SUR L'ALLURE DES FONCTIONS MEROMORPHES

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction

Récemment J. L. Doob [8] a trouvé quelques théorèmes intéressants sur l'allure des fonctions méromorphes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé en utilisant la topologie fine c'est-à-dire la topologie la moins fine qui fait toutes les fonctions sous-harmoniques continues. A l'égard de ces résultats, on étudie dans ce mémoire quelques aspects de fonctions méromorphes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé ou d'un point-frontière irrégulier.

Dans le paragraphe 2, on donne un théorème d'unicité et le paragraphe 3 est consacré aux applications.

Les résultats de J. L. Doob sont locaux, mais, dans le paragraphe 4, on étudie l'allure des fonctions méromorphes globales c'est-à-dire dans le plan fini. On obtient des résultats concernant des valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna et de Borel pour des fonctions méromorphes dans le plan fini ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini et admettant des limites fines en ce point.

Le paragraphe 5 donne un théorème sur des ensembles des valeurs d'adhérence ordinaire en utilisant l'ensemble des valeurs d'adhérence fine.

Ces recherches ont été faites pendant mon séjour à Paris comme boursier du Gouvernement français.

2. Théorème d'unicité

Dans ce paragraphe on trouve un théorème d'unicité qui est une extension du théorème d'unicité classique.

Soit D un domaine dans le plan, ζ_0 un point-frontière irrégulier de D, $G(z, z_0)$ la fonction de Green de D de pôle z_0, f une fonction méromorphe dans D. On introduit un sous-domaine:

$$\Omega_\varepsilon(z_0) = \{z \in D\ ;\ G(z,\ z_0) > \varepsilon > 0,\ \delta > \varepsilon > 0\},$$

Received June 22, 1965.

où $\limsup_{z \to \zeta_0} G(z, z_0) = \delta > 0$. On met $\Omega_0(z_0) = D$.

On sait que $\mathscr{C}\Omega_\varepsilon'(z_0)$ est effilé en ζ_0 pour $\delta > \varepsilon > 0$ quelconque.

Théorème 1.

Soit f lindélöfienne ([9]). *S'il existe une suite (z_n) convergeant vers ζ_0 telle que $f(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et la suite (z_n) est contenue dans $\Omega_\varepsilon(z_0)$ pour un $\varepsilon > 0$, alors $f \equiv 0$.*

Pour démontrer cela, il suffit de trouver le lemme suivant:

Lemme 1. *Soit f non-constante lindélöfienne et $\nu^\varepsilon_f(w)$ le nombre de points de $\Omega_\varepsilon(z_0)$ où f est égale à w, w quelconque de la sphère de Riemann. Alors $\nu^\varepsilon_f(w)$ est fini.*

Démonstration Puisque f est lindélöfienne, par définition,

$$\sum_{f(z)=w} n(z) G(z, z_0) < +\infty,$$

pour w quelconque de $f(D)$, $w \neq f(z_0)$, où $n(z)$ est l'ordre de multiplicité de f en z. Dans $\Omega_\varepsilon(z_0)$,

$$\inf G(z, z_0) \geqq \varepsilon > 0,$$

par conséquent, pour $w \in f(\Omega_\varepsilon(z_0)) - (f(z_0))$, $\nu^\varepsilon_f(w)$ est fini.

Pour $w_0 = f(z_0)$, $\nu^\varepsilon_f(w_0)$ est aussi fini. En effet, prenons V_{z_0} un voisinage de z_0 et z_0' dans V_{z_0} tels que

1) $z_0' \neq z_0$,

2) $f(z_0') \neq f(z_0)$,

3) $|G(z, z_0') - G(z, z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, z quelconque de $\mathscr{C}V_{z_0}$,

4) $G(z, z_0') > \delta > 0$ dans V_{z_0},

alors

$$G(z, z_0') > \min\left(G(z, z_0) - \frac{\varepsilon}{2},\ \delta\right) \geq \min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \delta\right) > 0$$

dans $\Omega_\varepsilon(z_0)$, de sorte que, par l'inégalité

$$\sum_{f(z)=w_0} n(z) G(z, z_0') < +\infty,$$

$\nu^\varepsilon_f(w_0)$ est fini.

3. Applications

Ici on applique le résultat ci-dessus et obtient deux corollaires. On utilise les mêmes notations comme dans le paragraphe 2. Soit (z_n) une suite dans D convergeant vers un point-frontière. On dit que la suite (z_n) est régulière si $G(z_n, z_0)$ tend vers 0 ([3], [6]). C. Constantinescu [5] a donné une condition suffisante pour que (z_n) soit régulière en un point-frontière irrégulier en utilisant la compactification de Royden. On a le

COROLLAIRE 1

Soit f lindélöfienne. Si f n'est pas constante, et s'il existe une suite (z_n) convergeant vers ζ_0 telle que $f(z_n) = w$ pour w quelconque de la sphère de Riemann, alors elle est régulière.

Démonstration

S'il existe une suite (z_n) convergeant vers ζ_0 telle que $f(z_n) = w$ et appartenant à $\Omega_\varepsilon(z_0)$ pour un $\varepsilon > 0$, d'après le Théorème 1, f est constante. Contradiction.

COROLLAIRE 2

Si f est lindélöfienne dans D, f admet une limite fine en ζ_0.

Démonstration

Il suffit de traiter le cas où f n'est pas constante. D'après le Lemme 1, $\nu_f^\varepsilon(w)$ est fini pour toutes les valeurs w de $f(\Omega_\varepsilon(z_0))$ et $\mathscr{C}\Omega_\varepsilon(z_0)$ est effilé en ζ_0. Par conséquent, en vertu du corollaire 2 de [11], f admet une limite fine en ζ_0.

4. Fonctions méromorphes dans $|z| < +\infty$

Des fonctions méromorphes dans le plan fini ayant un point singlier essentiel isolé à l'infini et admettant des limites fines en ce point ont des caractères intéressants: elles n'out pas de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna et de Borel. D'abord on donne quelques lemmes que l'on connait bien.

LEMME 2. *Soit $u(z)$ une fonction sur-harmonique dans un domaine D tel que le point à l'infini $(=\omega)$ est un point-frontière irrégulier de D. Si $u(z)/\log|z|$ est bornée inferieurement dans un voisinage fin de ω, alors $u(z)/\log|z|$ admet une limite finie en ω* ([2]).

LEMME 3. *Si un ensemble E quelconque dans le plan est effilé en ω, il existe des circonférences arbitrairement grandes de centre 0 ne rencontrant pas E* ([4]).

LEMME 4. *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe dans le plan fini qui a un point singulier essentiel isolé à l'infini, alors $\lim\limits_{r\to+\infty} T(r,f)/\log r = +\infty$, où $T(r, f)$*

est la caractéristique de f au sens de Ahlfors-Shimizu (voir [12]).

THÉORÈME 2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini. Si $f(z)$ admet une limite fine en ω, alors $f(z)$ n'a pas de valeurs déficientes, par conséquent, pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard.*

Démonstration

On peut supposer que la limite fine soit ∞. Soit D la patie non relativement compacte connexe de $(z\ ;\ |f(z)|>1)$ dont le complémentaire est effilé en ω. Puisque $\log|f(z)|$ est sur-harmonique positive dans D et admet la limite fine ∞ en ω, d'après le Lemme 2, $\log|f(z)|/\log|z|$ a une limite fine finie (soit α) en ω, c'est-à-dire, en dehors d'un ensemble E effilé en ω, $f(z)$ tend vers ∞ et $\log|f(z)|/\log|z|$ vers α si z tend vers ω parce que l'intersection de deux voisinages fins de ω est aussi voisinage fin de ω et d'après un théorème de J. Deny [7]. Grâce au Lemme 3, il existe une suite (r_n) telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z|=r_n)\cap E=\phi$, et $f(r_ne^{i\theta})$ tend vers ∞ et $\log|f(r_ne^{i\theta})|/\log r_n$ vers α uniformément par rapport à θ si n tend vers $+\infty$, de sorte que pour $\varepsilon>0$ quelconque, il existe un n_0 tel que pour n'importe quel n plus grand que n_0, on a

$$m(r_n,\ \infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(r_ne^{i\theta})|\,d\theta\leqq(\alpha+\varepsilon)\log r_n,$$

par conséquent,

$$0\leqq\limsup_{n\to+\infty}\frac{m(r_n,\ \infty)}{T(r_n,\ f)}\leq(\alpha+\varepsilon)\lim_{n\to+\infty}\frac{\log r_n}{T(r_n,\ f)}=0$$

en vertu du Lemme 4. Cela veut dire que ∞ n'est pas une valeur déficiente. Pour a quelconque fini dans le plan,

$$m(r_n,\ a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(r_ne^{i\theta})-a}\right|d\theta=0(1),$$

parce que $f(r_ne^{i\theta})$ tend vers ∞ si n tend vers $+\infty$. D'après le Lemme 4, a n'est pas une valeur déficiente, et on en conclut qu'il n'y a pas de valeurs déficientes pour f. En ce qui concerne des valeurs exceptionnelles au sens de Borel, on trouve le

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction méromorphe dans le plan fini ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini. Si f admet une limite fine en ω, alors f n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Borel.*

Pour le démontrer, on utilise quelques lemmes:

LEMME 5. *Soit E un ensemble fermé borné sur l'axe de x et L la mesure linéaire de E, alors la capacité logarithmique $\gamma(E)$ de E est plus grande que $L/4$ (voir* [12]).

LEMME 6. *Soit E comme dans le Lemme 5 et E_r la partie de E contenue dans $|z|\leqq r$ et $\gamma(r)=\gamma(E_r)$. Si $\limsup_{r\to 0}\gamma(r)/r>0$, alors 0 est un point-frontière régulier du domaine $\mathscr{C}E$ (voir* [12]).

LEMME 7. *Soit $E=\bigcup_i[b_i, a_i]$ où $0<a_{i+1}<b_i<a_i$ pour tout $i=1, 2, 3, \ldots$ qui est fermé et effilé en 0 et qui n'a que l'origine comme points d'accumulation de la suite des intervals $[b_i, a_i]$, alors $\lim_{i\to+\infty} a_i/b_i=1$.*

Démonstration

Supposons que $\limsup_{i\to+\infty} a_i/b_i=\beta>1$. Soit $L_n=\sum_{i=n}^{\infty}(a_i-b_i)$. D'après le Lemme 5, $\gamma(a_n)\geq L_n/4$, en conséquence,

$$\frac{\gamma(a_n)}{a_n}\geq\frac{L_n}{4\,a_n}\geq\frac{(a_n-b_n)}{4\,a_n},$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\gamma(a_n)}{a_n}\geq\frac{1}{4}\limsup_{n\to+\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)>0.$$

C'est-à-dire que 0 est un point régulier du domaine $\mathscr{C}E$ d'après le Lemme 6, mais on sait que 0 est régulier si et seulement si E est non effilé en 0; et la conclusion ci-dessus est contraire à l'hypothèse du Lemme.

Démonstration du Théorème 3

On peut supposer que la limite fine soit ∞. Soit Ω la partie non relativement compacte connexe de $(z\ ;\ |f(z)|>1)$ dont le complémentaire est effilé en ω et $\Omega_\varepsilon=\left(z\ ;\ G(z, z_0)>\frac{\varepsilon}{2}>0\right)$ où $G(z, z_0)$ est la fonction de Green de Ω de pôle z_0 et $\limsup_{z\to\omega} G(z, z_0)=\varepsilon$ qui est positif parce que $\mathscr{C}\Omega$ est effilé en ω. Ω_ε est aussi effilé en ω. On sait que sur Ω_ε f tend vers ∞ (Th. 3 [11]). Soit E ensemble sur l'axe positif de x qui est rabattement de $\mathscr{C}\Omega_\varepsilon$ d'origine 0 sur l'axe positif de x, alors E est effilé en ω. Parce que la capacité de $E\cap(\lambda^n\leq|z|\leq\lambda^{n+1})$ est plus petite que celle de $\mathscr{C}\Omega_\varepsilon\cap(\lambda^n\leq|z|\leq\lambda^{n+1})$ pour n quelconque $(\lambda>1)$ et pour que E soit effilé en ω, il faut et il suffit que l'inverse de E soit effilé en 0 ([1]), et grâce à un théorème de Wiener. On peut écrire $E=\bigcup_i[a_i, b_i]$

où $a_i < b_i < a_{i+1}$ pour tout i, parce que $\partial\Omega$ est un ensemble des courbes de niveau de f et $\partial\Omega_\varepsilon$ est un ensemble des courbes de niveau de la fonction de Green de Ω. En considérant que l'inverse de E est effilé en 0, d'après le Lemme 7, $\lim_{i\to+\infty} b_i/a_i = 1$, par conséquent, il existe une suite (r_n), $r_1 > 1$, telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z| = r_n) \cap \mathscr{C}\Omega_\varepsilon = \phi$, $f(r_n e^{i\theta})$ tend vers la limite fine ∞ et $r_{n+1}/r_n \leq 2$.

On sait que pour tout a de la spdère de Riemann,

$$T(r,\ f) = m(r,\ a) + N(r,\ a) \tag{1}$$

(le premier théorème fondamental de Nevanlinna).
Dans ce cas, comme dans la démonstration du Théorème 2, pour a quelconque fini

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(r_n,\ a)}{T(r_n,\ f)} = 0,$$

par conséquent, en vertu de l'égalité (1), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N(r_n,\ a)}{T(r_n,\ f)} = 1. \tag{2}$$

Pour r positif quelconque plus grand que r_1, il y a un n tel que $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ et on a, en considérant que $T(r,\ f)$ est croissante, des inégalités suivantes:

$$\frac{\log T(r,\ f)}{\log r} \leq \frac{\log T(r,\ f)}{\log r_n} \leq \frac{\log T(r_{n+1},\ f)}{\log r_n} \leq \frac{\log T(r_{n+1},\ f)}{\log r_{n+1} - \log 2},$$

de sorte que l'on a

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,\ f)}{\log r} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log T(r_n,\ f)}{\log r_n}. \tag{3}$$

En outre, l'inégalité $N(r,\ a) \leq T(r,\ f)$ entraîne que

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,\ a)}{\log r} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,\ f)}{\log r}. \tag{4}$$

En combinant (2), (3) et (4), on a

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,\ a)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,\ f)}{\log r}.$$

En ce qui concerne ∞, on montre comme suivant. D'après le Lemme 2, $\log|f(z)|/\log|z|$ dans Ω admet une limite fine finie (soit α) en ω, par conséquent, pour un ε' positif,

$$D = \{z \in \Omega \ ; \ \log |f(z)|/\log |z| < (\alpha + \varepsilon')\}$$

est un voisinage fin de ω. ∂D est la réunion de l'ensemble des courbes de niveau d'une fonction harmonique $(\alpha + \varepsilon') \log |z| - \log |f(z)|$ dans Ω-{pôles de $f(z)$} et $\partial \Omega$, de sorte que l'on peut discuter pour ∞ aussi comme dans la première partie de cette démonstration. C'est-à-dire, comme E, on prend l'ensemble E_1 qui est rabattemant de $\mathscr{C}D$ d'origine 0 sur l'axe positif de x. E_1 a le même caractère que E, de sorte que l'on peut prendre une suite (r_n), $r_1 > 1$, telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z| = r_n) \cap \mathscr{C}D = \phi$: $\log |f(r_n e^{i\theta})|/\log r_n < (\alpha + \varepsilon')$ et $r_{n+1}/r_n \leq 2$. Pour cette suite,

$$m(r_n, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(r_n e^{i\theta})| \, d\theta \leq (\alpha + \varepsilon') \log r_n$$

et

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{m(r_n, \infty)}{T(r_n, f)} \leq (\alpha + \varepsilon') \lim_{n\to+\infty} \frac{\log r_n}{T(r_n, f)} = 0,$$

par conséquent, d'après (1)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N(r_n, \infty)}{T(r_n, f)} = 1. \tag{2'}$$

On a aussi

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r, \infty)}{\log r} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} \tag{4'}$$

parce que $N(r, \infty) \leq T(r, f)$.

En combinant (2'), (3) et (4'), on a

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r, \infty)}{\mathrm{lig}\, r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

En conséquence, pour tout a fini ou non, on a

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r, a)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Cette relation est valable si $\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty$.
Et, on a démontré ce Théorème.

5. Sur des ensembles des valeurs d'adhérence

Soit D un domaine dans le plan, Γ la frontière de D, z_0 un point de Γ, f une fonction méromorphe uniforme dans D. On rappelle des notations et quelques résultats sur des ensembles des valeurs d'adhérence:

$C_D(f, z_0)$: l'ensemble des valeurs d'adhérence ordinaire en z_0,

$C_\Gamma(f, z_0)$: l'ensemble des valeurs d'adhérence de la frontière en z_0,

$\tilde{C}_D(f, z_0)$: l'ensemble des valeurs d'adhérence fine en z_0.

Tous les trois sont fermés et non-vides; $C_D(f, z_0) \supset C_\Gamma(f, z_0), C_D(f, z_0) \supset \tilde{C}_D(f, z_0)$.

L'ensemble $\Omega = C_D(f, z_0) - C_\Gamma(f, z_0)$ est vide ou ouvert, et s'il n'est pas vide, soit Ω_n un composant connexe quelconque de Ω, alors f prend toutes les valeurs de Ω_n sauf au plus deux dans un voisinage quelconque de z_0 (voir [10]). Si z_0 est un point irrégulier de D, $\tilde{C}_D(f, z_0)$ est total ou se compose d'un seul point ([11]).

Sous quelques conditions, on peut diminuer des valeurs exceptionnelles:

Théorème 4

Supposons que Ω ne soit pas vide et $\tilde{C}_D(f, z_0)$ se compose d'un seul point. Si z_0 est un point régulier, il n'y a pas de valeurs exceptionnelles dans Ω. Si z_0 est un point irrégulier, il n'y a au plus qu'une valeur exceptionnelle dans Ω.

Démonstration

1) le cas où z_0 est un point régulier

S'il y a une valeur exceptionnelle w_0 dans Ω, w_0 est une valeur asymptotique de $f(z)$ en z_0 d'après le théorème 1 (p. 14 [10]), de sorte que w_0 est contenue dans $\tilde{C}_D(f, z_0)$. Pour un $\varepsilon > 0$ tèl que $(|w - w_0| \leq \varepsilon) \subset \Omega$, $f^{-1}(|w - w_0| = \varepsilon)$ n'est pas effilé en z_0. En effet, s'il est effilé en z_0, par la définition d'effilement, en vertu du principe de minimum, $f^{-1}(|w - w_0| < \varepsilon)$ ou $\mathscr{C}f^{-1}(|w - w_0| \leq \varepsilon)$ est effilé en z_0, mais ils ne sont pas effilés en z_0 ; $f^{-1}(|w - w_0| < \varepsilon)$ contient une courbe qui termine à z_0 et $\mathscr{C}f^{-1}(|w - w_0| \leq \varepsilon)$ contient $\mathscr{C}D$ qui n'est pas effilé en z_0 puisque z_0 est régulier de D. On en conclut que $\tilde{C}_D(f, z_0)$ contient au moins deux points, c'est contraire à l'hypothèse.

2) le cas où z_0 est un point irrégulier

S'il y a deux valeurs exceptionnelles dans Ω, elles sont valeurs asymptotiques de $f(z)$ en z_0 grâce au théorème 1 (p. 14 [10]), par conséquent, elles sont contenues dans $\tilde{C}_D(f, z_0)$. Contradiction.

Bibliographie

[1] M. Brelot: Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. Ann. E.N.S. **61** (1944), 301-332.

[2] M. Brelot: Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. Ann. Univ. Grenoble, **22** (1946), 201-219.

[3] M. Brelot: On the behaviour of harmonic functions in the neighbourhood of an irregular point. J. d'analyse Math. **4** (1954-1956), 209-221.

[4] M. Brelot: Eléments de la théorie classique du potentiel. C.D.U. 3e édition 1965.

[5] C. Constantinescu: Dirichletsche Abbildungen. Nagoya Math. J. **20** (1962), 75-89.

[6] C. Constantinescu et A. Cornea: Ideale Ränder Riemanscher Flächen. Springer, Berlin 1963.

[7] J. Deny: Les potentiels d'énergie finie. Acta Math. **82** (1950), 107-183.

[8] J. L. Doob: Some classical function theory theorems and their modern versions. Ann. Inst. Fourier **15** (1965), 113-135.

[9] M. Heins: Lindélöfian maps. Ann. Math. **62** (1955), 418-446.

[10] K. Noshiro: Cluster sets. Springer, Berlin 1960.

[11] N. Toda: Etude des fonctions méromorphes au voisinage d'un point-frontière irrégulier. Bull. Sci. math. **89** (1965), 93-102.

[12] M. Tsuji: Potential theory in modern function theory. Maruzen, Tokyo 1959.

Université de Paris

et

Université de Nagoya