M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 37 (1970), 81–90

SUR LES FONCTIONS POLYHARMONIQUES ET LE PROBLEME DE RIQUIER

En hommage à Monsieur le professeur Katuji ONO á l'occasion de sa 60ème année

MASAYUKI ITO

1. Introduction

Soit Ω un ouvert de l'espace euclidien R^n à $n(\geqq 2)$ dimensions. Les recherches des fonctions harmoniques dans Ω sont essentielles dans la théorie classique du potentiel. A ce moment-là, il est bien connu que le balayage pour le noyau de Green dans Ω joue un grand rôle (par example, cf. M. Brelot [1]).

D'autre part, quelques travaux ont été consacrés à l'étude de la fonction polyharmonique dans Ω, et on sait maintenant que les résultats sont souvent pareils à la théorie des fonctions harmoniques dans Ω (cf. M. Nicolesco [3]). Mais il était nécessaire de faire quelques restrictions, car on ne connaissait pas de balayage pour le noyau polypotentiel.

Nous considérerons ici le balayage pour le noyau polypotentiel dans Ω, qui sera très différent du balayage ordinaire. Il en résultera immédiatement le théorème de valeur moyenne pour la fonction polyharmonique dans Ω, et puis nous donnerons la solution explicite du problème de Riquier pour l'équation polyharmonique $\Delta^p u = 0$ et pour un ouvert borné de R^n. Il sera caractéristique de voir que les points irréguliers seront les mêmes que pour l'équation de Laplace. Cette étude précise la note [2].

2. Le noyau polypotentiel et le balayage

Dans cette section, on supposera toujours que X sera un ouvert borné de R^n à $n \geqq 2$. On pose, pour un entier $p \geqq 1$,

$$N^{(p)}(x, y) = \int \cdots \int G(x, z_1)G(z_1, z_2) \cdot \cdots \cdot G(z_{p-1}, y)dz_1 \cdots dz_{p-1},$$

Received December 17, 1968

où G est la fonction de Green dans X. La fonction $N^{(p)}$ est positive, symétrique et continue au sens large dans $X\times X$; elle est finie et continue dans $X\times X-\delta$, où δ est la diagonale de $X\times X$. Si G est convenablement normalisée, on a

$$(\Delta_y)^p N^{(p)}(x,y)=(-1)^p\varepsilon_x$$

au sens des distributions dans Ω, où ε_x est la mesure de Dirac à x. Pour une mesure de Radon positive μ dans X, on note $N^{(p)}\mu(x)$ la valeur en x du potentiel de μ par rapport au noyau $N^{(p)}$. Les fonctions $N^{(p)}(x,y)$ et $N^{(p)}\mu(x)$ s'appelle respectivement le noyau polypotentiel d'ordre p et le potentiel d'ordre p de μ.

THÉORÈME 1 (*le théorème du balayage*): *Soit $p\geqq 1$. A un système $(\mu_i)_{i=1}^p$ de mesures de Radon positives dans X, de masse totale finie, et à un fermé F de X, on peut associer un système $(\mu_i')_{i=1}^p$ de mesures positives portée par F, et un seul tel qu'on ait*

$$\sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)}\mu_i(x)\geqq \sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)}\mu_i'(x) \quad \textit{partout dans } X,$$

$$\sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)}\mu_i(x)= \sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)}\mu_i'(x) \quad \textit{quasi partout sur } F,$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} N^{(p-i)}\mu_i(x)= \sum_{i=1}^{p-1} N^{(p-i)}\mu_i'(x) \quad \textit{quasi partout sur } F,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$N^{(1)}\mu_1(x)=N^{(1)}\mu_1'(x) \quad \textit{quasi partout sur } F.$$

On dit qu'une propriété a lieu quasi partout si elle a lieu sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle pour le noyau de Green ou ce qui revient au même, pour le noyau newtonnien (logarithmique pour $n=2$).

Démonstration. Nous remarquons d'abord que le potentiel d'ordre 1 de μ_i est finie quasi partout dans X et l'on a $\int N^{(1)}\mu_i(x)dx<+\infty$. Donc, pour $1\leqq i\leqq p$ et pour $2\leqq j\leqq p, N^{(j)}\mu_i$ est finie quasi partout dans X.

Soit μ_1' la mesure balayée de μ_1 sur F relativement au noyau G, on obtient alors

$$N^{(1)}\mu_1(x)\geqq N^{(1)}\mu_1'(x) \quad \text{partout dans } X,$$

$$N^{(1)}\mu_1(x)=N^{(1)}\mu_1'(x) \quad \text{quasi partout sur } F.$$

Ensuite, soit μ_2' la mesure balayée de $(N^{(1)}\mu_1 - N^{(1)}\mu_1') + \mu_2$ relativement à G. Ayant

$$N^{(2)}\mu_1(x) - N^{(2)}\mu_1'(x) + N^{(1)}\mu_2(x) = \int G(x, y)((N^{(1)}\mu_1(y) - N^{(1)}\mu_1'(y))dy + d\mu_2(y)),$$

on a

$$N^{(2)}\mu_1(x) + N^{(2)}\mu_2(x) \geqq N^{(2)}\mu_1'(x) + N^{(1)}\mu_2'(x) \quad \text{partout dans } X,$$
$$N^{(2)}\mu_1(x) + N^{(1)}\mu_2(x) = N^{(2)}\mu_1'(x) + N^{(1)}\mu_2'(x) \quad \text{quasi partout sur } F.$$

En répétant cette action, on obtient un système $(\mu_i')_{i=1}^p$ de mesures positives portées par F qui vérifie tous les conditions ci-dessus.

Finalement nous montrons l'unicité de ce système. Soit $(\mu_i'')_{i=1}^p$ un autre système qui vérifie les conditions ci-dessus. On a évidemment $\mu_1' = \mu_1''$, et ensuite on a

$$N^{(2)}\mu_1(x) - N^{(2)}\mu_1'(x) + N^{(1)}\mu_2(x) = \int G(x, y)((N^{(1)}\mu_1(y) - N^{(1)}\mu_1'(y))dy + d\mu_2(y))$$
$$= N^{(1)}\mu_2''(x) \quad \text{quasi partout sur } F.$$

Par conséquent, μ_2'' doit être la mesure balayée de $(N^{(1)}\mu_1 - N^{(1)}\mu_1') + \mu_2$ sur F relativement à G, d'où $\mu_2' = \mu_2''$. De la même manière, on obtient l'unicité. La démonstration est ainsi complète.

On dit que $(\mu_i')_{i=1}^p$ est le système balayé de $(\mu_i)_{i=1}^p$ sur F relativement au système $(N^{(j)})_{j=1}^p$. Il est facile de voir que si l'on a $\mu_i(F) = 0$ pour tout i, μ_i' est alors portée par la frontière F^* de F. Par la suite on désignera par $(\varepsilon_{x,F}^{(i)})_{i=1}^p$ le système balayé de $(\varepsilon_x, 0, \cdots, 0)$ sur F.

PROPOSITION 1. *Soient X_1 et X_2 deux ouverts bornés de R^n, et soient $N_1^{(i)}$ et $N_2^{(i)}$ respectivement les noyaux polypotentiels d'ordre i dans X_1 et dans X_2. Pour un système $(\mu_i)_{i=1}^p$ de mesures de Radon positives à support compact dans $X_1 \cap X_2$ et pour un fermé F dont le complément CF est borné dans $X_1 \cap X_2$, on a $\mu_{i,1}' = \mu_{i,2}'$ pour tout $1 \leqq i \leqq p$, où $(\mu_{i,1}')_{i=1}^p$ et $(\mu_{i,2}')_{i=1}^p$ sont respectivement les systèmes balayés de $(\mu_i)_{i=1}^p$ sur F relativement à $(N_1^{(i)})_{i=1}^p$ et à $(N_2^{(i)})_{i=1}^p$.*

En effet, soit $N_{1,2}^{(i)}$ le noyau polypotentiel d'ordre i dans $X_1 \cap X_2$, et soit $(\nu_i')_{i=1}^p$ le système balayé de $(\mu_i)_{i=1}^p$ sur F relativement à $(N_{1,2}^{(i)})_{i=1}^p$. Il est facile de voir que $\mu_{i,1}' = \nu_i'$ et que $\mu_{i,2}' = \nu_i'$.

PROPOSITION 2. *Soit e un sous-ensemble borélien de F. La fonction $f_i(x) = \varepsilon_{x,F}^{(i)}(e)$ est analytique dans CF pour tout i.*

En effet, il est bien connu que f_1 est analytique dans CF (cf. M. Brelot [1]). D'après l'égalité

$$f_2(x) = \int (G(x, y) - G(x, z) d\varepsilon_{y,F}^{(1)}(z)) \varepsilon_{y,F}^{(1)}(e) dy,$$

il est facile de montrer que f_2 est analytique dans CF. Au moyen de l'induction, on peut montrer que f_i est analytique dans CF pour tout i.

Soit Ω un ouvert dans X. On désigne par $N_\Omega^{(p)}$ le noyau polypotentiel d'ordre p dans Ω. Alors on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Pour tous les points x et y de Ω, on a*

$$N_\Omega^{(p)}(x, y) = N^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)} \varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y).$$

En effet, le cas de $p = 1$ est bien connu. Supposons que

$$N_\Omega^{(p-1)}(x, y) = N^{(p-1)}(x, y) - \sum_{i=1}^{p-1} N^{(p-i)} \varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$$

dans $\Omega \times \Omega$. Alors on obtient, d'après le théorème 1, que, pour tous les points x et y de Ω,

$$\begin{aligned}
& N^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)} \varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) \\
&= \int G(y, z) N_\Omega^{(p-1)}(z, x) dz - \int G(y, z) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(p)}(z) \\
&= \int G(y, z) N_\Omega^{(p)}(z, x) dz - \iint G(y, u) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(u) N_\Omega^{(p-1)}(z, x) dz \\
&= \int G_\Omega(y, z) N^{(p-1)}(z, x) dz = N_\Omega^{(p)}(x, y).
\end{aligned}$$

D'après l'induction, la démonstration est ainsi complète.

De la proposition ci-dessus, on obtient immédiatement les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. *La fonction* $\sum_{i=1}^{p} N^{(p-j+1)} \varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$ *dans* $\Omega \times \Omega$ *est symétrique.*

COROLLAIRE 2. *Pour un point x fixé de Ω, on a*

$$(\Delta_y)^p \Big(\sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)} \varepsilon_{y, C\Omega}^{(i)}(x) \Big) = 0$$

au sens des distributions dans Ω.

PROPOSITION 4. *Soit μ une mesure de Radon positive dans X de masse totale finie, et soit F un fermé de X avec $S_\mu \cap F = \phi$, alors on a, pour tout ensemble borélien e de F et pour tout i,*

$$\mu_i'(e) = \int \varepsilon_{x,F}^{(i)}(e) d\mu(x),$$

où $(\mu_i')_{i=1}^p$ est le système balayé de $(\mu, 0, \cdots, 0)$ sur F.

En effet, le cas de $i = 1$ est bien connu (cf. M. Riesz [4]). Soit $i > 1$ et supposons que, pour tout $j \leqq i-1$, $\mu_j'(e) = \int \varepsilon_{x,F}^{(j)}(e) d\mu(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mu_i'(e) &= \int (N^{(i-1)}\mu(x) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)}\mu_j'(x))\varepsilon_{x,F}^{(1)}(e)dx \\
&= \iint (N^{(i-1)}(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)}\varepsilon_{y,F}^{(j)}(x))d\mu(y)\varepsilon_{x,F}^{(1)}(e)dx \\
&= \iint (N^{(i-1)}(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)}\varepsilon_{y,F}^{(j)}(x))\varepsilon_{x,F}^{(1)}(e)dx\,d\mu(y) \\
&= \int \varepsilon_{y,F}^{(i)}(e)d\mu(y).
\end{aligned}$$

D'après cette proposition, on a évidemment l'inégalité suivante: Pour tout x de X et pour tout fermé F de X,

$$N^{(p)}\mu(x) \geqq \sum_{i=1}^{p} \int N^{(p-i+1)}\mu(y) d\varepsilon_{x,F}^{(i)}(y),$$

où μ est une mesure positive de masse totale finie.

3. Les fonctions polyharmoniques

Soit Ω un ouvert de R^n. Rappelons qu'une fonction réelle u de classe $C^{2(p-1)}$ dans Ω est polyharmonique d'ordre p si l'on a $\Delta^p u = 0$ dans Ω au sens des distributions. Considérons le théorème de valeur moyenne pour le fonction polyharmonique dans Ω. Nous donnerons d'abord une notation. On désignera par $(\varepsilon_{x,r}^{(i)})_{i=1}^p$ le système balayé de $(\varepsilon_x, 0, \cdots, 0)$ sur $CB(x; r)$ relativement au système de noyaux polypotentiels dans un ouvert borné $X \supset \overline{B(x; r)}$, où $B(x; r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r. D'après la proposition 1, $(\varepsilon_{x,r}^{(i)})_{i=1}^p$ est indépendant de X.

THÉORÈME 2. *Pour qu'une fonction réelle u de classe $C^{2(p-1)}$ dans Ω soit polyharmonique d'ordre p dans Ω, il faut et il suffit que, pour toute boule ouverte $B(x;r)$ avec $\overline{B(x;r)} \subset \Omega$, on ait*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} \int (-\Delta)^{i-1} u(y) d\varepsilon_{x,r}^{(i)}(y),$$

où $\Delta^0 u = u$.

Démonstration de la condition suffisante. Nous remarquons d'abord que, pour tous les points x et y de Ω et pour tout i, $\varepsilon_{y,r}^{(i)}$ est la mesure obtenue par la translation $y-x$ de $\varepsilon_{x,r}^{(i)}$, et que par suite, il suffit de montrer le lemme suivant:

LEMME 1. *Pour tout x de R^n et pour toute suite décroissante (r_m) de nombres >0 s'annulant avec $m \to \infty$, il existe une suite (a_m) de nombres >0 avec $\lim_{m\to\infty} a_m = 0$ telle qu'on ait, pour toute fonction φ de classe C^{2p} à support compact dans R^n,*

$$(-\Delta)^p \varphi(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{a_m} (\varphi(x) - \sum_{i=1}^{p} \int (-\Delta)^{i-1} \varphi(y) d\varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)).$$

En effet, soit X un ouvert borné de R^n avec $X \supset \{x+y\,;\, x \in S_\varphi,\ y \in B(0;r_1)\}$, et soit $N^{(i)}$ le noyau polypotentiel d'ordre $i (i=1, \cdots, p)$ dans X. Posons

$$a_m = \int (N^{(p)}(x,y) - \sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)} \varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)) dy,$$

alors on a $a_m > 0$ et

$$\begin{aligned}(-\Delta)^p \varphi(x) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{a_m} \int (-\Delta)^p \varphi(y)(N^{(p)}(x,y) - \sum_{i=1}^{p} N^{(p-i+1)} \varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)) dy \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{a_m} (\varphi(x) - \sum_{i=1}^{p} (-\Delta)^{i-1} \varphi(y) d\varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)).\end{aligned}$$

Montrons la condition nécessaire. On prend une boule ouverte $B(x;r)$ avec $\overline{B(x;r)} \subset \Omega$. Soit δ un nombre >0 avec $\overline{B(x;r+2\rho)} \subset \Omega$. Alors, pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $B\left(0; \frac{1}{2}\rho\right)$, on a $\Delta^p u' * \varphi(x) = 0$ dans un voisinage de $\overline{B(x;r)}$, où u' est la restriction de u sur $B(x; r+\rho)$. Le support de $u' * \varphi$ étant compact dans Ω, on a

$$u' * \varphi(x) = N_\Omega^{(p)} (-\Delta)^p u' * \varphi(x)$$

dans Ω. Ayant

$$N_{\Omega}^{(p)}(x, y) = \sum_{i=1}^{p} N_{\Omega}^{(p-i+1)} \varepsilon_{x,r}^{(i)}(y) \quad \text{dans } C\overline{B(x\,;r)},$$

on a

$$u' * \varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} \int (-\Delta)^{i-1} u' * \varphi(y) d\varepsilon_{x,r}^{(i)}(y).$$

φ étant arbitraire, on a

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{p} \int (-\Delta)^{i-1} u'(y) d\varepsilon_{x,r}^{(i)}(y),$$

nous avons donc notre résultat. La démonstration est ainsi complète.

En explicitant les $\varepsilon_{x,r}^{(i)}$, on retrouve le théorème de valeur moyenne connu pour le fonction polyharmonique (cf. M. Nicolesco [3]). De la même manière, pour tout ouvert Ω_0 dans Ω, la fonction polyharmonique u d'ordre p dans Ω vérifie l'équation suivante: Pour tout x de Ω_0,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} \int (-\Delta)^{i-1} u(y) d\varepsilon_{x, C\Omega_0}^{(i)}(y),$$

et par suite, u est évidemment analytique dans Ω.

THÉORÈME 3. *Soit Ω un ouvert borné de R^n, et soit $(f_i)_{i=1}^{p}$ un système de fonctions boréliennes et bornées sur Ω^*. La fonction*

$$H_{\Omega}(x\,; (f_i)_{i=1}^{p}) = \sum_{i=1}^{p} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$$

est polyharmonique d'ordre p dans Ω.[1]

Démonstration. Soit $u_i(x) = \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$ $(i = 1, \cdots, p)$. D'après la proposition 2, u_i est analytique dans Ω. On a

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \iint f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) \Big(N^{(i-1)}(x, z) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)} \varepsilon_{x, C\Omega}^{(j)}(z)\Big) dz \\ &= N^{(i-1)} u_1(x), \end{aligned}$$

et par suite,

---

1) $(\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)})_{i=1}^{p}$ est le système balayé de $(\varepsilon_x, 0, \cdots, 0)$ sur $C\Omega$ relativement au système de noyaux polypotentiels dans un ouvert borné $X \supset \bar{\Omega}$. Il est indépendant de X (cf. la proposition 3).

$$\Delta^p u_i(x) = (-1)^{i-1}\Delta^{(p-i+1)} u_1(x) = 0$$

dans Ω, car u_1 est harmonique dans Ω. La démonstration est complète.

DÉFINITION 1. La fonction $H_\Omega(x; (f_i)_{i=1}^p)$ s'appelle *la solution généralisée du problème de Riquier pour l'équation* $\Delta^p u = 0$ *et pour la valeur frontière* $(f_i)_{i=1}^p$.

DÉFINITION 2. On dit qu'un point x_0 de Ω^* est *régulier d'ordre* p si l'on a, pour tout système $(f_i)_{i=1}^p$ de fonctions finies et continues sur Ω^*,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} (-\Delta)^{k-1} H_\Omega(x; (f_i)_{i=1}^p) = f_k(x_0)\,(i = 1, \cdots, p).$$

Examinons le point régulier d'ordre p plus précisement. Le théorème typique est le suivant:

THÉORÈME 4. *Soit* $p \geqq 1$. *Pour qu'un point* x_0 *de* Ω^* *soit régulier d'ordre* p *il faut et il suffit que* x_0 *soit régulier au sens du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace.*

Démonstration. Soit x_0 un point régulier au sens du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace, on a alors

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} \int f_1(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) = f_1(x_0)$$

et pour $i > 1$, on a

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} (-\Delta_x)^{i-1} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} (-\Delta_x)^{i-1} \iint f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) N_\Omega^{(i-1)}(x, z) dz$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) = f_i(x_0).$$

Ensuite, pour tout x de Ω et pour tout $j \geqq 1$, on a

$$\Delta^{i-1+j} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) = \Delta^j \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) = 0.$$

D'autre part, on a, pour tout $1 \leqq j \leqq i-1$,

$$(-\Delta)^{i-1-j} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) = \int f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) N_\Omega^{(j)}(x. z) dz$$

$$= \int G_\Omega(x, w) N_\Omega^{(j-1)}(w, z) f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) dz dw.$$

En employant l'inégalité

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\iint N_\Omega^{(j-1)}(x,z)f_i(y)\,d\varepsilon_{z,C\Omega}^{(1)}(y)\,dz\right|\leqq(\sup_{x\in\Omega^*}|f_i(x)|)(\sup_{x\in\Omega}\int G_\Omega(x,z)dz)^{j-1},$$

on obtient

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}}(-\Delta)^{i-1-j}\int f_i(y)d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}(y)=0.$$

Par conséquent, on a, pour tout k,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}}(-\Delta)^{k-1}H_\Omega(x;(f_i)_{i=1}^p)=f_k(x_0).$$

L'inverse est évident, et par suite la démonstration est complète.

Finalement, nous voyons l'unicité de la solution du problème de Riquier.

PROPOSITION 5. *Soit Ω le même que ci-dessus. Si une fonction polyharmonique u d'ordre p et $\Delta^i u$ sont bornées dans Ω et admettent ses limites* 0 *quasi partout sur Ω^*, on a $u=0$.*

En effet, soit (Ω_m) une suite croissante d'ouverts bornés avec $\bar{\Omega}_m\subset\Omega$ telle qu'on ait $\cup\Omega_m=\Omega$, alors on a, pour tout x de Ω_m.

$$u(x)=\sum_{i=1}^p\int(-\Delta)^{i-1}u(y)d\varepsilon_{x,C\Omega_m}^{(i)}(y).$$

La suite $(\varepsilon_{x,C\Omega_m}^{(i)})$ converge vaguement vers $\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}$ avec $m\to\infty$, et par conséquent, faisant $m\to\infty$, on a $u(x)=0$ dans Ω, puisque u et $\Delta^i u$ sont bornées dans Ω.

D'après ce théorème, on obtient immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 3. *Soient Ω et $(f_i)_{i=1}^p$ les mêmes que ci-dessus. On a*

$$(-\Delta)^k H_\Omega(x;(f_i)_{i=1}^p)=H_\Omega(x;(f_i)_{i=k+1}^p).$$

Remarque. Nous pouvons donner les résultats à ceux-ci pour l'opérateur uniformement elliptique d'ordre 2 au lieu de Δ. Pour cet opérateur, voir C. Stampacchia [5].

RÉFÉRENCES

[1] M. Brelot: Éléments de la théorie classique du potentiel, Les cours de Sorbonne 2eme édition, 1961.

[2] M. Itô: Étude des fonctions polyharmoniques par la méthode du balayage, C.R. Acad. Paris, **267** (1968), 807–809.
[3] M. Nicolesco: Les fonctions polyharmoniques, Paris Hermann, 1936.
[4] M. Riesz: Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Sci. Math., Szeged, **9** (1938), 1–42.
[5] C. Stampacchia: Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15, 1** (1965), 189–256.

Faculté des Sciences d'Orsay, Orsay (France)
et Institut Mathématiuqe, Université de Nagoya