SUR LA STRUCTURE DU GROUPE D'HOMÉO-MORPHISMES ANALYTIQUES D'UNE CERTAINE VARIÉTÉ KAEHLÉRINNE

YOZÔ MATSUSHIMA

1. Soit V une variété[1] complexe et soit I le champ de tenseurs de type $(1, 1)$ de V définissant la structure complexe de V. Un champ de vecteurs[1] ξ sur V sera dit conforme si $I[\xi, \eta] = [\xi, I\eta]$ pour tout champ de vecteurs η sur V. On désignera par $\mathfrak{a}$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs comformes sur V. $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs sur V. Si V est compacte, $\mathfrak{a}$ est de dimension finie et s'identifie avec l'algèbre de Lie du groupe de Lie $A(V)$ d'homéomorphismes analytiques de V [2]. De plus, si $\xi, \eta \in \mathfrak{a}$, on a $I\xi, I\eta \in \mathfrak{a}$ et $I[\xi, \eta] = [\xi, I\eta] = [I\xi, \eta]$. On peut donc définir une structure d'algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{a}$ en posant $\sqrt{-1}\,\xi = I\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{a}$.

Une variété kaehlérienne est, par définition, la couple (V, g) d'une variété complexe V et d'une métrique kaehlérienne g de V. On désignera par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de Killing de la variété kaehlérienne (V, g). On verra que, si V est compacte, $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ (Lemme 3). On dira qu'*une variété kaehlérienne compacte satisfait à la condition* (P) *si l'on a* $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + I \cdot \mathfrak{g}$. Cette condition signifie que le sous-espace complexe de $\mathfrak{a}$ engendré par $\mathfrak{g}$ coïncide avec $\mathfrak{a}$. Si une variété kaehlérienne compacte satisfait à la condition (P), l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est réductive. En effect, la variété V étant compacte, le plus grand groupe d'isométries de (V, g) est compact et par suite son algèbre de Lie qui s'identifie avec $\mathfrak{g}$ est réductive. Si l'on désigne par $\mathfrak{g}^c$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^c$ est aussi réductive. Puisque l'on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + I\cdot\mathfrak{g}$, il existe un homomorphisme naturel de $\mathfrak{g}^c$ sur l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{a}$ et par suite $\mathfrak{a}$ est réductive. Soit, réciproquement, V une variété complexe et compacte telle

Received October 9, 1956.

[1] Les variétés considérées ici seront supposées connexes et les champs de tenseurs seront indéfiniment différentiables.

que l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ soit semi-simple et supposons que V admet une métrique kaehlérienne h. Soit $A_0(V)$ le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes analytiques de V et soit G un sous-groupe compact maximal de $A_0(V)$. Pour tout $\sigma \in G$ on désigne par $\sigma^* h$ la transformée de h. σ éant un homéomorphisme analytique de V, $\sigma^* h$ est aussi une métrique kaehlérienne de V. Si l'on pose $g = \int_G \sigma^* h \cdot d\sigma$, g est une métrique kaehlérienne invariente par G. Soit $\mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$ correspondant au sous-groupe G de $A_0(V)$. G étant un sous-groupe compact maximal de $A_0(V)$, $\mathfrak{g}$ coïncide avec l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteures de Killing de la variété kaehlérienne (V, g). L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ étant complexe et semi-simple et G étant un sous-groupe compact maximal de $A_0(V)$, le sous-espace complexe de $\mathfrak{a}$ engendré par $\mathfrak{g}$ coïncide avec $\mathfrak{a}$. (V, g) *satisfait donc à la condition* (P).

Soit g une métrique kaehlérienne sur une variété complexe V. On dira que la métrique g est d'Einstein si $g_{ij} = \frac{\lambda_0}{2} R_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 2n, 2n = \dim V)$, où R_{ij} désignent les composantes du tenseur de Ricci et λ_0 désigne un certain nombre réel. On démontrera le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte dont la métrique g est d'Einstein. Alors (V, g) satisfait à la condition (P) et par suite le groupe d'homéomorphismes analytiques de V est réductif.*

Soit maintenant (V, g) une variété kaehlérienne compacte. Par la dualité définie par la métrique g il correspond à tout champ de vecteurs sur V une 1-forme. On désignera par $\mathfrak{a}^*$ (resp. par $\mathfrak{g}^*$) l'espace vectoriel des 1-formes correspondant aux champs de vecteurs dans $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{g}$). Les 1-formes appartenant à $\mathfrak{a}^*$ (resp. $\mathfrak{g}^*$) seront appelées les formes conformes (resp. les formes de Killing). On démontrera le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte et supposons que le premier nombre de Betti de V soit nul. Alors pour que (V, g) satisfasse à la condition (P), il faut et il suffit que $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^* \cap \delta C^2 + \mathfrak{a}^* \cap dC^0$, où C^p $(p = 0, 2)$ désigne l'espace vectoriel des p-formes de V et d et δ désignent les opérateurs de différentiation et de codifférentiation respectivement.*

Le théorème 1 et un théorème de Koszul [4] nous conduiront au théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Soit V une variété complexe et compacte et supposons que le groupe $A(V)$ d'homéomorphismes analytiques de V soit transitif sur V. Si le groupe fondamental de V est fini et si la caractéristique d'Euler de V n'est pas nulle, le groupe de Lie $A(V)$ est semi-simple.*

2. Soit (V, g) une variété riemannienne compacte. On désigne par d et δ respectivement les opérateurs de différentiation et de codifférentiation, par Δ le laplacien de G. de Rham et par K l'opérateur sur les 1-formes défini par

$$K : \alpha_i \longrightarrow R_{ij}\alpha^j,$$

où R_{ij} désignent les composantes du tenseur de Ricci.[2] Pour toute 1-forme α on a

$$(\Delta\alpha)_k = -\nabla^i\nabla_i\alpha_k + K(\alpha)_k. \tag{1}$$

Supposons maintenant que (V, g) soit une variété kaehlérienne. Les composantes R_{ij} du tenseur de Ricci vérifient les relations $R_{ij}I^i_k I^j_l = R_{kl}$, I^i_k désignant les composantes du tenseur I définissant la structure complexe de V. On en déduit facilement que $R^i_k I^k_j = I^i_k R^k_j$ et ceci montre que l'on a

$$K(I\alpha) = IK(\alpha) \tag{2}$$

pour toute 1-forme α. Les dérivées covariantes du tenseur I étant nulles, on déduit de (1) et (2) la formule

$$\Delta(I\alpha) = I\Delta(\alpha). \tag{3}$$

Nous rappelons ici des résultats dûs à Bochner, Yano et Lichnerowicz.

LEMME 1.[3] *Soit (V, g) une variété riemannienne compacte. Pour qu'une 1-forme η sur V soit une forme de Killing, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux canditions* $\Delta\eta = 2K(\eta)$, $\delta\eta = 0$.

LEMME 2.[4] *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte et soit ξ une forme conforme. On a alors* $\Delta(\xi) = 2K(\xi)$.

LEMME 3. *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte. Pour qu'une 1-forme η soit une forme de Killing, il faut et il suffit que η soit conforme et* $\delta\eta = 0$.

---

[2] Pour le signe du tenseur de Ricci nous suivons celui de [1] et [9].

[3] Yano [8] et Lichnerowicz [7].

[4] Bochner [1] et Yano-Bochner [9], p. 133. M. Yano m'a écrit qu'il a démontré que la condition $\Delta\xi = 2K(\xi)$ est suffisante pour que ξ soit conforme.

En effet, si η est conforme et si $\delta\eta = 0$, η est une forme de Killing par les lemmes 1 et 2. Soit, reciproquement, η une forme de Killing. On désignera par la même lettre η le champ de vecteurs de Killing correspondant à la forme η. η étant de Killing, la dérivée de Lie $\theta(\eta)\cdot\alpha$ d'une forme harmonique α est nulle. Soit K la forme de Kaehler associée à la métrique kaehlérienne g. Pour les champs de vecteurs ξ, ζ sur V on a $K(\xi, \zeta) = g(I\xi, \zeta)$. La forme K étant harmonique, on a $(\theta(\eta)K)(\xi, \zeta) = \theta(\eta)(g(I\xi, \zeta)) - g(I[\eta, \xi], \zeta) - g(I\xi, [\eta, \zeta]) = 0$ pour tout champ de vecteurs ξ, ζ sur V. D'autre part, on a $\theta(\eta)g = 0$ et par suite $(\theta(\eta)g)(I\xi, \zeta) = \theta(\eta)(g(I\xi, \zeta)) - g([\eta, I\xi], \zeta) - g(I\xi, [\eta, \zeta]) = 0$. On en déduit que $I[\eta, \xi] = [\eta, I\xi]$. η est donc conforme. Le lemme 3 est ainsi établi.

LEMME 4. *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte et soit ζ une forme de Killing sur V. On a alors $dI\zeta = 0$.*

Par le lemme 3 ζ est conforme. Soit $(z^{\alpha})(\alpha = 1, \ldots, n)$ un système de coordonnées complexes locales et soit $(\zeta_{\alpha}, \zeta_{\bar{\alpha}})$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ les composantes de ζ. ζ étant conforme et de Killing, on a $\nabla_{\alpha}\zeta_{\beta} = \nabla_{\bar{\alpha}}\zeta_{\bar{\beta}} = 0$, $\nabla_{\alpha}\zeta_{\bar{\beta}} + \nabla_{\bar{\beta}}\zeta_{\alpha} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$. De plus, $(I\zeta)_{\alpha} = \sqrt{-1}\cdot\zeta_{\alpha}$ et $(I\zeta)_{\bar{\alpha}} = -\sqrt{-1}\cdot\zeta_{\bar{\alpha}}$. Alors $(dI\zeta)_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}(I\zeta)_{\beta} - \nabla_{\beta}(I\zeta)_{\alpha} = \sqrt{-1}(\nabla_{\alpha}\zeta_{\beta} - \nabla_{\beta}\zeta_{\alpha}) = 0$ et $(dI\zeta)_{\alpha\bar{\beta}} = \nabla_{\alpha}(I\zeta)_{\bar{\beta}} - \nabla_{\bar{\beta}}(I\zeta)_{\alpha} = -\sqrt{-1}(\nabla_{\alpha}\zeta_{\bar{\beta}} + \nabla_{\bar{\beta}}\zeta_{\alpha}) = 0$. On obtient donc $dI\zeta = 0$.

LEMME 5. *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte et soit φ une fonction différentiable sur V. Pour que $Id\varphi$ soit une forme de Killing, il faut et il suffit que φ satisfasse à l'équation*

$$\Delta(d\varphi) = 2K(d\varphi). \tag{4}$$

En effet, si $Id\varphi$ est une forme de Killing, elle est conforme par le lemme 3 et par suite $d\varphi = -I(Id\varphi)$ est conforme. Par le lemme 2 la fonction φ satisfait à l'équation (4). Soit, réciproquement, φ une fonction différentiable sur V satisfaisant à l'équation (4). D'aprés les formules (2) et (3) on a $\Delta(Id\varphi) = 2K(Id\varphi)$. D'autre part, $\delta Id\varphi = -\nabla_i I^i_j \nabla^j\varphi = -I^i_j\nabla_i\nabla^j\varphi = -I^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi$. Puisque $I^{ik} = -I^{ki}$ et que $\nabla_i\nabla_k\varphi = \nabla_k\nabla_i\varphi$, on a $I^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi = 0$ et par suite $\delta Id\varphi = 0$. La forme $Id\varphi$ est donc une forme de Killing par le lemme 1.

Il résulte des lemmes 4 et 5 le corollaire suivant.

CORLLAIRE. *Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte telle que le premier nombre de Betti de V soit nul. Toute forme de Killing ζ sur V s'écrit*

$\zeta = Id\varphi$, où φ est une fonction différentiable satisfaisant à l'équation (4).

On va démontrer le théorème 1. Soit (V, g) une variété kaehlérienne compacte dont la métrique g est d'Einstein et soit $R_{ij} = \frac{\lambda_0}{2} g_{ij}$. On a alors $2K(\alpha) = \lambda_0 \cdot \alpha$ pour toute 1-forme α. Si donc ξ est une forme conforme, on a $\Delta\xi = \lambda_0 \cdot \xi$. Supposons d'abord que $\lambda_0 \neq 0$ et posons $\alpha = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \xi$. On a alors $\xi = \Delta\alpha = d\delta\alpha + \delta d\alpha$. Posons $\delta d\alpha = \eta$. Alors $\Delta\eta = \delta d\Delta\alpha = \delta d(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\eta$ et $\delta\eta = 0$. η est donc une forme de Killing. D'autre part, si l'on pose $\delta\alpha = \varphi$, on a $\Delta d\varphi = \Delta d\delta\alpha = d\delta\Delta\alpha = \lambda_0 d\delta\alpha = \lambda_0 d\varphi$. Donc $Id\varphi = Id\delta\alpha$ est une forme de Killing par le lemme 5. Si l'on pose $\xi = -Id\varphi$, ξ est une forme de Killing et on a $d\varphi = d\delta\alpha = I\xi$. On a donc démontré que toute forme conforme ξ s'ecrit $\xi = \eta + I\zeta$, η et ζ étant des formes de Killing. Inversement, si η et ζ sont des formes de Killing, $\xi = \eta + I\zeta$ est conforme. On a donc $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{g}^* + I \cdot \mathfrak{g}^*$ et cette relation est évidemment equivalente à la condition (P).[5] Soit maintenant $\lambda_0 = 0$. Alors $R_{ij} = 0$ et par suite $K(\alpha) = 0$. Si donc ξ est une forme conforme, on a $\Delta\xi = 0$. ξ est ainsi harmonique et par suite $\delta\xi = 0$. Par le lemme 1 ξ est une forme de Killing. Inversement toute forme de Killing est conforme. On a donc $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{g}^*$ et par suite $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g} + I \cdot \mathfrak{g}$. Dans ce cas le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes analytiques de V est un tore complexe, parce qu'il est un groupe de Lie complexe et compact. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Soit maintenant (V, g) une variété kaehlérienne compacte. On désigne par $\mathfrak{h}^1$ l'espace vectoriel des 1-formes harmoniques de V et par C^p $(p = 0, 1, 2)$ l'espace vectoriel des p-formes de V. D'après le résultat bien connu de Kodaira-de Rham, on a $C^1 = \mathfrak{h}^1 + dC^0 + \delta C^2$ (somme directe). $\mathfrak{h}^1 + \delta C^2$ (resp. $\mathfrak{h}^1 + dC^0$) est le sous-espace de C^1 de tous les 1-formes α telles que $\delta\alpha = 0$ (resp. $d\alpha = 0$). Il résulte de là et des lemmes 3 et 4 que $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a}^* \cap (\mathfrak{h}^1 + \delta C^2)$ et que $I \cdot \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{a}^* \cap (\mathfrak{h}^1 + dC^0)$. Supposons maintenat que le premier nombre de Betti de V soit nul. On a alors $\mathfrak{h}^1 = (0)$. Soit $d\varphi \in \mathfrak{a}^* \cap dC^0$. Par les lemmes 2 et 5 $Id\varphi = -\zeta$ est une forme de Killing et $d\varphi = I\zeta$. On a donc $Ig^* = \mathfrak{a}^* \cap dC^0$. Par suite, pour que la variété kaehlérienne compacte (V, g) satisfasse à la condition (P), il faut et il suffit que $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^* \cap \delta C^2 + \mathfrak{a}^* \cap dC^0$. Le théorème 2 est donc démontré.

Soit maintenant V une variété complexe et compacte telle que le groupe fondamental soit fini et telle que la caractéristique d'Euler ne soit pas nulle.

---

[5] Si $\lambda_0 < 0$, on a $\mathfrak{a} = (0)$ par un théorème de Bochner [1].

Supposons que le groupe $A(V)$ d'homéomorphismes analytiques de V soit transitif sur V. La variété V étant connexe, la composante connexe de l'unite $A_0(V)$ de $A(V)$ est aussi transitif sur V. Soit G un sous-groupe compact maximal de $A_0(V)$. D'après un théorème de Montgomery [5], G est transitif sur V. Soit B le groupe d'isotropie de G à un point p de V. Puisque la caractéristique d'Euler de V n'est pas nulle, B est un sous-groupe de rang maximum de G [3]. G étant effectif sur V, G est semi-simple, sinon le sous-groupe B contiendrait le centre de G. D'après un théorème de Koszul [4], V admet alors une métrique kaehlérienne d'Einstein g invariante par G. La variété kaehlerienne (V, g) satisfait donc à la condition (P). Par suite l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de $A_0(V)$ s'identifie avec la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, $\mathfrak{a}$ est aussi semi-simple. Le théorème 3 est ainsi démontré.[6]

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bochner, Vector fields and Ricci curvature, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 776-797.

[2] S. Bochner and D. Montgomery, Groups of analytic manifolds, Ann. of Math., **48** (1947), 659-669.

[3] H. Hopf und H. Samelson, Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Lieshcher Gruppen, Comm. Math. Helv., **13** (1941), 240-251.

[4] J. L. Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, Can. J. Math., **7** (1955), 562-576.

[5] D. Montgomery, Simply connected homogeneous spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 467-469.

[6] A. Lichnerowicz, Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kaehlériennes, C. R. Acad. Sci. Paris, **239** (1954), 1344-1346.

[7] A. Lichnerowicz, Transformations infinitésimales conformes de certaines variétés riemanniennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, **241** (1955), 726-729.

[8] K. Yano, On harmonic and Killing vector fields, Ann. of Math., **55** (1952), 38-45.

[9] K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Annals of Math. Studies, No. **32** (1953).

Université de Nagoya

[6] On peut conjecturer que, si V est une variété complexe et compacte admettant une métrique kaehlérienne et si le groupe $A(V)$ est transitif sur V, on peut trouver une métrique kaehlérienne g de V telle que (V, g) satisfasse à la condition (P).