^{n-1} |x-\xi|} \left(\frac{|x'-\xi|^{n-1}}{|x-\xi|^{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x'-\xi|^{n-1-k}}{|x-\xi|^{n-1-k}} \right) \end{aligned}$$

Donc, si $0<|x'-\xi| \leqq |x-\xi|$, vu $\frac{1}{2}|x'-x| \leqq |x-\xi|$, il en résulte

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{d\vec{s}} e(x, \xi) - \frac{d}{d\vec{s}} e(x', \xi) \right| \\ &\leqq \frac{(n+1)|x'-x|^\alpha}{\omega_n |x'-\xi|^{n-1} |x-\xi|^\alpha} \left(\frac{2}{|x-\xi|} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{|x'-x|}{2} \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

10) $\frac{d^2}{d\vec{s}d\vec{t}} g(x, \xi)$ est continue comme foncton de $(\vec{s}, \vec{t}, x, \xi)$, et donc atteint sa maximum en un $(\vec{s}, \vec{t}, x, \xi)$.

$$\leq \frac{2^{1-\alpha}(n+1)|x'-x|^{\alpha}}{\omega_n |x'-\xi|^{n-1+\alpha}}, \text{ [11]}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} J_2 &= \left| \int_{\Sigma_0} \mu(\xi) \left\{ \frac{d}{d\vec{s}} e(x, \xi) - \frac{d}{d\vec{s}} e(x_0, \xi) \right\} d\xi \right| \\ &\leq \mu_0 \int_{\Sigma_0} \left| \frac{d}{d\vec{s}} e(x, \xi) - \frac{d}{d\vec{s}} e(x_0, \xi) \right| d\xi \\ &\leq \mu_0 \left\{ \int_{\Sigma_0 \text{ et } |x-\xi| \leq |x_0-\xi|} + \int_{\Sigma_0 \text{ et } |x_0-\xi| \leq |x-\xi|} \right\} \\ &\leq \frac{2^{1-\alpha}(n+1)\mu_0 |x-x_0|^{\alpha}}{\omega_n} \int_{\Sigma_0} \left\{ \frac{1}{|x-\xi|^{n-1+\alpha}} + \frac{1}{|x_0-\xi|^{n-1+\alpha}} \right\} d\xi \\ &\leq 2^{2-\alpha}(n+1)\mu_0 |x-x_0|^{\alpha} \int_0^{r_0} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha}} \\ &= \frac{2(n+1)\mu_0(2r_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha} |x-x_0|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Finalement, on voit que, lorsque $|x-x_0| \leq r_0/2$,

$$\begin{aligned} J_3 &= \left| \int_{d-\Sigma_0} \mu(\xi) \left\{ \frac{d}{d\vec{s}} G(x, \xi) - \frac{d}{d\vec{s}} G(x_0, \xi) \right\} d\xi \right| \\ &\leq \int_{d-\Sigma_0} |\mu(\xi)| \int_0^{|x-x_0|} \left| \frac{d^2}{d\vec{s}\, d\vec{t}} G(x_0+\sigma\vec{t}, \xi) \right| d\sigma d\xi \\ &\leq \phi_0 \int_{d-\Sigma_0} |\mu(\xi)| \int_0^{|x-x_0|} \frac{d\sigma}{|x_0+\sigma\vec{t}-\xi|^n} d\xi \\ &\leq \frac{\phi_0}{\left(\frac{r_0}{2}\right)^n} \int_{d-\Sigma_0} |\mu(\xi)|\, d\xi \int_0^{|x-x_0|} d\sigma \\ &\leq \frac{\phi_0 |x-x_0|}{\left(\frac{r_0}{2}\right)^n} \int_d |\mu(\xi)|\, d\xi . \end{aligned}$$

En conséquence, en tant que $|x-x_0| \leq r_0/2$, on a

$$\begin{aligned} |w(x)-w(x_0)| &\leq J_1+J_2+J_3 \\ &\leq \frac{2(n+1)(2r_0)^{1-\alpha}\mu_0}{1-\alpha} |x-x_0|^{\alpha} + \\ &+ \left[\frac{w_n r_0^n \theta_0 \mu_0}{n} + \frac{\phi_0}{\left(\frac{r_0}{2}\right)^n} \int_d |\mu(\xi)|\, d\xi \right] |x-x_0| \end{aligned}$$

11) Voir le mémoire de U. Dini: *Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième order.* Acta Math. **25** (1902), 185-230, spécialement pp. 191-195.

avec $0 < \alpha < 1$ (x_0 étant le point arbitraire de d), c. q. f. d.

Le lemme qui suit donnera un exemple d'ensemble qui est compact dans $\hat{C}$.

Lemme 2 : — *Soient β une fonction $\in L^1(d) \frown C(d)$*[12] *et* $\hat{H} = \{(u, p) = (u, p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$ *une partie de $\hat{C}$ jouissante des propriétés suivantes* :

1° $(u, p) \in \hat{H}$ *entraîne* $p = \mathrm{grad}\ u$.

2° Si $(u, p) \in \hat{H}$, *u admet l'expression*

$$u(x) = \int_d f(\xi) G(x, \xi) d\xi$$

avec une $f \in C(d)$ tell que

$$|f(x)| \leqq \beta(x) \qquad \textit{partout dans } d.$$

Alors, $\hat{H}$ est relativement compact dans $\hat{C}$; autrement dit, *si $\{(u^{(m)}, p^{(m)}) = (u^{(m)}, p_1^{(m)}, \ldots, p_n^{(m)}) : m = 1, 2, \ldots\}$ est une suite dans $\hat{H}$, on peut toujours en trouver une suite partielle qui converge vers un élément de $\hat{C}$ localement uniformément dans d*[13].

Preuve : — D'après le lemme précédent, la droiture des identités

$$p_i(x) = \int_d f(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} G(x, \xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour tout $(u, p) \in \hat{H}$ sont évidentes, où f désigne la fonction qui figure dans l'expression de u écrite plus haut. Prenons une fonction $r(x)$, prescrite pour tout $x \in d$, telle que $0 < r(x) <$ dis (x, d^*), et posons

$$\beta^{\Delta}(x) = \max \text{ de } \beta(x') \text{ pour } |x'-x| \leqq r(x)$$

$$\theta^{\Delta}(x) = \max \text{ de} \left| \frac{d^2}{d\vec{s}\, d\vec{t}} g(x', \xi) \right| \text{ pour toutes } \vec{s}, \vec{t} \text{ et}$$

$$\text{pour tout } (x', \xi) \text{ tel que } \xi \in \bar{d} \text{ et } |x'-x| \leqq r(x)$$

$$\phi^{\Delta}(x) = \max \text{ de } \phi(x') \text{ pour } |x'-x| \leqq r(x);$$

en tenant compte de la preuve de (ii) du lemme précédent, on trcuve,

12) On entend par $L^1(d)$ la totalité des fonctions réelles et sommables dans d.

13) Ce lemme est encore véritable moyennant que la fonction $G(x, \xi)$ (*supposé qu'elle ne soit cell de Green*) jouisse des propriétés suivantes :

(1′) $G(x, \xi)$ admet l'expression

$$G(x, \xi) = e(x, \xi) + k(x, \xi),$$

où $k(x, \xi)$ est prescrite pour tout $(x, \xi) \in d \times d$, et est régulière et harmonique en x dans d.

(2′) $k(x, \xi)$ et toutes ses dérivées en x sont continues en (x, ξ) dans $d \times \bar{d}$.

lorsque $|x'-x| \leqq \frac{1}{2}r(x)$,

$$\left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x') - \frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right|$$
$$\leqq \frac{2(n+1)\{2r(x)\}^{1-\alpha}\beta^{\Delta}(x)}{1-\alpha}|x'-x|^{\alpha} +$$
$$+\left[\frac{\omega_n\{r(x)\}^n\theta^{\Delta}(x)\beta^{\Delta}(x)}{n} + \frac{\phi^{\Delta}(x)}{\left\{\frac{r(x)}{2}\right\}^n}\int_{\Delta}\beta(\xi)\,d\xi\right]|x'-x|$$

avec $0 < \alpha < 1$.

Les inégalités

$$\left.\begin{matrix}|u(x)| \\ \left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right|\end{matrix}\right\} \leqq \phi(x)\int_{\Delta}\frac{\beta(\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}d\xi$$

étant tout évidentes quelle que soit $\vec{s}$, si l'on pose

$$H_{\alpha}(x) = \frac{2(n+1)\{2r(x)\}^{1-\alpha}\beta^{\Delta}(x)}{1-\alpha} +$$
$$+\left[\frac{\phi^{\Delta}(x)}{\left\{\frac{r(x)}{2}\right\}^n}\int_{\Delta}\beta(\xi)d\xi + \frac{\omega_n\{r(x)^n\theta^{\Delta}(x)\beta^{\Delta}(x)\}}{n}\right]\cdot\left\{\frac{r(x)}{2}\right\}^{1-\alpha}$$
$$L_{\alpha}(x) = \phi(x)\int_{\Delta}\frac{\beta(\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}d\xi + H_{\alpha}(x)\cdot\left\{\frac{r(x)}{2}\right\}^{\alpha},$$

on a pour $|x'-x| \leqq \frac{1}{2}r(x)$

$$\left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x')\right| \leqq \left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right| + H_{\alpha}(x)|x'-x|^{\alpha} \leqq L_{\alpha}(x);$$

en conséquence, il subsiste les inégalités

$$4^{\circ} \qquad \left\{\begin{aligned}&|u(x')-u(x)| \leqq L_{\alpha}(x)|x'-x| \\ &\left|\frac{d}{d\vec{s}}u(x') - \frac{d}{d\vec{s}}u(x)\right| \leqq H_{\alpha}(x)\cdot|x'-x|^{\alpha},\end{aligned}\right.$$

en tant que $|x'-x| \leqq \frac{1}{2}r(x)$, pour n'importe quelle $\vec{s}$.

Or, désignons par $\boldsymbol{H}_i$ la partie de $C(d)$ se composant de toutes p_i telles que $(u, p) = (u, p_1, \ldots, p_n) \in \hat{\boldsymbol{H}}$ avec quelques $u \in C(d)$ et $p_j \in C(d)$ $(j \neq i)$, et par $\boldsymbol{H}$ la partie de $C(d)$ se composant de toutes u telles que $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{H}}$ avec quelques $p \in \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{H}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et $\boldsymbol{H}$ sont bien les projections de $\hat{\boldsymbol{H}}$ sur les espaces composants de $\hat{\boldsymbol{C}}$.

Chaque $\boldsymbol{H}_i$ est alors également bornés à chaque point de d vu 3° ; il en est de même de $\boldsymbol{H}$. De plus, chaque $\boldsymbol{H}_i$ est équicontinues à chaque point de d d'après 4° ; il en est encore de même de $\boldsymbol{H}$.

Par suite, à l'aide de la séparabilité de d, et par l'emplois itératif du théorème d'Ascoli-Arzelà, si $\{(u^{(m)}, p^{(m)}) : m=1, 2, \ldots\} \subseteq \hat{\boldsymbol{H}}$, on peut toujours en choisir une suite partielle $\{(v^{(m)}, q^{(m)}) = (v^{(m)}, q_1^{(m)}, \ldots, q_n^{(m)})\}$ telle que les suites $\{v^{(m)}\}$ et $\{q_i^{(m)}\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ soient convergentes localement uniformément dans d ; les fonctions limites toutes appartiennent à $C(d)$, c. q. f. d.

Remarque : — *Si $\hat{\boldsymbol{H}}$ satisfait aux conditions données plus haut, l'enveloppe convexe de $\hat{\boldsymbol{H}}$ est encore relativement compact dans $\hat{\boldsymbol{C}}$*, car celle-ci jouit aussi des propriétés 3° et 4°.

Le lemme qui suit sera indispensable dans la suite.

Lemme 3 : — *Soit $K(x, \xi)$ une fonction prescrite pour tout $(x, \xi) \in d \times d$ sauf pour $x = \xi$ et assujettie aux conditions suivantes :*

1° *$K(x, \xi)$ est continûment différentiable en x deux fois dans d sauf en $x = \xi$.*

2° *$K(x, \xi)$ et toutes ses dérivées sont mesurables en ξ dans d.*

3° *Il se trouve une fonction $\phi \in C(d)$, non négative et telle que*

$$\left.\begin{array}{r} |K(x, \xi)| \cdot |x-\xi|^{n-1} \\ \left|\dfrac{d}{d\vec{s}} K(x, \xi)\right| \cdot |x-\xi|^{n-1} \\ \left|\dfrac{d^2}{d\vec{s}\, d\vec{t}} K(x, \xi)\right| \cdot |x-\xi|^{n} \end{array}\right\} \leqq \phi(x)$$

pour tout $(x, \xi) \in d \times d$ et pour toutes directions $\vec{s}$ et $\vec{t}$.

On définit pour $f \in L^1(d)$

$$\Theta(f) = (\tilde{u}, \tilde{p}) = (\tilde{u}, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$$

par

$$4° \quad \left\{\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \int_d f(\xi) K(x, \xi) d\xi \\ \tilde{p}_i(x) &= \int_d f(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} K(x, \xi) d\xi . \end{aligned}\right.$$

Il est clair que, si $f \in C(d) \frown L^1(d)$, $\tilde{u}$ est continûment différentiable dans d en donnant $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = \tilde{p}_i$ (cf. lemme 1).

Soit β une fonction $\in L^1(d)$ et non négative, et soit $\boldsymbol{B}$ une partie de

$C(d)$ se composant seulement des fonctions $f\in C(d)$ telles que

$$|f(x)|\leqq\beta(x)\qquad\textit{presque partout dans } d.$$

Alors, Θ est une application continue de $\boldsymbol{B}$ au dedans de $\hat{\boldsymbol{C}}$, c'est-à-dire, *lorsque $\{f^{(m)}\}\subseteq\boldsymbol{B}$, la convergence*

$$f^{(m)}\to 0\qquad\textit{localement uniformément dans } d$$

entraîne la convergence

$$\Theta(f^{(m)})\to 0\qquad\textit{par rapport à la topologie de } \hat{\boldsymbol{C}}.$$

Preuve: — On écrit

$$\begin{aligned}\Theta(f^{(m)})&=(\tilde{u}^{(m)},\tilde{p}^{(m)})\\&=(\tilde{u}^{(m)},\tilde{p}_1^{(m)},\tilde{p}_2^{(m)},\dots,\tilde{p}_n^{(m)})\,.\end{aligned}$$

Soient B un compact $\subset d$ et $\varepsilon>0$; posons $\delta=\frac{1}{2}\,\text{dis}\,(B, d^*)$, ce qui est >0, et $\phi_0=$ max de $\phi(x)$ dans B.

Choisissons un domaine d_0 de façon qu'on ait

$$B\subset d_0,\quad \bar{d}_0\subset d,\quad \text{dis}\,(B,\bar{d}_0{}^*)>\delta$$

et

$$\frac{\phi_0}{\delta^{n-1}}\int_{d-d_0}\beta(\xi)d\xi\leqq\frac{\varepsilon}{2}\,;$$

prenons un indice m_0 tel que $m\geqq m_0$ entraîne

$$|f^m(x)|\leqq\frac{\varepsilon}{2\omega_n\phi_0\delta(d)}\ {}^{14)}$$

pour tout $x\in\bar{d}_0$.

Alors, si $m\geqq m_0$, on a, pour $x\in B$,

$$\begin{aligned}|\tilde{u}^{(m)}(x)|&\leqq\phi_0\int_d\frac{|f^{(m)}(\xi)|}{|\xi-x|^{n-1}}\,d\xi\\&\leqq\frac{\phi_0}{\delta^{n-1}}\int_{d-d_0}\beta(\xi)d\xi+\frac{\varepsilon}{2\omega_n\delta(d)}\int_{d_0}\frac{d\xi}{|\xi-x|^{n-1}}\\&\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2\delta(d)}\int_0^{\delta(d)}d\tau=\varepsilon\,,\end{aligned}$$

14) $\delta(d)$ désigne le diamètre de d:

$$\delta(d)=\text{sup de }|x-\xi|\text{ pour }x\in d\text{ et }\xi\in d,$$

et tout de même

$$\left|\frac{d}{d\vec{s}}\tilde{u}^{(m)}(x)\right| \leq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x \in B,$$

quelle que soit $\vec{s}$; donc $\Theta(f^{(m)}) \to 0$ par rapport à la topologie de $\hat{C}$, c. q. f. d.

§ 3. Laplicien généralisé.

Définition : — Afin de pouvoir traiter l'équation au sujet sans autre hypothèse sur le second membre que continuité, et afin de pouvoir éviter toutes les computations compliquées qui seriont plutôt même inutiles, nous songeons à employer un laplacien généralisé, qui sera défini ci-dessous.

Soient $\overline{Z} = \overline{Z}(d)$ et $\underline{Z} = \underline{Z}(d)$ deux classes quelconques (non vides) des fonctions continues prescrite dans d, et soient $\overline{\Delta}$ (et $\underline{\Delta}$) deux opérateurs fonctionnels qui opèrent dans $\overline{Z}$ ($\underline{Z}$) en faisant correspondre à chaque $u \in \overline{Z}$ ($u \in \underline{Z}$) une fonction $\overline{\Delta}u$ ($\underline{\Delta}u$) univoquement, celles-ci étant encore prescrites dans d.

Les classes $\overline{Z}$, $\underline{Z}$ et les opérateurs $\overline{\Delta}$, $\underline{\Delta}$ sont supposées jouissantes des propriétés suivantes.

(1) Toute fonction u, qui est prescrite dans d et y continûment différentiable deux fois, appartient à $\overline{Z}_\frown \underline{Z}$ toujours, et pour telle u, $\overline{\Delta}$ et $\underline{\Delta}$ tous coïncident avec le laplacien ordinaire :

$$\overline{\Delta}u = \underline{\Delta}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$ [15]

(2) Si u jouit de la forme

$$u(x) = \int_d f(\xi)e(x, \xi)d\xi \qquad\qquad (x \in d)$$

avec $f \in C(d)_\frown L^1(d)$, on a toujours

$$u \in \overline{Z}_\frown \underline{Z} \quad \text{et} \quad \overline{\Delta}u = \underline{\Delta}u = f.$$ [16]

(3) Si $v \in \overline{Z}$ ($\underline{Z}$) et si u admet les dérivées secondes continues ou

---

15) Lorsque $\underline{\Delta}u = \overline{\Delta}u$, on y employe pour simplicité le symbole Δu, supposé qu'ils ne coïncide avec $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2}$.

16) C'est-à-dire la validité de la formule de Poisson.

bien l'expression écrite plus haut, on a encore $v-u \in \overline{Z}$ ($\underline{Z}$) et

$$\overline{\Delta}(v-u) = \overline{\Delta}v - \overline{\Delta}u$$
$$(\underline{\Delta}(v-u) = \underline{\Delta}v - \underline{\Delta}u)\,.$$

(4) Lorsque $u \in \overline{Z}$ ($u \in \underline{Z}$) atteint un minimum (maximum) en un point $x_0 \in d$, il se présente toujours

$$\overline{\Delta}u(x_0) \geqq 0 \qquad\qquad (\underline{\Delta}u(x_0) \leqq 0)\,.$$

Voici quelques exemples de laplacien généralisé :

a) $$\overline{\Delta}u(x) = \varliminf_{h\to+0} \sum_{i=1}^{n} \frac{u(\cdots, x_i+h, \cdots)+u(\cdots, x_i-h, \cdots)-2u(x)}{h^2}$$

$$\underline{\Delta}u(x) = \varlimsup_{h\to+0} \sum_{i=1}^{n} \frac{u(\cdots, x_i+h, \cdots)+u(\cdots, x_i-h, \cdots)-2u(x)}{h^2}$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.[17]

b) $$\overline{\Delta}u(x) = \varliminf_{h\to+0} \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \{u(\sigma)-u(x)\}\, d\sigma$$

$$\underline{\Delta}u\,(x) = \varlimsup_{h\to+0} \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \{u(\sigma)-u(x)\}\, d\sigma\,,$$[18]

où Σ_h^* désigne la frontière de l'hypersphère Σ_h de centre x et rayon $h > 0$.

Si l'on désigne par $\bar{\sigma}$ l'antipode du point σ sur Σ_h^*, on peut écrire

$$\frac{2}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \{u(\sigma)-u(x)\}\, d\sigma = \frac{1}{\omega_n h^{n-1}} \int_{\Sigma_h^*} \frac{u(\sigma)+u(\bar{\sigma})-2u(x)}{h^2}\, d\sigma\,.$$

---

17) On trouverait l'idée originale des opérateurs a), dans les mémoires suivants: S. Zaremba : *Contribution à la théorie d'une équation fonctionelle de la Physique.* Rendi. del Circolo mat. di Palermo **19** (1905), 140–150.

W. Wilkosz : *Sur un point fondamental de la théorie du potentiel.* C. R. Ac. Sc. **174** (1922), p. 435.

G. Bouligand : *Fonctions harmoniques. Principles de Picard et de Dirichlet.* Mémorial des Sc. math., Fasc. 11, p. 3 (1926).

E. Hopf : *Bemerkung zur Aufgabe* 49. Jahresbericht d. deut. math. Vereinigung, 39 (1930), p. 4–6.

M. Brelot : *Étude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)u(M)$, $c(M) \geqq 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient.* Annales de l'école norm. sup. 3, **48** (1931), 153–246; Chap. 1.

18) W. Blaschke : *Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials.* Berichte d. k. sächs. Gesell. d. Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Klasse, **68** (1916), 3–7.

G. Bouligand : *ibid.* p. 6.

E. Hopf : *ibid.*

De ces exemples, l'assujettissement à la condition (4) est claire; à propos des conditions (1) et (2), tout sera mis en lumière par les lemmes suivants; on trouvera dès lors la condition (3) aisé à établir.

Lemme 4: — *Si u est continûment différentiable deux fois dans d, on trouve*

(i) $$\lim_{h\to+0}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\cdots,\ x_i+h,\ \cdots)+u(\cdots,\ x_i-h,\ \cdots)-2u(x)}{h^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\,.$$

en tout $x\in d$.

(ii) $$\lim_{h\to+0}\frac{2n}{\omega_n h^{n+1}}\int_{\Sigma_h^*}\{u(\sigma)-u(x)\}\,d\sigma=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\,.$$

La preuve de (i) s'omet.

Preuve de (ii): — Vu

$$\frac{2n}{\omega_n h}\int_0^1\frac{1}{(\tau h)^{n-1}}\int_{\Sigma_{\tau h}}d\xi d\tau=2\int_0^1\tau\left\{\frac{n}{\omega_n(\tau h)^n}\int_{\Sigma_{\tau h}}d\xi\right\}d\tau$$
$$=2\int_0^1\tau d\tau=1\,,$$

en désignant par $\vec{s}$ le vecteur unitaire de $\sigma-x=\overrightarrow{x\sigma}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2n}{\omega_n h^{n+1}}\int_{\Sigma_h^*}\{u(\sigma)-u(x)\}\,d\sigma-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right|\\
&=\left|\frac{2n}{\omega_n h^2}\int_S\int_0^h\frac{d}{d\vec{s}}u(x+t\vec{s})dtdS-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right| \text{ [19]}\\
&=\left|\frac{2n}{\omega_n h}\int_S\int_0^1\frac{d}{d\vec{s}}u(x+\tau h\vec{s})d\tau dS-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right|\\
&=\left|\frac{2n}{\omega_n h}\int_0^1\int_S\frac{d}{d\vec{s}}u(x+\tau h\vec{s})dSd\tau-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right|\\
&=\left|\frac{2n}{\omega_n h}\int_0^1\frac{1}{(\tau h)^{n-1}}\int_{\Sigma_{h\tau}^*}\frac{d}{d\vec{n}_\sigma}u(\sigma)d\sigma d\tau-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right|\\
&=\left|\frac{2n}{\omega_n h}\int_0^1\frac{1}{(\tau h)^{n-1}}\int_{\Sigma_{\tau h}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\xi)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right\}d\xi d\tau\right|\\
&\leqq\frac{2n}{\omega_n h}\int_0^1\frac{1}{(\tau h)^{n-1}}\int_{\Sigma_{\tau h}}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\xi)-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)\right|d\xi d\tau\leqq\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

---

19) S désigne la surface de l'hypersphère unitarie centrée sur l'origine, $\vec{s}$ étant identifié avec un point de S (cf. Note 2)).

pour tout $h > 0$ assez petit, c. q. f. d.

Lemme 5 : — *Si u jouit de l'expression*

$$u(x) = \int_d f(\xi) e(x, \xi) d\xi \qquad (x \in d)$$

avec une $\in L^1(d) \cap C(d)$, *on trouve*

$$\lim_{h \to +0} \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \{u(\sigma) - u(x)\} d\sigma = f(x) . \text{[20]}$$

Preuve : — Il n'a que le cas à envisager, où f est à support compact. Étant donné un point $x_0 \in d$ à volonté, on a alors

$$\begin{aligned} &\frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \{u(\sigma) - u(x_0)\} d\sigma \\ &= \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \int_d f(\xi) \{e(\sigma, \xi) - e(x_0, \xi)\} d\xi d\sigma \\ &= \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \int_d \{f(\xi) - f(x_0)\} \{e(\sigma, \xi) - e(x_0, \xi)\} d\xi d\sigma \\ &\quad + f(x_0) \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \{U_e(\sigma) - U_e(x_0)\} d\sigma , \end{aligned}$$

où Σ_h désigne l'hypersphère de rayon $h > 0$ et de centre x_0, Σ_h^* sa frotière, et U_e la fonction

$$U_e(x) = \int_d e(x, \xi) d\xi \qquad (x \in d) ;$$

la seule question à s'établir est donc la suivante :

$$L(h) = \frac{2n}{\omega_n h^{n+1}} \int_{\Sigma_h^*} \int_d \{f(\xi) - f(x_0)\} \{e(\sigma, \xi) - e(x, \xi)\} d\xi d\sigma$$

converge vers zéro pour $h \to 0$.

Étant donné encore un $\varepsilon > 0$ arbitrairement, choisir un $\delta > 0$ tel que $|\xi - x_0| \leqq \delta$ entraîne

$$|f(\xi) - f(x_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{4n\omega_n} .$$

Lorsque $0 < h \leqq \frac{1}{2} \min [\delta, \text{dis}\,(x_0, d^*)]$, on peut écrire $L(h) = L'(h)$

---

20) Voir par exemple, Blaschke : *ibid.*
Si l'on met le laplacien généralisé a) en question, on rencontrera tous ses détails dans les mémoires cités plus haut de Zaremba, Wilcosz ou Brelot.

$+L''(h)$ par partager le domaine d en deux parties $d-\Sigma_{2h}$ (pour $L'(h)$) et Σ_{2h} (pour $L''(h)$).

On a aussitôt

$$L'(h)=\frac{2n}{h^2}\int_{d-\Sigma_{2h}}\{f(\xi)-f(x_0)\}\frac{1}{\omega_n h^{n-1}}\int_{\Sigma_h^*}\{e(\sigma,\xi)-e(x_0,\xi)\}d\sigma d\xi=0$$

en vertu de la propriété de moyenne des fonctions harmoniques; on a d'autre part, en tenant compte de ce que

$$\left|\frac{d}{d\vec{s}}e(x,\xi)\right|\leqq\frac{1}{\omega_n|\xi-x|^{n-1}},$$

$$|L''(h)|\leqq\frac{\varepsilon}{2\omega_n h^2}\int_S\int_{\Sigma_{2h}}\int_0^h\left|\frac{d}{d\vec{s}}e(x_0+\tau\vec{s},\xi)\right|d\tau d\xi dS^{19)}$$
$$\leqq\frac{\varepsilon}{2\omega_n^2 h^2}\int_S\int_0^h\int_{\Sigma_{2h}}\frac{d\xi}{|x_0+\tau\vec{s}-\xi^{n-1}|}d\tau dS$$
$$\leqq\frac{\varepsilon}{2\omega_n h^2}\int_S\int_0^h\int_0^{2h}d\rho d\tau dS=\varepsilon;$$

on a donc $|L(h)|\leqq\varepsilon$ pour tout $h>0$ suffisamment petit, c. q. f. d.

§ 4. Théorème en question.

Hypothèses :

[1] *Il est donné une fonction* χ *régulière et harmonique dans* d, *et des parties convexes et fermées (et non vides)*

$$\boldsymbol{S}\subseteq C(d) \qquad et \qquad \boldsymbol{G}\subseteq \boldsymbol{C}.$$

[2] *Une fonction* $F(x, v, q)$ *est prescrite et continue en chaque point* $(x, v, q)=(x_1, \dots, x_n, v, q_1, \dots, q_n)$ *dans une région* $\subseteq R^{2n+1}$, *qui enferme tous les points* $(x, v(x), q(x))$ *avec* $x\in d$, $v(x)-\chi(x)\in\boldsymbol{S}$ *et* $q(x)-$ grad $\chi(x)\in\boldsymbol{G}$.

On sert des symboles suivants:

$$F_{u,p}(x)=F(x,\ u(x)+\chi(x),\ p(x)+\text{grad }\chi(x)),$$
$$\hat{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{G},$$
$$\tilde{u}(x)=\int_d F_{u,p}(\xi)G(x,\xi)d\xi,$$
$$\tilde{p}_i(x)=\int_d F_{u,p}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_i}G(x,\xi)d\xi$$

et

$$\tilde{p}=(\tilde{p}_1,\ \tilde{p}_2,\ \dots,\ \tilde{p}_n).$$

Mettons en plus les hypothèses suivantes.

[3] *Il se trouve une fonction $\beta \in L^1(d) \frown C(d)$, non négative et telle qu'on ait*

$$|F_{u,p}(x)| \leqq \beta(x) \qquad dans\ d$$

quel que soit $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{S}}$.

[4] $(\tilde{u}, \tilde{p}) \in \hat{\boldsymbol{S}}$ *pour tout* $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{S}}$.

Conclusion : — *Il existe au moins un $u \in \boldsymbol{S}$ jouissante des propriétés suivantes* :

i) $u \in \overline{\boldsymbol{Z}} \frown \underline{\boldsymbol{Z}}$,

ii) $\overline{\Delta}(u + \chi) = \underline{\Delta}(u + \chi) = F(x,\ u + \chi,\ \text{grad}\ (u + \chi))$ dans d.

Démonstration du Théorèmes : — C'est appuyée sur le théorème de Tychonoff concernant de points fixes énoncè par la forme un peu modifiée.[21]

Pour cela, il ne s'agit que d'examiner les deux articles suivants :

1) *L'application*

$$\mathfrak{T} : (u, p) \to (\tilde{u}, \tilde{p}),$$

qui applique la partie $\hat{\boldsymbol{S}}$ au dedans d'elle-même, serait continue.

2) *L'ensemble $\mathfrak{T}(\hat{\boldsymbol{S}})$ aurait, pour son enveloppe convexe, une ensemble relativement compact dans $\hat{\boldsymbol{C}}$* (c'est-à-dire l'enveloppe convexe et fermée de $\mathfrak{T}(\hat{\boldsymbol{S}})$ serait bicompact).

Or, 2) est évidemment affirmatif à l'aide du lemme 2 (on pose $\hat{\boldsymbol{H}} = \mathfrak{T}(\hat{\boldsymbol{S}})$) ; 1) est aussi affirmatif, car, si l'on écrit $\mathfrak{T} = \Theta \times \mathfrak{F}$, le produit des deux applications

$$\Theta : F_{u,p} \to (\tilde{u}, \tilde{p})$$
$$\mathfrak{F} : (u, p) \to F_{u,p},$$

$\mathfrak{F}$ est continue d'après l'hypothèse [2], et Θ est aussi continue en vertu du lemme 3 (on pose $\boldsymbol{B} = \mathfrak{F}(\hat{\boldsymbol{S}})$).

Donc, le théorème de points fixes admet l'existence d'au moins un élément $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{S}}$ tel que $(u, p) = (\tilde{u}, \tilde{p})$; u que voici jouit de l'expression donnée au (2) de § 3, par suite $u \in \overline{\boldsymbol{Z}} \frown \underline{\boldsymbol{Z}}$; de plus, vu les lemmes 4 et 5, on aurait

$$\overline{\Delta}(u + \chi) = \underline{\Delta}(u + \chi) = F_{u,p}(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \chi(x)$$
$$= F(x,\ u(x) + \chi(x),\ \text{grad}\ (u + \chi)(x)).$$

21) A. Tychonoff : *Ein Fixpunktsatz*, Math. Zeits. **111** (1935), 767–776. Voir aussi, M. Hukuhara : *Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionel.* Japan. J. of Math. **20** (1950), 1–4.

dans d, c. q. f. d.

Corollaire 1: — *Supposons que*

[1′] *il existe trois fonctions* $\overline{w}$, $\underline{w}$ *et* X *prescrites pour tout* $x \in d$, *y continues et jouissantes des propriétés suivantes:*

(a) $\underline{w}(x) \leqq \overline{w}(x)$ *sur* $\bar{d}$,

(b) $\underline{w}(x) \leqq X(x) \leqq \overline{w}(x)$ *sur* d^*,

(c) X *est régulière et harmonique dans* d,

(d) $\overline{w} \in \overline{\boldsymbol{Z}}$ et $\underline{w} \in \underline{\boldsymbol{Z}}$, *et toutes deux sont continûment différentiables dans* d,

(e) *toutes dérivées premières de* X *est bornées dans* d;

[2′] *la fonction* $F(x, v, q)$, *le second membre de l'équation*

$$\text{(E)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = F(x, v, \operatorname{grad} v),$$

est prescrite pour tout point $(x, v, q) = (x_1, \ldots, x_n, v, q_1, \ldots, q_n)$ *de la région*

$$\mathfrak{D} = \left\{ (x, v, q) : \begin{array}{c} x \in d, \\ \underline{w}(x) \leqq v \leqq \overline{w}(x), \\ |q| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |q_i|^2} < +\infty \end{array} \right\}$$

et y continue, et il se présente dans d *les inégalités*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \overline{\Delta w}(x) \leqq F(x, \overline{w}(x), \operatorname{grad} \overline{w}(x)) \\ \underline{\Delta w}(x) \geqq F(x, \underline{w}(x), \operatorname{grad} \underline{w}(x)); \end{cases}$$

[3′] *il se trouve une fonction* $\psi(t)$ *prescrite pour tout réel* $t \geqq 0$, *non négative, non décroissante et jouissante des propriétés suivantes:*

(a) $|F(x, v, q)| \leqq \psi(|q|)$ *dans* $\mathfrak{D}$.

(b) *il y a un nombre* $\tau > 0$ *tel que* $\gamma < \tau$ *et*

$$\frac{\psi(\tau)}{\tau - \gamma} \cdot \Gamma < 1,^{22)}$$

22) Cette condition exige, avant tout, que la fonction (en x)

$$\int_d |\operatorname{grad}_x G(x, \xi)| d\xi$$

soit bornée dans d; cela est réalisable, par exemple, au cas suivants:

(i) d est une hypersphère de rayon $R > 0$; on a alors

$$\int_d |\operatorname{grad}_x G(x, \xi)| d\xi \leqq \frac{2}{\omega_n} \int_d \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-1}} \leqq 2R.$$

(ii) $n = 2$ ou 3, et d est de la classe B. Voir
L. Lichtenstein: *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.* Encyklopädie d. math. Wissen., Bd. II_3, Heft 3.

où on pose

$$\gamma = \text{sup de } |\text{grad } \chi(x)| \qquad \textit{dans } d$$

$$\Gamma = \text{sup de } \int_d |\text{grad}_x\ G(x,\ \xi)|\, d\xi \qquad \textit{dans } d\,.$$

Alors, il existe au moins une $u \in \overline{\boldsymbol{Z}} \cap \underline{\boldsymbol{Z}}$ remplissant l'équation

$$\overline{\Delta}(u+\chi) = \underline{\Delta}(u+\chi) = F(x,\ u+\chi,\ \text{grad }(u+\chi))$$

dans d, qui confond sur d^* avec χ et satisfait dans d à l'inégalité

$$\underline{w}(x) \leqq u(x) + \chi(x) \leqq \overline{w}(x)\,.$$

Preuve: — Dans l'application du théorème précédent au présent problème, l'essentiel est de déterminer effectivement les parties convexes et fermées $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{G}$ dites là.

Pour ce but, choisir à volonté une fonction r de façon qu'on ait

$$0 < r(x) < \text{dis }(x,\ d^*) \qquad \text{dans } d\,;$$

prendre un nombre α tel que $0 < \alpha < 1$, et un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\frac{\eta + \psi(\tau)}{\tau - \gamma} \cdot \Gamma < 1\,;$$

poser pour brévité $\lambda = \eta + \psi(\tau)$.

Définissons les dites parties convexes et fermées comme suit:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ u \in C'(d):\ \begin{array}{c} |\text{grad } u(x)| \leqq \tau - \gamma \qquad \text{dans } d \text{ et} \\ \left| \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(x') - \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right| \leqq H_\alpha(x) \cdot |x'-x|^\alpha \\ \text{en tant que} \quad |x'-x| \leqq \frac{1}{2} r(x) \\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \end{array} \right\}$$ [23]

$$\boldsymbol{G} = \{ g = \text{grad } u:\ \ u \in \boldsymbol{S} \}\,,$$

où H_α désigne la même fonction écrite dans la preuve du lemme 2, mais *la fonction β y étant substituée par la constante* λ.

Passons ensuite à modifier le second membre de (E).

Définissons pour $(x,\ v) \in d \times R^1$

$$\begin{aligned} P(x,\ v) &= \max\ [\underline{w}(x),\ \min\ [\overline{w}(x),\ v]] \\ &= \min\ [\overline{w}(x),\ \max\ [\underline{w}(x),\ v]] \end{aligned}$$

---

23) $C'(d)$ désigne la totalité des fonctions prescrties dans d et y continûment différentiables.

$$J(x,\ v)=\frac{[v-\overline{w}(x)]^{+}-[v-\underline{w}(x)]^{-}}{1+[v-\overline{w}(x)]^{+}+[v-\underline{w}(x)]^{-}};\ ^{24)}$$

posons pour $(x, v, q) \in d \times R^{n+1}$

$$\mathring{F}(x,\ v,\ q)=F(x,\ P(x,\ v),\ q)+\eta J(x,\ v)$$

et pour $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{S}}$

$$\mathring{F}_{u,p}(x)=\mathring{F}(x,\ (u+X)(x),\ p(x)+\ \text{grad}\ X(x))$$

et nous allons traiter pour l'heure, au lieu de (E), l'équation

$$(\mathring{\mathrm{E}}) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=\mathring{F}(x,\ v,\ \text{grad}\ v)$$

Il est claire que $\mathring{F}(x, v, q)$ est continue[25] par rapport à (x, v, q) dans $d \times R^{n+1}$ ([2] du théorème précédent).

L'existence d'une fonction $\beta \in L^1(d)$ exigée dans [3] du théorème précédent est évidente, car, si $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{S}}$, on a $|p+\text{grad}\ X| \leqq \tau$ dans d et donc

$$(*) \qquad \|\mathring{F}_{u,p}\| \leqq \psi(\tau)+\eta=\lambda$$

d'après l'hypothèse (a) de [3′] et vu que $|J(x, v)| \leqq 1$.

La majoration $(*)$ nous instruit aussi de ce que, si $(u, p) \in \hat{\boldsymbol{S}}$, la fonction (cf. p. 92)

$$\tilde{u}(x)=\int_d \mathring{F}_{u,p}(\xi)G(x,\ \xi)d\xi \qquad (x \in d)\,,$$

qui est sans dire continûment différentiable dans d, jouit des propriétés suivantes :

$$(1^\circ) \qquad \left|\frac{d}{d\vec{s}}\tilde{u}(x)\right| \leqq \lambda \int_d |\text{grad}_x\ G(x,\ \xi)|\,d\xi \leqq \tau-\gamma$$

pour tout $x \in d$ et pour toute $\vec{s}$, vu l'hypothèse [3′] ; par suite

$$|\text{grad}\ \tilde{u}(x)| \leqq \tau-\gamma \qquad \text{dans } d\,;$$

---

24) $[a]^{+}=\max[a, 0]$, $[a]^{-}=\max[-a, 0]=[-a]^{+}$.

25) Cf. l'inégalité aisé à vérifier : Si A, B, A' et B' sont non négatifs, on aura

$$\left|\frac{A-B}{1+A+B}-\frac{A'-B'}{1+A'+B'}\right| \leqq |A-A'|+|B'-B|.$$

(2°) de plus

$$\left| \frac{d}{d\vec{s}} \tilde{u}(x') - \frac{d}{d\vec{s}} \tilde{u}(x) \right| \leq H_\alpha(x) \cdot |x' - x|^\alpha,$$

en tant que $|x'-x| \leq \frac{1}{2} r(x)$ (voir la preuve du lemme 2).

Donc $(\tilde{u}, \tilde{p}) \in \hat{S}$ ([4] du théorème précédent).

Grâce aux résultats obtenus jusqu'ici, et en vertu du théorème précédent, l'existence d'un élément $(u, p) \in \hat{S}$ tel que $(u, p) = (\tilde{u}, \tilde{p})$ *relativement à l'équation* $(\mathring{E})$, autrement dit, tel que

$$u(x) = \int_d \mathring{F}_{u,p}(\xi) G(x, \xi) d\xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = p_i(x) = \int_d \mathring{F}_{u,p}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} G(x, \xi) d\xi,$$

s'est rendue claire ; $u(x)$ que voici est continue sur $\bar{d}$ et bien un élément de $\bar{Z} \frown \underline{Z}$, remplissant l'équation $(\mathring{E})$ et s'annulant sur d^*.[26]

Nous avons en dernier lieu l'inégalité

$$\underline{w}(x) \leq u(x) + \chi(x) \leq \bar{w}(x) \qquad \text{dans } d$$

à démontrer ; pour cela il est bon de s'appuyer sur le raisonnement que nous avons formulé dans notre mémoire imprimé quelques ans avant[27], c'est-à-dire, si l'on pose

$$\begin{aligned} w(x, \alpha) &= \bar{w}(x) + \alpha & & (\alpha > 0) \\ v(x, \alpha) &= u(x) + \chi(x) & & (\textit{dépourvue de } \alpha), \end{aligned}$$

on a alors

---

26) Ce résult d'une propriété de la fonction de Green : Soit A un ensemble mesurable $\subseteq d$ de diamètre $\leq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, on aura alors

$$0 \leq \int_A G(x, \varepsilon) d\xi \leq \omega_n \delta(d) \varepsilon$$

quel que soit $x \in \bar{d}$.

Voir aussi

R. Courant und D. Hilbert : *Methoden der Mathematischen Physik*, II, Berlin, 1937, S. 241 (Kap. IV, § 2, Nr. 1).

E. Picard : *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, Paris, 1930, pp. 129–131 (Chap. IX).

27) S. Simoda et M. Nagumo : *Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique*. Proceedings of the Japan Academy. **27** (1951), No. 7, 334–339 ; Théorème fondamental, p. 335.

Dans l'utilisation de ce mémoire, il faut tenir compte de la propriéte (4) des opérateurs $\bar{\Delta}$ et $\underline{\Delta}$ (voir § 3).

1° pour un assez grand α,

$$w(x, \alpha)-v(x, \alpha) \geqq \alpha-\{|\overline{w}(x)|+|u(x)|+|X(x)|\}>0$$

dans d;

2° pour n'importe quelle suite $\{(x^{(m)}, \alpha^{(m)}): m=1, 2, \ldots\}$ avec $x^{(m)} \in d$ et $\alpha^{(m)}>0$ et telle que la suite $\{x^{(m)}\}$ n'a pas de point d'accumulation dans d et la suite $\{\alpha^{(m)}\}$ converge vers une valeur positive quelconque,

$$\varliminf_{n \to \infty} \{w(x^{(m)}, \alpha^{(m)})-v(x^{(m)}, \alpha^{(m)})\}>0;$$

3° pour tout (x, α) tel que $x \in d$ et $\alpha>0$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\Delta}_x w(x, \alpha)-\{F(x, P(x, w(x, \alpha)), \operatorname{grad}_x w(x, \alpha))+\eta J(x, w(x, \alpha))\\
&\quad=\overline{\Delta}\overline{w}(x)-F(x, P(x, (x, \alpha)), \operatorname{grad} \overline{w}(x))-\eta J(x, w(x, \alpha))\\
&\quad=\overline{\Delta}\overline{w}(x)-F(x, \overline{w}(x), \operatorname{grad} \overline{w}(x))-\frac{\eta\alpha}{1+\alpha}\\
&\quad<\overline{\Delta}\overline{w}(x)-F(x, \overline{w}(x), \operatorname{grad} \overline{w}(x)) \leqq 0\\
&\quad=\overline{\Delta}(u+X)(x)-\{F(x, P(x, u(x)+X(x)), \operatorname{grad} (u+X)(x))+\\
&\qquad\qquad+\eta J(x, u(x)+X(x))\\
&\quad=\overline{\Delta}_x v(x, \alpha)-\{F(x, P(x, v(x, \alpha)), \operatorname{grad}_x v(x, \alpha))+\eta J(x, v(x, \alpha))\};
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\overline{\Delta}_x w(x, \alpha)-\mathring{F}(x, w(x, \alpha), \operatorname{grad}_x w(x, \alpha))<\\
&\quad<\overline{\Delta}_x v(x, \alpha)-\mathring{F}(x, v(x, \alpha), \operatorname{grad}_x v(x, \alpha));
\end{aligned}$$

d'où, par la même manière que de la preuve du théorème fondamental dans notre mémoire dit plus haus, on tire

$$w(x, \alpha)>v(x, \alpha), \text{ c'est-à-dire } \overline{w}(x)+\alpha>u(x)+X(x)$$

pour tout (x, α) avec $x \in d$ et $\alpha>0$, aussi bien

$$\overline{w}(x) \geqq u(x)+X(x) \qquad \text{dans } d.$$

On aurait tout de même

$$\underline{w}(x) \leqq u(x)+X(x) \qquad \text{dans } d;$$

en conséquence, $P(x, u(x)+X(x))=u(x)+X(x)$, $J(x, u(x)+X(x)) \equiv 0$ et

$$\overline{\Delta}(u+X)=\underline{\Delta}(u+X)=F(x, u+X, \operatorname{grad} (u+X))$$

dans d; la preuve s'est finie complètement.

Corollaire 2 : — *Supposé que les conditions* (*d*) *de* [1′] *et les deux inégalités* (I) *y manquent ce lemme se laisse subsister, moyennant que les conditions*

$$\overline{w}(x) \geqq X(x) + \psi(\tau) \int_d G(x, \xi) d\xi$$

$$\underline{w}(x) \leqq X(x) - \psi(\tau) \int_d G(x, \xi) d\xi$$

soient remplies (voir les exemples (c), (e) qui suivent).

Remarque : — Dans dessus, si $F(x, v, q)$ remplisse supplémentairement, dans la région $\mathfrak{D}_\tau = \{(x, v, q) \in \mathfrak{D} : |q| \leqq \tau\}$, une condition de Hölder de l'exposant ω $(0 < \omega \leqq 1)$:

(H) $\quad |F(x', v', q') - F(x, v, q)| \leqq A\{|x'-x|^\omega + |v'-v|^\omega + |q'-q|^\omega\}$
(A étant une constante $\geqq 0$),

il existe une solution u douée des dérivées deuxièmes continues (*solution régulière*) et il en subsiste donc $\overline{\Delta} u = \underline{\Delta} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Preuve : — Posons pour simplicité

$$v(x) = u(x) + X(x), \quad q(x) = \text{grad } v(x)$$
$$f(x) = F(x, v(x), q(x))$$

$$\sigma^\Delta(x) = \max \text{ de } \left| \frac{d^2}{d\vec{s}\, d\vec{t}} X(x') \right| \begin{array}{l} \text{pour toutes } \vec{s} \text{ et } \vec{t} \text{ et pour tout } x' \\ \text{tel que } |x'-x| \leqq \frac{1}{2} r(x) ; \end{array}$$

alors, on aurait, pour $|x'-x| \leqq \frac{1}{2} r(x)$,

$$\begin{aligned} &|f(x') - f(x)| \\ &\leqq A\{|x'-x|^\omega + |v(x') - v(x)|^\omega + |q(x') - q(x)|^\omega\} \\ &\leqq A\left[(1+\tau^\omega)|x'-x|^\omega + \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x') - \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_i} X(x') - \frac{\partial}{\partial x_i} X(x) \right| \right\}^\omega \right] \\ &\leqq B(x)|x'-x|^{\alpha\omega}, \end{aligned}$$

où

$$B(x) = A[(1+\tau^\omega)\{\tfrac{1}{2} r(x)\}^{(1-\alpha)\omega} + n\{H_\alpha(x) + \sigma^\Delta(x)[\tfrac{1}{2} r(x)]^{1-\alpha}\}^\omega].$$

Si l'on choisit la fonction $r(x)$, préalablement, afin d'être continue, les fonctions $H_\alpha(x)$ et $\sigma^\Delta(x)$, partant même $B(x)$, se rendent encore conti-

27 a) Deplus, on démontre que toute solution de (E) au sens du laplacien généralisé quelconque est en même temps celle qui est au sens du laplacien ordinaire, lorsqu'il a lieu dans F que, si v et $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ sont toutes localement hölderienne dans d, $f(x) = F(x, v(x), q(x))$ est encore ainsi.

nues[28]: par suite, les fonctions

$$B^{\Delta}(x) = \text{max de } B(x') \text{ pour } |x'-x| \leqq \tfrac{1}{2}r(x)$$
$$r_{\Delta}(x) = \frac{1}{\text{max de } 1/r(x') \text{ pour } |x'-x| \leqq \tfrac{1}{2}r(x)}$$

sont aussi continues en donnant les inégalités

$$B(x') \leqq B^{\Delta}(x) \quad \text{et} \quad r(x') \geqq r_{\Delta}(x) > 0$$

pour tout x' tel que $|x'-x| \leqq \frac{1}{2}r(x)$.

Or, étant donné un $x_0 \in d$ à volonté, lorsque $|x-x_0| \leqq \frac{1}{4}r_{\Delta}(x_0)$ et $|x'-x_0| \leqq \frac{1}{4}r_{\Delta}(x_0)$, on voit que $|x'-x| \leqq \frac{1}{2}r(x_0)$, et donc

$$|f(x')-f(x)| \leqq B(x)|x'-x|^{\alpha\omega} \leqq B^{\Delta}(x_0)|x'-x|^{\alpha\omega},$$

ce qui montre que $f(x)$ est localement hölderienne dans d de l'exposant $\alpha\omega$ (x_0 étant le point arbitraire de d); donc

$$u(x) = \int_d f(x)G(x, \xi)d\xi,$$

aussi bien même $v(x)$, admet les dérivées deuxièmes continues, c. q. f. d.

La condition (H) peut sans dire s'élargir afin d'obtenir solutions *régulières* ou bien *presque régulières*; à propos de tells conditions, voir les mémoires célèbres de H. Petrini.[29]

§ 5. Exemples.

Le domaine en vue est toujours situé dans R^n, borné et admet la fonction de Green $G(x, \xi)$, dont

$$\Gamma = \text{sup de } \int_d |\text{grad}_x\, G(x, \xi)|\, d\xi \qquad \text{dans } d$$

est *finie*.

---

28) Voir la définition de H_α dans la preuve du lemme 2, $\beta(x)$ étant substituée par la constante λ. Peut-être servira-t-il ici le lemme suivant.

Lemme:— Soient $c(x)$ et $r(x)$ des fonctions prescrites dans d, continues, et $r(x)$ y remplissant la condition $0 < r(x) <$ dis (x, d^*); alors, la fonction

$$c^{\Delta}(x) = \text{max de } c(\xi) \text{ pour } |\xi - x| \leqq r(x)$$

est encore *continue* dans d.

29) H. Petrini: *Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique.* J. de Math. (6), **5** (1909), 127–223.

———: *Les dérivées premières et secondes du potentiel.* Acta Math. **31** (1908), 127–332.

La valeur $\Gamma=\Gamma(d)$ est invariante sous toute translation parallèle et sous toute révolution à centre abitraire, mais, si l'on comprime ou amplifie le domaine d *homothétiquement*, Γ se varie à la même proportion que celle de l'homothétie.

(a) $$\Delta u=f(x, u) \log (1+|\text{grad } u|^2)$$

avec f continue dans la région $x \in \bar{d}$ et $a \leqq x \leqq b$.

Les valeurs frontières sont données par une fonctions harmonique $\chi(x)$, qui est continue sur $\bar{d}$, jouit des dérivées premières *bornées dans* d et satisfait à l'inégalité $a \leqq \chi(x) \leqq b$. Posons

$$f_0 = \sup \text{ de } |f(x, u)| \text{ pour } x \in d \quad \text{et} \quad a \leqq u \leqq b$$
$$\gamma = \sup \text{ de } |\chi(x)| \text{ dans } d\,;$$

il suffit alors de choisir τ de la façon suivante:

$$\tau \geqq 2\gamma \quad \text{et} \quad \frac{f_0 \log (1+\tau^2)}{\tau}\Gamma < 1\,.$$

Parce que toute fonction constante toujours satisfait à l'équation on peut faire

$$\overline{w}(x)=b \qquad \text{et} \qquad \underline{w}(x)=a\,.$$

Plus général

$$\Delta u=f(x, u)+\log\left\{1+\textstyle\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right\}+g(u)\,,$$

avec f, g et A_{ij} toutes continues dans la région $x \in \bar{d}$ et $a \leqq u \leqq b$; g étant assujettie aux conditions

$$g(a) \leqq 0 \qquad \text{et} \qquad g(b) \geqq 0\,;$$

la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\xi_i\xi_j$ étant supposée symétrique et semi-définie positive pour tout (x, u).

(b) $$\Delta u=\textstyle\sum_{k=1}^n B_k(x, u)\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|^{1-\varepsilon}+g(u) \qquad (1>\varepsilon>0)$$

abec B_k, g toutes continues dans la région $x \in \bar{d}$ et $a \leqq u \leqq b$; g étant la même fonction qu'au précédent.

(c) En général, si $\Delta u=F(x, u, \text{grad } u)$ s'assujettit aux conditions:

$$|F(x, u, p)| \leqq \psi(|p|) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=0\,,$$

le problème est très facile à attaquer pour autant que les valeurs frontières soient données par une fonction harmonique *à dérivées premières bornées.*

Remarque: — Si F est définie pour tout (x, u, p) tel que $x \in d$, $|u| < +\infty$ et $|p| < +\infty$ et assujettie au condition ci-dessus, le corollaire 2 est efficace.

(d) $$\Delta u = f(x, u)|\text{grad } u|^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

avec f qui est continues dans la région $x \in \bar{d}$ et $a \leqq u \leqq b$.

Telle équation toujours possède la solution *presque constante*, sinon celle qui est strictement constante; c'est-à-dire, lorsque on choisit $\tau > 0$ de façon qu'on ait $f_0 \tau^{\varepsilon} \Gamma < 1$, en tant que la fonction harmonique à dérivées premières bornées χ (avec $a \leqq \chi(x) \leqq b$) s'assujettit à la condition $\gamma \leqq \tau/2$.

(e) En général, si les conditions

$$|F(x, u, p)| \leqq \psi(|p|) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0$$

sont remplies, tout va beaucoup analogument au précédent (voir le remarque de (c)).

Si toutes deux circonstances

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0$$

sont dépourvues, il nous semble à la première vue qu'il faille limiter le domaine d suffisamment petit pour qu'on ait $\frac{\psi(\tau)}{\tau} \Gamma < 1$ avec un τ proprement choisi, mais c'est une grande question fort intéressante dont je veux m'occuper dans un avenir prochain.

The Osaka University of Liberal Arts and Education.

(Received October 1, 1954)