

ESPACES HOMOGENES DE STEIN DES GROUPES DE LIE COMPLEXES

YOZÔ MATSUSHIMA

Introduction

A. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G . Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{k} les algèbres de Lie de G et K respectivement. \mathfrak{k} est une sous-algèbre réelle de l'algèbre complexe \mathfrak{g} . Soit $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$ ($i^2 = -1$). Alors $\tilde{\mathfrak{k}}$ est une sous-algèbre complexe de \mathfrak{g} . Soit \tilde{K} le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à $\tilde{\mathfrak{k}}$. Dans cet article nous démontrerons d'abord le théorème suivant qui est un analogue analytique du théorème de Cartan-Malcev-Iwasawa (cf. [8]).

THÉORÈME 1. *La variété d'un groupe de Lie complexe et connexe G est holomorphiquement homéomorphe à la variété $C^l \times \tilde{K}$, C^l désignant l'espace numérique complexe de dimension complexe l .*

Un groupe de Lie complexe G sera dit un *groupe de Stein*, si la variété de G est une variété de Stein. Dans le mémoire [10] nous avons donné une condition algébrique pour qu'un groupe de Lie complexe et connexe soit un groupe de Stein. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G . G est de Stein si et seulement si $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, \mathfrak{k} désignant la sous-algèbre réelle de l'algèbre de Lie complexe de G correspondant à K (voir [10], Théorème 1). Alors le sous-groupe \tilde{K} de G défini ci-dessus est le complexifié de K . (Nous dirons qu'un groupe de Lie complexe et connexe H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal L de H , si l'on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + i \cdot \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l} \cap i \cdot \mathfrak{l} = (0)$, \mathfrak{h} et \mathfrak{l} désignant les algèbres de Lie de H et L respectivement.) D'après des résultats de Chevalley, la variété d'un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal est une variété algébrique affine complexe (voir [2], Chapitre VI et l'appendice de cet article). Il résulte de là et du théorème 1 le théorème suivant.

Received January 30, 1960.

THÉORÈME 2. *La variété d'un groupe de Stein connexe est une variété algébrique affine complexe.*

Remarque. Par le raisonnement ci-dessus, on retrouve que si $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, la variété de G est une variété algébrique affine complexe et donc une variété de Stein. C'est une partie du théorème 1 de [10] (cf. la remarque 2 à la fin de cet article).

B. Dans le mémoire [10] nous avons démontré le théorème suivant : Soit $P(B, G)$ un espace fibré principal holomorphe dont la variété P est une variété de Stein et dont le groupe structural G est connexe et le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G . Alors la base B est aussi une variété de Stein (voir [10], Théorème 5).

Nous obtenons immédiatement de ce théorème le résultat suivant : Soit G un groupe de Stein et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G . Si H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H , l'espace quotient G/H est une variété de Stein.

Dans cet article nous démontrerons que, si G est semi-simple, la réciproque est aussi vraie. Nous démontrerons, en effet, le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G . Si l'espace quotient G/H est une variété de Stein, H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H .*

D'autre part, Iwahori et Sugiura ont démontré récemment le théorème suivant en généralisant les raisonnements de Chevalley dans le chapitre VI de [2] : Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G . Si H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H , l'espace quotient G/H est une variété algébrique affine complexe (voir [7]).

Nous obtenons de ce théorème d'Iwahori-Sugiura et du théorème 3 le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G . Si l'espace quotient G/H est une variété de Stein, c'est une variété algébrique affine complexe.*

A. Structure analytique des variétés des groupes de Lie complexes

1. Pour démontrer le théorème 1, montrons d'abord que \tilde{K} est fermé dans G . Le lemme suivant est dû à Goto [4].

LEMME 1. *Soit G un groupe de Lie connexe et soit H un sous-groupe de Lie connexe de G . Si H n'est pas fermé dans G , il existe un sous-groupe à un paramètre L de H tel que la fermeture \bar{L} de L ne soit pas contenue dans H . De plus, H est un sous-groupe invariant de \bar{H} , \bar{H} désignant la fermeture de H .*

LEMME 2. *Soit G un groupe de Lie connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G . Soit H un sous-groupe de Lie connexe de G contenant K . Alors H est fermé dans G .*

Soit \bar{H} la fermeture de H . Supposons $\bar{H} \neq H$. Il existe alors un sous-groupe à un paramètre L de H tel que la fermeture \bar{L} de L ne soit pas contenue dans H (Lemme 1). \bar{L} est un sous-groupe fermé connexe abélien de \bar{H} de dimension > 1 . L étant partout dense dans \bar{L} , \bar{L} doit être compact. K étant un sous-groupe compact maximal de \bar{H} , il existe un élément x de \bar{H} tel que $\bar{L} \subset xKx^{-1}$ (cf. [8]). Alors $\bar{L} \subset xKx^{-1} \subset xHx^{-1}$. H étant invariant dans \bar{H} d'après le lemme 1, on a $xHx^{-1} = H$ et par suite $\bar{L} \subset H$. Cette contradiction montre que $\bar{H} = H$ et par suite H est fermé dans G .

Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G . Soit \tilde{K} le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à la sous-algèbre complexe $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} + i \cdot \mathfrak{f}$ de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} de G , \mathfrak{f} désignant la sous-algèbre réelle de \mathfrak{g} correspondant à K .

LEMME 3. *Le groupe \tilde{K} est fermé dans G et l'espace quotient G/\tilde{K} est simplement connexe.*

\tilde{K} est fermé d'après le lemme 2. On sait que l'espace quotient G/K est homéomorphe à un espace euclidien [8]. G/K est un espace fibré de base G/\tilde{K} et de fibre \tilde{K}/K . La fibre \tilde{K}/K étant connexe, la base G/\tilde{K} est simplement connexe.

LEMME 4. *Les notations étant comme ci-dessus, la variété complexe G/\tilde{K} est isomorphe à la variété complexe C^l ($l \geq 0$).*

Nous démontrons le lemme 4 par récurrence sur la dimension complexe

de G . Si la dimension complexe de G est égale à 1, le lemme 4 est trivialement vérifié. Supposons donc que le lemme 4 soit démontré pour les groupes de Lie complexes et connexes de dimension complexe plus petite que n . Soit G un groupe de Lie complexe et connexe de dimension complexe n . Si G est semi-simple, on a $G = \tilde{K}$ et il ne reste plus à démontrer. Nous supposons donc que G ne soit pas semi-simple. Supposons d'abord que G soit abélien. D'après le lemme 3, le groupe quotient G/\tilde{K} est simplement connexe. Il en résulte immédiatement que G/\tilde{K} est isomorphe à C^t . Nous supposons donc que G ne soit pas abélien. Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Soit \mathfrak{a} un idéal réel abélien maximal de \mathfrak{g} . Alors \mathfrak{a} est un idéal complexe. En effet, soit $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} + i \cdot \mathfrak{a}$. Alors $\tilde{\mathfrak{a}}$ est un idéal abélien de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{a} . \mathfrak{a} étant un idéal abélien maximal de \mathfrak{g} , on a $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}$, ce qui montre que \mathfrak{a} est un idéal complexe. Soit A le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à \mathfrak{a} . Alors A est fermé dans G . En effet, soit \bar{A} la fermeture de A . Alors \bar{A} est un sous-groupe invariant, abélien, connexe et fermé de G . Alors la sous-algèbre $\bar{\mathfrak{a}}$ de \mathfrak{g} correspondant à \bar{A} est un idéal réel abélien de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{a} . Par suite on a $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, ce qui entraîne $\bar{A} = A$. A est donc fermé. Puisque G n'est pas semi-simple, la dimension de A est positive et puisque G n'est pas abélien, A est différent de G . Soit $G' = G/A$ et soit π la projection canonique de G sur G' . Alors l'image $\pi(K)$ de K est un sous-groupe compact maximal de G' [8]. Soit \mathfrak{g}' l'algèbre de Lie de G' et soit π' la projection canonique de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}' . Alors $\pi'(\mathfrak{t})$ est l'algèbre de $\pi(K)$. On voit alors que l'algèbre de $\pi(\tilde{K})$ est égale à $\pi'(\mathfrak{t}) + i \cdot \pi'(\mathfrak{t})$. La dimension complexe de G' étant plus petite que n , d'après l'hypothèse de récurrence, $G'/\pi(\tilde{K})$ est isomorphe à C^s . L'image inverse de $\pi(\tilde{K})$ dans G étant $A\tilde{K}$, le sous-groupe $A\tilde{K}$ est fermé dans G et la variété $G'/\pi(\tilde{K})$ est isomorphe à la variété $G/A\tilde{K}$. Par suite, la variété $G/A\tilde{K}$ est isomorphe à C^s . D'autre part, G/\tilde{K} est un espace fibré holomorphe de base $G/A\tilde{K}$ et de fibre $A\tilde{K}/\tilde{K}$. La base $G/A\tilde{K}$ étant isomorphe à C^s , il résulte d'un théorème de Cartan-Grauert (voir [5] et [6]) que cette fibration est holomorphiquement triviale. Par conséquent, G/\tilde{K} est isomorphe à $C^s \times (A\tilde{K}/\tilde{K})$. Supposons d'abord que $G \neq A\tilde{K}$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que $A\tilde{K}/\tilde{K}$ est isomorphe à C^t . Alors G/\tilde{K} est isomorphe à C^{s+t} . Supposons maintenant que $G = A\tilde{K}$. Alors A opère holomorphiquement et transitivement sur G/\tilde{K} et le groupe d'isotropie est égal à $A \cap \tilde{K}$. Par suite, la variété G/\tilde{K} est isomorphe à la variété du-

groupe abélien complexe et connexe $A/A \cap \tilde{K}$. D'après le lemme 3, G/\tilde{K} est simplement connexe et par suite $A/A \cap \tilde{K}$ l'est aussi. $A/A \cap \tilde{K}$ étant un groupe de Lié complexe abélien, il en résulte immédiatement que $A/A \cap \tilde{K}$ est isomorphe à C^l . Par conséquent, la variété G/\tilde{K} est isomorphe à C^l et le lemme 4 est établi.

Démonstration du théorème 1. G est un espace fibré principal holomorphe de base G/\tilde{K} et de groupe structural \tilde{K} . La base G/\tilde{K} étant isomorphe à C^l (Lemme 4), cette fibration est holomorphiquement triviale d'après un théorème de Cartan-Grauert ([5] et [6]). Par suite, la variété de G est isomorphe au produit $C^l \times \tilde{K}$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Le théorème 2 résulte du théorème 1 et de la proposition dans l'appendice de cet article, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction.

2. Concernant la structure du groupe \tilde{K} nous démontrons ici la proposition suivante. Nous utiliserons les notations introduites au paragraphe 1.

PROPOSITION. *Il existe des sous-groupes de Lie complexes, connexes, fermés et invariants \tilde{S} et \tilde{Z} de \tilde{K} satisfaisant aux conditions suivantes :*

- 1) $\tilde{K} = \tilde{S} \cdot \tilde{Z}$ et $\tilde{S} \cap \tilde{Z}$ est un groupe fini ;
- 2) \tilde{S} est semi-simple ;
- 3) \tilde{Z} est le centre connexe de \tilde{K} et isomorphe à un groupe quotient de C^{+m} par un sous-groupe fermé isomorphe à C^s , C^{*m} désignant le produit des m groupes isomorphes au groupe multiplicatif C^* des nombres complexes $\neq 0$;
- 4) on a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{f} = (0)$, si et seulement si $\tilde{Z} \cong C^{*m}$.

\mathfrak{f} étant l'algèbre de Lie du groupe compact K , \mathfrak{f} se décompose $\mathfrak{f} = \mathfrak{s} + \mathfrak{z}$ (somme directe), où \mathfrak{z} est le centre de \mathfrak{f} et $\mathfrak{s} = [\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$ est l'idéal semi-simple de \mathfrak{f} . Soient $\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s} + \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{s}$ et $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} + \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{z}$. On voit facilement que $\tilde{\mathfrak{s}}$ est un idéal semi-simple de $\tilde{\mathfrak{f}}$ et $\tilde{\mathfrak{z}}$ est dans le centre de $\tilde{\mathfrak{f}}$. On a $\tilde{\mathfrak{s}} \cap \tilde{\mathfrak{z}} = (0)$, car $\tilde{\mathfrak{s}} \cap \tilde{\mathfrak{z}}$ est dans le centre de $\tilde{\mathfrak{s}}$ et car $\tilde{\mathfrak{s}}$ est semi-simple. Alors $\tilde{\mathfrak{f}} = \tilde{\mathfrak{s}} + \tilde{\mathfrak{z}}$ (somme directe) et $\tilde{\mathfrak{z}}$ est le centre de $\tilde{\mathfrak{f}}$. On va montrer que $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{z}$. Soit φ la représentation adjointe de $\tilde{\mathfrak{f}}$ et soit n la dimension complexe de $\tilde{\mathfrak{f}}$. Alors $\varphi(\tilde{\mathfrak{f}}) \subset \mathfrak{gl}(n, C)$, $\mathfrak{gl}(n, C)$ désignant l'algèbre de Lie des matrices de degré n à coefficients complexes. K étant compact, on peut supposer que $\varphi(\mathfrak{f}) \subset \mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ désignant l'algèbre de Lie du groupe unitaire $U(n)$. Alors $\varphi(\mathfrak{f} \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{f}) \subset \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{u}(n)$. On voit facilement que $\mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{u}(n) = (0)$. Alors $\varphi(\mathfrak{f} \cap \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{f}) = 0$, ce qui

entraîne que $\mathfrak{f} \cap i \cdot \mathfrak{f} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$. Alors $\mathfrak{f} \cap i \cdot \mathfrak{f} = (\mathfrak{f} \cap \tilde{\mathfrak{g}}) \cap i \cdot (\mathfrak{f} \cap \tilde{\mathfrak{g}})$. Soit $X \in \mathfrak{f} \cap \tilde{\mathfrak{g}}$ et soit $X = Y + Z$, $Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{g}$. Puisque $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$, X s'écrit $X = X_1 + i \cdot X_2$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$. Alors $Y = (X_1 - Z) + i \cdot X_2 \in \tilde{\mathfrak{g}} \cap \tilde{\mathfrak{g}}$. Puisque $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \tilde{\mathfrak{g}} = (0)$, on a $Y = 0$ et par suite $X \in \mathfrak{g}$. On a donc $\mathfrak{f} \cap \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ et par suite $\mathfrak{f} \cap i \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{g} \cap i \cdot \mathfrak{g}$. Il en résulte que $\mathfrak{g} \cap i \cdot \mathfrak{g} = (0)$. Soient \tilde{S} et \tilde{Z} les sous-groupes de Lie connexes de \tilde{K} correspondant aux idéaux $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathfrak{h}}$ de $\tilde{\mathfrak{k}}$ respectivement. Puisque $\tilde{\mathfrak{k}} = \tilde{\mathfrak{g}} + \tilde{\mathfrak{h}}$, on a $\tilde{K} = \tilde{S} \cdot \tilde{Z}$. Le groupe $\tilde{S} \cap \tilde{Z}$ étant dans le centre de \tilde{S} et le centre d'un groupe complexe semi-simple connexe étant fini, $\tilde{S} \cap \tilde{Z}$ est un groupe fini. On va montrer que \tilde{S} et \tilde{Z} sont fermés dans \tilde{K} . Pour cela, soit $\hat{K} = \tilde{S} \times \tilde{Z}$ et soit α l'homomorphisme de \hat{K} sur \tilde{K} défini par $\alpha(x, y) = x \cdot y$ ($x \in \tilde{S}$, $y \in \tilde{Z}$). $\tilde{S} \cap \tilde{Z}$ étant fini, le noyau de α est fini. Il en résulte que l'image par α d'un sous-ensemble fermé de \hat{K} est fermée dans \tilde{K} . En particulier, \tilde{S} et \tilde{Z} sont fermés dans \tilde{K} . Soit Z le sous-groupe de Lie connexe de \tilde{Z} correspondant à \mathfrak{g} . Alors Z est le sous-groupe compact maximal de \tilde{Z} , car $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \cap \tilde{\mathfrak{g}}$. Soit m la dimension réelle de \mathfrak{g} et soit s la dimension complexe de $\mathfrak{f} \cap i \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{g} \cap i \cdot \mathfrak{g}$. Nous allons montrer que \tilde{Z} est isomorphe à un groupe quotient de C^{*m} par un sous-groupe fermé isomorphe à C^s . Soit t la dimension complexe de \tilde{Z} et soit $\tilde{Z} = A/D$, A désignant un espace vectoriel complexe de dimension complexe t et D désignant un sous-groupe discret de A . On voit facilement que $t = m - s$. La dimension réelle du groupe compact maximal Z de \tilde{Z} étant égale à m , D est un groupe abélien libre à m générateurs libres. Soient d_1, \dots, d_m des générateurs libres de D . Alors d_1, \dots, d_m sont linéairement indépendants sur les nombres réels. Soit B le sous-espace vectoriel réel de A engendré par d_1, \dots, d_m . Alors $D \subset B$ et l'image de B dans \tilde{Z} est égale à Z . Puisque $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + i \cdot \mathfrak{g}$, on a $A = B + i \cdot B$. Soit B^c la complexification de l'espace vectoriel réel B . Alors B^c est un espace vectoriel complexe de dimension complexe m et on peut identifier B avec un sous-espace vectoriel réel de B^c . Alors d_1, \dots, d_m constitue une base complexe de B^c et D est un sous-groupe discret de B^c . Puisque $A = B + i \cdot B$, il existe l'application linéaire complexe canonique θ de B^c sur A telle que $\theta(x) = x$ pour tout $x \in B$. Alors θ induit l'homomorphisme η de $\tilde{L} = B^c/D$ sur $\tilde{Z} = A/D$. Le sous-groupe compact maximal L de \tilde{L} étant B/D , L est appliqué par η isomorphiquement sur Z . Soit N le noyau de η et soit N_0 la composante connexe de l'élément neutre de N . Alors $L \cap N = (e)$. Il en résulte que N_0 est simplement connexe et donc isomorphe à C^l . Nous allons montrer que

$N = N_0$. Soit ψ l'homomorphisme canonique de \tilde{L}/N_0 sur \tilde{Z} . LN_0/N_0 est le sous-groupe compact maximal de \tilde{L}/N_0 et ce groupe est appliqué par ψ isomorphiquement sur Z . N/N_0 est un sous-groupe discret de \tilde{L}/N_0 et égal au noyau de ψ . N/N_0 est fini, sinon la dimension du groupe compact maximal Z de \tilde{Z} serait plus grande que celle de LN_0/N_0 . Il en résulte que $N/N_0 \subset LN_0/N_0$ et par suite $N \subset LN_0$. Soit $x \in N$ et soit $x = y \cdot z$, $y \in L$, $z \in N_0$. Alors $z^{-1} \cdot x = y \in N \cap L$. Puisque $N \cap L = (e)$, on a $y = e$ et par suite $x = z \in N_0$. On a donc démontré que $N = N_0$ et $N \cong C^l$. La dimension complexe de \tilde{L}/N (resp. de \tilde{Z}) étant égale à $m - l$ (resp. $m - s$) et $\tilde{L}/N \cong \tilde{Z}$, on a $l = s$. s étant la dimension complexe de $\mathfrak{f} \cap i \cdot \mathfrak{f}$, on a $\mathfrak{f} \cap i \cdot \mathfrak{f} = (0)$, si et seulement si $\tilde{L} \cong \tilde{Z}$. On va montrer maintenant que $\tilde{L} \cong C^{*m}$. d_1, \dots, d_m étant une base complexe de B^c , tout élément x de B^c s'écrit $x = z_1 \cdot d_1 + \dots + z_m \cdot d_m$ ($z_i \in C$). Soit φ l'homomorphisme de B^c sur C^{*m} défini par $\varphi(x) = (\exp 2\pi i \cdot z_1, \dots, \exp 2\pi i \cdot z_m)$. Alors le noyau de φ est égal à D . Par conséquent, φ définit un isomorphisme de $\tilde{L} = B^c/D$ sur C^{*m} . La proposition est ainsi démontrée.

B. Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes semi-simples

1. Soit V une variété complexe et soit A^p l'espace vectoriel complexe des p -formes différentielles holomorphes sur V et soit Z^p le sous-espace de A^p des p -formes fermées. Soit $H^p(V, A) = Z^p/dA^{p-1}$ ($p = 0, 1, 2, \dots$).

LEMME 5. Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe de dimension complexe n . Alors $H^n(G, A) \cong (0)$.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G . On sait que G est le complexifié de K . Désignons par L_a la translation à gauche de G par un élément a de G . Soit dg la mesure de Haar sur le groupe compact K dont la mesure totale est égale à 1. Pour toute p -forme holomorphe ω sur G , soit

$$I(\omega) = \int_K L_g^* \cdot \omega dg.$$

Alors $I(\omega)$ est une p -forme holomorphe et $dI(\omega) = I(d\omega)$ et $L_g^* \cdot I(\omega) = I(\omega)$ pour tout $g \in K$. Nous allons montrer que $L_a^* \cdot I(\omega) = I(\omega)$ pour tout $a \in G$. On peut choisir un voisinage ouvert U de l'élément neutre e de G satisfaisant aux conditions suivantes: Il existe un système de coordonnées locales $(z_1,$

$\dots, z_n)$ de G dans U tel que le sous-ensemble des points x de U ayant les coordonnées $z_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) toutes réelles soit égal à $U \cap K$. Soit V un voisinage ouvert de e tel que $V^2 \subset U$. Soit $I(\omega) = \eta$. Si $a, z \in V$, $L_a^* \cdot \eta$ s'écrit

$$L_a^* \cdot \eta = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \eta_{i_1 \dots i_p}(a, z) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p},$$

où $\eta_{i_1 \dots i_p}(a, z)$ sont des fonctions holomorphes sur $V \times V$. Fixons le point $z \in V$. Si $a \in V \cap K$, on a $L_a^* \cdot \eta = \eta$ et par suite $\eta_{i_1 \dots i_p}(a, z) = \eta_{i_1 \dots i_p}(e, z)$ pour tout $a \in V \cap K$. Les fonctions $\eta_{i_1 \dots i_p}(a, z)$ étant des fonctions holomorphes de $a \in V$ et $V \cap K$ étant l'ensemble des points de V dont les coordonnées sont toutes réelles, il résulte de ce que nous avons montré que $\eta_{i_1 \dots i_p}(a, z) = \eta_{i_1 \dots i_p}(e, z)$ pour tout $a \in V$. Par conséquent, on a $L_a^* \cdot \eta = \eta$ dans V pour tout $a \in V$. Les p -formes $L_a^* \cdot \eta$ et η étant holomorphes, on a $L_a^* \cdot \eta = \eta$ dans G tout entier pour tout $a \in V$. D'autre part, G étant connexe, tout élément a de G s'écrit $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_k$ avec $a_i \in V$. Par suite, on a $L_a^* \cdot \eta = \eta$ pour tout $a \in G$.

Soit maintenant \mathbf{I}^p l'espace vectoriel complexe des p -formes holomorphes sur G invariantes à gauche et soit \mathbf{K}^p le sous-espace de \mathbf{I}^p des p -formes fermées. Soit

$$H^p(G, \mathbf{I}) = \mathbf{K}^p / d\mathbf{I}^{p-1}.$$

On a $H^n(G, \mathbf{I}) = \mathbf{C}$, car $H^n(G, \mathbf{I})$ est isomorphe à l'espace de cohomologie de dimension n de l'algèbre de Lie de G (voir [9]). L'application identique j de \mathbf{I}^p dans \mathbf{A}^p induit un homomorphisme $j^* : H^p(G, \mathbf{I}) \rightarrow H^p(G, \mathbf{A})$. L'homomorphisme j^* est injectif. En effet, soit $\omega \in \mathbf{K}^p$ et soit $\omega = d\eta$, $\eta \in \mathbf{A}^{p-1}$. Alors $\omega = I(\omega) = I(d\eta) = dI(\eta)$ et $I(\eta) \in \mathbf{I}^{p-1}$, ce qui montre que j^* est injectif. Alors $j^* \cdot H^n(G, \mathbf{I}) \cong \mathbf{C}$ et $j^* \cdot H^n(G, \mathbf{I}) \subset H^n(G, \mathbf{A})$ et par suite $H^n(G, \mathbf{A}) \cong (0)$.

LEMME 6. Soit V_1 une variété complexe isomorphe à \mathbf{C}^1 et soit V_2 une variété complexe de dimension complexe m . On a alors $H^{m+1}(V_1 \times V_2, \mathbf{A}) = (0)$.

Soit $\{U_i, i \in I\}$ un recouvrement ouvert de V_2 tel que dans chaque U_i , il existe un système de coordonnées locales de V_2 . Soit θ une $(m+1)$ -forme holomorphe sur $V_1 \times V_2$. Soit w une coordonnée globale de V_1 ($\cong \mathbf{C}^1$). Soit (z_1, \dots, z_m) un système de coordonnées locales dans U_i . Alors θ s'écrit dans $V_1 \times U_i$ sous la forme $\theta = f_i(w, z_1, \dots, z_m) dw \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$, où $f_i(w, z)$ est une fonction holomorphe dans $V_1 \times U_i$. Soit $g_i(w, z) = \int_0^w f_i(\zeta, z) d\zeta$ et soit $\eta_i = g_i(w, z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$. Alors η_i est une m -forme holomorphe définie dans

$V_1 \times U_i$ ($i \in I$) et on a $d\eta_i = \theta$ dans $V_1 \times U_i$. On voit facilement que $\eta_i = \eta_j$ dans $V_1 \times (U_i \cap U_j)$ ($i, j \in I$). Il existe alors une m -forme holomorphe η sur $V_1 \times V_2$ telle que $\eta = \eta_i$ dans $V_1 \times U_i$ pour tout $i \in I$. Alors $\theta = d\eta$, ce qui montre que $H^{m+1}(V_1 \times V_2, \mathbf{A}) = (0)$.

LEMME 7. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit A un sous-groupe fermé complexe de G isomorphe à C^l ($l \geq 1$). Alors l'espace quotient G/A n'est pas une variété de Stein.*

Supposons que G/A soit une variété de Stein et nous en déduisons une contradiction. G est un espace fibré principal holomorphe de base G/A et de groupe structural A . Soit \mathbf{F} le faisceau sur G/A des germes d'applications holomorphes de G/A dans A . A étant isomorphe à C^l , le faisceau \mathbf{F} est analytique cohérent. Puisque nous avons supposé que G/A soit de Stein, on a $H^1(G/A, \mathbf{F}) = (0)$ d'après le "Théorème B" de H. Cartan [1], ce qui montre que tout espace fibré principal holomorphe de base G/A et de groupe structural A est holomorphiquement trivial. En particulier, la variété complexe G est isomorphe à la variété complexe $A \times (G/A)$. A étant isomorphe à C^l , il résulte de là et du lemme 6 que $H^n(G, \mathbf{A}) = (0)$, n étant la dimension complexe de G . D'autre part, on a $H^n(G, \mathbf{A}) \neq (0)$ d'après le lemme 5. Cette contradiction montre que G/A n'est pas une variété de Stein.

2. LEMME 8. *Soit G un groupe de Lie complexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G . Soit R le radical de H . Alors pour que l'espace quotient G/H soit une variété de Stein, il faut et il suffit que l'espace quotient G/R est une variété de Stein.*

L'espace quotient G/R est un espace fibré principal holomorphe de base G/H et de groupe structural H/R . Le groupe H/R étant semi-simple, H/R est une variété de Stein (cf. [10]). Si G/H est une variété de Stein, G/R l'est aussi d'après [10], Théorème 4. Si G/R est une variété de Stein, G/H l'est aussi d'après [10], Théorème 5, car tout groupe complexe semi-simple connexe est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal. Le lemme 8 est ainsi établi.

LEMME 9. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit R un sous-groupe résoluble, fermé, complexe et connexe de G . Soit $[R, R]$ le groupe dérivé de R . Alors $[R, R]$ est fermé dans G et simplement connexe. De plus,*

le groupe quotient $R/[R, R]$ est un groupe de Stein.

On sait que G est isomorphe à un sous-groupe fermé complexe de $GL(n, C)$ pour certain n (cf. [10], Proposition 1 et l'appendice de cet article). On peut donc supposer que R soit un sous-groupe résoluble, fermé, complexe et connexe de $GL(n, C)$. Soit $\mathcal{A}(n, C)$ le sous-groupe de $GL(n, C)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

et soit $N(n, C)$ le sous-groupe de $GL(n, C)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Lie, on peut supposer que $R \subset \mathcal{A}(n, C)$. Alors $[R, R] \subset N(n, C)$. $N(n, C)$ étant nilpotent et simplement connexe, tout sous-groupe de Lie connexe de $N(n, C)$ est simplement connexe et fermé [3]. En particulier, $[R, R]$ est simplement connexe et fermé dans $N(n, C)$ et par suite fermé dans G . On va montrer que $R/[R, R]$ est un groupe de Stein. Le sous-groupe L de $\mathcal{A}(n, C)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp i\theta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \exp i\theta_n \end{pmatrix} \quad (\theta_i \text{ étant réels})$$

est un sous-groupe compact maximal de $\mathcal{A}(n, C)$. En prenant un groupe conjugué de R dans $\mathcal{A}(n, C)$ au besoin, on peut supposer qu'un sous-groupe compact maximal K de R soit contenu dans L . On a alors $K = R \cap L$. Soient \mathfrak{r} et \mathfrak{k} les algèbres de Lie de R et K respectivement. Alors l'algèbre dérivée $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ est l'algèbre de $[R, R]$. On a $(\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = (0)$, car les matrices dans $\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$ sont toutes semi-simples et les matrices dans $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ sont toutes nilpotentes. Soit π la projection canonique de R sur $R/[R, R]$ et soit π' la projection canonique de \mathfrak{r} sur $\mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$. $[R, R]$ étant connexe, l'image $\pi(K)$ de K est un sous-groupe compact maximal de $R/[R, R]$ et $\pi'(\mathfrak{k})$ est son algèbre de Lie. Il résulte immédiatement de la relation $(\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = (0)$ que $\pi'(\mathfrak{k})$

$\cap i \cdot \pi'(\mathfrak{f}) = (0)$. Alors $R/[R, R]$ est un groupe de Stein (voir la remarque dans l'introduction et [10], Théorème 1). Le lemme 9 est ainsi établi.

LEMME 10. *Les notations étant celles du lemme 9, supposons que l'espace quotient G/R soit une variété de Stein. Alors $G/[R, R]$ est aussi une variété de Stein.*

En effet, $G/[R, R]$ est un espace fibré principal holomorphe de base G/R et de groupe structural $R/[R, R]$. D'après le lemme 9, $R/[R, R]$ est un groupe de Stein. Donc, si la base G/R est une variété de Stein, $G/[R, R]$ l'est aussi ([10], Théorème 4). Le lemme 10 est ainsi démontré.

LEMME 11. *Les notations étant celles du lemme 9, supposons que l'espace quotient G/R soit une variété de Stein. Alors R est isomorphe au groupe C^{*m} pour certain entier $m \geq 0$.*

Montrons d'abord que R est abélien. Supposons $[R, R] \neq (e)$ et nous en déduirons une contradiction. Définissons par récurrence $R_1 = [R, R]$, $R_2 = [R_1, R_1]$, \dots , $R_i = [R_{i-1}, R_{i-1}]$. D'après le lemme 5, les sous-groupes R_i de G sont tous fermés dans G et simplement connexes. Utilisant le lemme 10 plusieurs fois, on voit que G/R_i ($i = 1, 2, \dots$) est une variété de Stein. R étant résoluble, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $R_k \neq (e)$ et $R_{k+1} = (e)$. Alors R_k est abélien et simplement connexe et par suite isomorphe à C^l ($l \geq 1$). Comme G/R_k est une variété de Stein, c'est une contradiction d'après le lemme 7. On a donc démontré que R est abélien. R étant fermé dans G et G étant une variété de Stein, R est aussi une variété de Stein. Alors R est isomorphe au groupe $C^n \times C^{*m}$ pour certains entiers $n, m \geq 0$ ([10], Proposition 4). Soit $R = R_1 \times R_2$, où $R_1 \cong C^n$ et $R_2 \cong C^{*m}$. Alors G/R_1 est un espace fibré principal holomorphe de base G/R et de groupe R/R_1 ($\cong C^{*m}$). D'après le théorème 4 de [10], G/R_1 est une variété de Stein. D'après le lemme 7, on a alors $R_1 = (e)$ et par suite $R = R_2 \cong C^{*m}$. Le lemme 11 est donc établi.

LEMME 12. *Soit H un groupe de Lie complexe et connexe et soit R le radical de H . Si R est isomorphe au groupe C^{*m} ($m \geq 0$), R est le centre connexe de H .*

Soit K un sous-groupe compact maximal de R . R étant isomorphe à C^{*m} , R est abélien et le complexifié de K . Soient \mathfrak{h} , \mathfrak{r} et \mathfrak{f} les algèbres de Lie de H , R et K respectivement. Soient ψ et ψ' les représentations adjointes de H et de

\mathfrak{h} respectivement. Le groupe K étant compact, il existe un sous-espace vectoriel complexe \mathfrak{m} de \mathfrak{h} tel que $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + \mathfrak{r}$ (somme directe) et que $\phi(g) \cdot \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ pour tout $g \in K$. Soit $X \in \mathfrak{k}$. Alors $\phi'(X) \cdot \mathfrak{m} = [X, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. D'autre part, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}$ et \mathfrak{r} étant un idéal de \mathfrak{h} , on a $[X, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{r}$ et part suite $[X, \mathfrak{m}] = (0)$. Puisque $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$, on a $[Y, \mathfrak{m}] = (0)$ pour tout $Y \in \mathfrak{r}$. D'autre part, \mathfrak{r} étant abélien, $[Y, \mathfrak{r}] = (0)$ pour tout $Y \in \mathfrak{r}$. Il en résulte que \mathfrak{r} est contenu dans le centre \mathfrak{z} de \mathfrak{h} , car $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + \mathfrak{r}$. \mathfrak{r} étant le radical de \mathfrak{h} , il est clair que $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{z}$ et par suite $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}$. R est donc le centre connexe de H .

Démonstration du théorème 3. Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G . Supposons que l'espace quotient G/H soit une variété de Stein et soit R le radical de H . D'après le lemme 8, G/R est aussi une variété de Stein. Alors, d'après les lemmes 11 et 12, R est isomorphe au groupe C^{*m} et coïncide avec le centre connexe de H . Il en résulte immédiatement que H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H . Le théorème 3 est ainsi démontré.

Remarque 1. Les notations étant celles du théorème 3, soient K et L des sous-groupes compacts maximaux de G et H respectivement tels que $K \supset L$. On peut montrer facilement que l'espace quotient G/H est différentiablement homéomorphe au produit $(K/L) \times R^s$, R^s désignant l'espace numérique réel de dimension s ($s = n - m$, n et m étant les dimensions complexes de G et de H respectivement).

Remarque 2. Des propriétés de G que nous avons utilisé essentiellement dans la démonstration du théorème 3 sont les deux suivantes; a) G est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G ; b) G est isomorphe à un sous-groupe fermé de $GL(n, C)$ pour certain n . Mais on peut montrer que a) implique b) (cf. [2], Chapitre VI et l'appendice de cet article). Par conséquent, on peut démontrer le théorème 3 sous la condition un peu moins restrictive que G est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G .

En particulier, le lemme 7 est valable pour les groupes isomorphes à C^{*m} . Alors le sous-groupe fermé \tilde{Z} de \tilde{K} dans la proposition de A, 2 est de Stein si et seulement si \tilde{Z} est isomorphe à C^{*m} . Il résulte alors de la même proposition que, si G est de Stein, on a $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$. Mais la démonstration originale de ce fait donnée dans [10] est plus simple et plus directe.

Appendice

Soit K un groupe de Lie compact. D'après Chevalley, nous pouvons associer à K un groupe de Lie complexe $M(K)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1) La variété de $M(K)$ est une variété algébrique affine complexe ; 2) $M(K)$ est un groupe algébrique complexe ; 3) il existe l'isomorphisme canonique de K sur un sous-groupe compact K' de $M(K)$; 4) si l'on désigne par K'_0 (resp. $M_0(K)$) la composante connexe de l'élément neutre de K' (resp. de $M(K)$), K'_0 est un sous-groupe compact maximal de $M_0(K)$ et $M_0(K)$ est le complexifié de K'_0 (voir [2], Chapitre VI).

Soit G un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal K . Soit $M(K)$ le groupe de Lie complexe associé à K . K étant connexe, $M(K)$ l'est aussi. Il existe l'isomorphisme canonique φ de K sur un sous-groupe compact maximal K' de $M(K)$ et $M(K)$ est le complexifié de K' . Nous allons voir que l'isomorphisme φ peut être prolonger en un isomorphisme de G sur $M(K)$. Pour cela, il suffit de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION. Soient G et G' des groupes de Lie complexes et connexes. Soient K et K' des sous-groupes compacts maximaux de G et G' respectivement. Supposons que G (resp. G') soit le complexifié de K (resp. de K'). Supposons, de plus, qu'il existe un isomorphisme φ de K sur K' . Alors nous pouvons prolonger φ en un isomorphisme de G sur G' .

Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' les algèbres de Lie de G et G' . Soient \mathfrak{k} et \mathfrak{k}' celles de K et K' . On a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + i \cdot \mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}' \cap i \cdot \mathfrak{k}' = (0)$. L'isomorphisme φ de K sur K' définit un isomorphisme φ' de \mathfrak{k} sur \mathfrak{k}' . Soit $\hat{\varphi}'$ l'application de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}' définie par $\hat{\varphi}'(X + i \cdot Y) = \varphi'(X) + i \cdot \varphi'(Y)$. On voit facilement que $\hat{\varphi}'$ est un isomorphisme de l'algèbre complexe \mathfrak{g} sur l'algèbre complexe \mathfrak{g}' . Soient \hat{G} et \hat{G}' les revêtements universels de G et G' . Alors $\hat{\varphi}'$ définit un isomorphisme $\hat{\varphi}$ de \hat{G} sur \hat{G}' . Soit π (resp. π') la projection canonique de \hat{G} sur G (resp. de \hat{G}' sur G'). Soit D (resp. D') le noyau de π (resp. de π'). Nous allons montrer que $\hat{\varphi}(D) = D'$. Pour cela, soit \hat{K} l'image inverse de K dans \hat{G} . On sait que l'espace quotient G/K est isomorphe à un espace euclidien [8] et par suite G est rétractile sur K . En particulier, tout chemin dans G joignant l'élément neutre et un point de K est homotope à un chemin dans K

joignant les mêmes points. Il en résulte les faits suivants: \hat{K} est connexe et le revêtement universel de K et \hat{K} contient le noyau D de π . Soit maintenant \hat{K}' l'image inverse de K' dans \hat{G}' . Par un raisonnement analogue, on voit que \hat{K}' est connexe et le revêtement universel de K' et que \hat{K}' contient D' . On voit facilement que $\hat{\varphi}(\hat{K}) = \hat{K}'$ et que $\pi'(\hat{\varphi}(x)) = \varphi(\pi(x))$ pour tout $x \in \hat{K}$. Soit $x \in D$. Alors $x \in \hat{K}$ et par suite $\pi'(\hat{\varphi}(x)) = \varphi(\pi(x)) = \varphi(e) = e$, ce qui montre que $\hat{\varphi}(x) \in D'$. Soit, réciproquement, $y \in D'$. Puisque $D' \subset \hat{K}'$ et puisque $\hat{\varphi}(\hat{K}) = \hat{K}'$, il existe un élément $x \in \hat{K}$ tel que $\hat{\varphi}(x) = y$. Alors $\varphi(\pi(x)) = \pi'(\hat{\varphi}(x)) = \pi'(y) = e$. φ étant un isomorphisme, on a $\pi(x) = e$ et par suite $x \in D$ et $y = \hat{\varphi}(x) \in \hat{\varphi}(D)$. On a donc démontré que $\hat{\varphi}(D) = D'$. L'isomorphisme $\hat{\varphi}$ de \hat{G} sur \hat{G}' définit alors un isomorphisme ψ de $G = \hat{G}/D$ sur $G' = \hat{G}'/D'$. Il est facile de voir que ψ est le prolongement de φ . La proposition est ainsi démontrée.

Il résulte de ce que nous avons montré les faits suivants: *Soit G un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal. Alors la variété de G est une variété algébrique affine complexe et G est isomorphe à un groupe algébrique complexe.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, C.B.R.M. (1953).
- [2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press (1946).
- [3] C. Chevalley, On the topological structure of solvable groups, Ann. of Math., 42 (1941).
- [4] M. Goto, Faithful representations of Lie groups I, Math. Japonica, 1 (1948).
- [5] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann., 134 (1958).
- [6] H. Grauert, Analytic fibre bundles over holomorphically complete spaces, Seminars on analytic functions, Inst. Adv. Stud., (1958).
- [7] N. Iwahori and M. Sugiura, On the complexification and the duality theorem for homogeneous manifolds, à paraître au Journ. Math. Soc. of Japan.
- [8] K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math., 50 (1949).
- [9] J. L. Koszul, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. de France, 78 (1950).
- [10] Y. Matsushima et A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, à paraître au Bull. Soc. Math. de France.

*Institut de Mathématiques,
Université de Nagoya*