# SUR LE THÉORÈME DE PRODUIT RELATIF AU DEGRÉ TOPOLOGIQUE D'UNE APPLICATION DANS L'ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

MASUO HUKUHARA

Offert pour le soixantième anniversaire du Professeur Noshiro

**§ 1.** Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel topologique localement convexe, $E$ un ensemble fermé dans $\boldsymbol{E}$ et $f$ une application complètement continue de $E$ dans $\boldsymbol{E}$. M. Nagumo a montré,[1] après avoir défini le degré topologique $d(b, E, I-f)$ de l'application $I-f$ de $E$ en un point $b \notin (I-f)(\partial E)$, la validité des propriétés importantes dont jouit le degré topologique. Mais dans sa démonstration du théorème de produit, il reste encore une lacune à combler.

En effet, soit $\varDelta$ un ensemble ouvert contenant $(I-f)(E)$, $\phi$ une application complètement continue de $\bar{\varDelta}$ dans $\boldsymbol{E}$ et $c$ un point de $\boldsymbol{E}$ n'appartenant pas à

$$(I-\phi)(\partial\varDelta) \cup (I-\phi)(I-f)(\partial E) .$$

Le théorème s'énonce alors comme il suit.

*Si l'on désigne par* $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots\ldots$ *les composants de l'ensemble ouvert* $\varDelta-(I-f)(\partial E)$, *on a*

$$d(c, E, (I-\phi)(I-f)) = \sum_i d(c, \bar{\varDelta}_i, I-\phi) d(b_i, E, I-f) \ , \tag{1}$$

$b_i$ *désignant un point quelconque de* $\varDelta_i$.

Désignons par $D_k$ l'ensemble des points $y \in \varDelta$ tels que

$$d(y, E, I-f) = k \ .$$

Grâce à l'additivité du degré topologique, la relation (1) est équivalente à l'égalité

$$d(c, E, (I-\phi)(I-f)) = \sum_k k . \, d(c, \bar{D}_k, I-\phi) \ . \tag{2}$$

$\partial D_k$ est une partie de l'ensemble

---

Received June 11, 1966.

[1] Amer. J. Math., **73** (1951), 497–511.

$$\partial \Delta \cup (I-f)(\partial E)$$

et l'image de celui-ci par $I-\phi$ ne contenant pas $c$, il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ (convexe et symétrique de $o$) tel que

$$\mathfrak{V}(c) \cap (I-\phi)(\partial D_k)=0$$

Soit $\Gamma$ un compact $\supset \phi(\bar{\Delta})$. Il existe une application continue $S$ de $\Gamma$ dans un sous-espace à dimension finie telle que

$$Sy-y \in \mathfrak{V}$$

pour $y \in \Gamma$. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des points $y \in \bar{\Delta}$ tels que

$$(I-S\phi)y=c \ .$$

$\mathfrak{B}$ est une partie compacte de $\Delta$ et on a

$$\mathfrak{B} \cap (I-f)(\partial E)=0 \ .$$

On peut en conclure l'existence d'un voisinage $U$ tel que

$$U(\mathfrak{B}) \cap (I-f)(\partial E)=0 \ .$$

Soit $C$ un compact $\supset f(E)$. Il existe une application continue $T$ de $C$ dans un sous-espace à dimension finie telle que

$$Tx-x \in U \tag{3}$$

pour $x \in C$.

Posons

$$f_t=(1-t)f+tTf \ . \tag{4}$$

M. Nagumo suppose l'inclusion

$$(I-f_t)(E) \subset \Delta \ ,$$

pour $t \in [0, 1]$, ce qui n'est nulle part assuré. Si cette inclusion est assurée, sa démonstration est valide et son résultat est applicable. Cette remarque sera utile dans la suite.

§ **2.** Nous voulons donc compléter sa démonstration. $B$ étant la plus grande partie compacte de $\Delta$ telle que $(I-\phi)(B)=c$, l'ensemble

$$A=\{x \in E;\ (I-f)x \in B\}$$

est une partie compacte de l'intérieur $E^0$ de $E$. Prenons un voisinage $W$ tel que

$$\Delta' = (2W)(B) \subset \Delta$$

et puis un voisinage $V$ tel que

$$E' = \overline{V(A)} \subset E^0, \ (I-f)(E') \subset W(B) \ .$$

D'après la définition de $E'$, on a

$$B \cap (I-f)(E-E'^0) = 0 \ .$$

On peut donc trouver un voisinage $U$ contenu dans $W$ et tel que

(5) $$U(B) \cap (I-f)(E-E'^0) = 0 \ .$$

Il est important de remarquer ici que rien n'empêche de remplacer $U$ par un voisinage plus petit. Prenons une application continue $T$ de $C$ dans un sous-espace à dimension finie telle que l'on ait (3). Définissons ensuite la fonction $f_t$ par (4).

Si $x \in E$, on a

$$(I-f_t)x-(I-f)x = (f-f_t)x = t(f-Tf)x \in tU \subset U$$

pour $t \in [0, 1]$. Donc la relation

$$(I-f_t)x \in B$$

implique

$$(I-f)x \in U(B)$$

et la relation (5) implique $x \notin E-E'^0$. On a par suite

(6) $$B \cap (I-f_t)(E-E'^0) = 0 \ .$$

Si $x \in E'$, on a

$$(I-f_t)x \in U((I-f)x) \subset U(W(B)) \subset (2W)(B) \ ,$$

de sorte que l'on a

$$(I-f_t)(E') \subset \Delta'$$

pour $t \in [0, 1]$. Et puisqu'on peut supposer $U$ assez petit, la démonstration de M. Nagumo est valable si l'on restreint à $E'$ le domaine de l'application $f$. Si donc on pose

$$D'_k=\{y \in \Delta'\,;\ d(y, E', I-f)=k\}\ ,$$

on a

$$d(c, E', (I-\phi)(I-f))=\sum_k k.\ d(c, \overline{D'_k}, I-\phi)\ .$$

Or on a

$$d(c, E, (I-\phi)(I-f))=d(c, E', (I-\phi)(I-f))\ ,$$

car

$$c \notin (I-\phi)(I-f_t)(E-E'^0)\ .$$

Par suite, pour que l'on puisse obtenir (2), il suffit de démontrer l'égalité

$$d(c, \bar{D}_k, I-\phi)=d(c, \overline{D'_k}, I-\phi)\ .$$

Celle-ci est une conséquence immédiate de l'égalité

$$B \cap D_k = B \cap D'_k\ . \tag{7}$$

Si $y \in B$, la relation (6) implique

$$d(y, E, I-f_t)=d(y, E', I-f_t)$$

pour $t \in [0, 1]$. En posant $t=0$, on obtient

$$d(y, E, I-f)=d(y, E', I-f)\ ,$$

d'où découle l'égalité (7).

*Institute of Mathematical Science*
*Kyoto University*