SUR L'EXISTENCE DES MESURES DES CONDENSATEURS

MASANORI KISHI

dédié au Professeur K. NOSHIRO pour fêter ses soixante ans

1. Introduction

Dans l'espace de Dirichlet il existe des mesures des condensateurs[1] et inversement un certain espace de fonctions est l'espace de Dirichlet s'il y existe des mesures des condensateurs[2]. Dans ce mémoire nous considérons le problème d'existence des mesures des condensateurs par rapport à un noyau positif et continu au sens large, symétrique ou non.

Soit G un noyau sur un espace localement compact séparé X tel que $G(x, y)$ soit continue au sens large sur l'espace produit $X \times X$ à valeurs dans $(0, \infty)$, où la valeur ∞ est admise au plus aux points diagonaux. Le potentiel $G\sigma(x)$ d'une mesure σ est la fonction définie par l'intégrale

$$\int G(x, y) d\sigma(y)$$

en chaque point où elle n'est pas ambiguë. Quand σ est positive, le potentiel est défini partout et semi-continu inférieurement. L'énergie de σ est l'intégrale

$$\iint G(x, y) d\sigma(x) d\sigma(y).$$

Nous supposons que tous les sous-ensembles ouverts non-vides de X soient de capacité positive, c'est-à-dire, qu'ils contiennent un ensemble compact qui porte une mesure positive $\neq 0$ d'énergie finie.

La *mesure du condensateur* $\sigma = \mu_1 - \mu_0$ d'une paire ordonnée $\langle K_1, K_0 \rangle$ des ensembles compacts disjoints est par définition la mesure telle que μ_i soit une mesure positive portée par K_i et le potentiel $G\sigma(x)$ soit égal à i à p.p.p.[3] sur K_i ($i=0$, 1 réspectivement) et $0 \leq G\sigma(x) \leq 1$ dans X.

Received May 4, 1966.

1) Cf. Deny [1].

2) Cf. Itô [4].

3) Cela signifie que l'ensemble exceptionel est de capacité nulle.

2. Remarques introductives

D'abord en supposant que G et le noyau adjoint[4] G^* satisfassent au principe de continuité[5] nous montrerons: *si les mesures des condensateurs existent pour toutes les paires ordonnées d'ensembles compacts disjoints, G satisfait au principe complet du maximum*[6]. Puisque G satisfait au principe d'équilibre[7], il satisfait au principe du maximum[8], donc il suffit de montrer que G^* satisfait au principe de domination[9]. Pour cela il suffit de montrer que l'inégalité $G^*\mu(x)\leq G^*\varepsilon_{x_0}(x)$ sur le support $S\mu$ implique la même inégalité dans X[10], où μ est une mesure positive d'énergie fine à support compact et ε_{x_0} est une mesure-unité de support ponctuel x_0 extérieur à $S\mu$. S'il y avait un point x_1 tel que $G^*\mu(x_1)>G^*\varepsilon_{x_0}(x_1)$, nous pourrions trouver un voisinage compact K de x_1 dans lequel $G^*\mu(x)>G^*\varepsilon_{x_0}(x)$. Soit $\sigma=\nu_1-\nu_0$ la mesure du condensateur de la paire $\langle K, S\mu\rangle$. Alors

$$0=\int G\sigma\, d\mu=\int G^*\mu\, d\nu_1-\int G^*\mu\, d\nu_0>\int G^*\varepsilon_{x_0}\, d\nu_1-\int G^*\varepsilon_{x_0}\, d\nu_0=G\sigma(x_0)\geq 0.$$

Cette contradiction montre que G^* satisfait au principe de domination.

En outre nous pouvons montrer que *notre hypothèse sur l'existence des mesures des condensateurs implique le principe d'unicité*[11] *si G est régulier*[12]. En effet, s'il ne satisfaisait pas au principe d'unicité, il serait dégénéré à cause du principe

---

4) Le noyau adjoint G^* se définit par $G^*(x, y)=G(y, x)$. Les potentiels par rapport à G^* se nomment les potentiels adjoints.

5) Cela signifie que si le potentiel d'une mesure positive λ à support compact est fini continu comme la fonction sur le support $S\lambda$, il est fini continu partout dans X.

6) L'inégalité $G\mu\leq G\nu+a$ sur $S\mu$ implique la même inégalité dans X, où $a\geq 0$, μ est une mesure positive à support compact et d'énergie finie et ν est une mesure positive.

7) Pour tout ensemble compact K il existe une mesure positive μ, supportée par K, telle que $G\mu=1$ à p.p.p. sur K et $G\mu\leq 1$ partout. Cette mesure se nomme la mesure d'équilibre de K. Evidemment G satisfait au principe d'équilibre sous notre hypothèse.

8) L'inégalité $G\mu\leq 1$ sur $S\mu$ implique la même inégalité dans X, où μ est une mesure positive à support compact. Le principe d'équilibre implique le principe du maximum, si G satisfait au principe de continuité, voir [5].

9) L'inégalité $G\mu\leq G\nu$ sur $S\mu$ implique la même inégalité dans X, où μ et ν sont les mêmes mesures dans la note 6). Les principes du maximum et de domination impliquent le principe complet du maximum si G^* satisfait au principe de continuité, voir [5].

10) Cf. [5].

11) *Si* $G\mu=G\nu$ à p.p.p. dans X, $\mu=\nu$.

12) Pour tout ensemble compact K et pour tout voisinage ω de K il existe un ensemble K' tel que $K\subset K'\subset\omega$ et que l'inégalité $G\mu\geq h$ à p.p.p. sur K' implique la même inégalité sur K' partout, où μ est une mesure positive à support compact et h est une fonction finie continue sur K'.

de domination[13]. Donc il existerait des points distincts x_1 et x_2 tels que

$$\frac{G(x_1, x_1)}{G(x_2, x_1)} = \frac{G(x_1, x_2)}{G(x_2, x_2)}.$$

Alors il n'y aurait pas de mesure du condensateur de $\langle\{x_1\}, \{x_2\}\rangle$.

3. L'opération φ du balayage itéré

Maintenant nous supposons que G satisfait au principe complet du maximum et au principe d'unicité et que le noyau adjoint G^* satisfait au principe de continuité, et nous montrerons l'existence des mesures des condensateurs. Evidemment c'est le problème suivant: étant donnés deux ensembles compacts disjoints K et K', chercher la mesure positive μ supportée par K telle que

$$G\mu(x) - G\mu'(x) = 1$$

à p.p.p. sur K, où μ' est la mesure balayée[14] de μ sur K'. Nous donnerons deux méthodes pour montrer l'existence: la première par approximation et la deuxième par variation. Dans cette section nous faisons des préparatifs.

Soit μ une mesure positive portée par K. Par notre hypothèse nous pouvons considérer l'opération suivante φ: $\mu \to \varphi(\mu; K, K')$, une mesure positive portée par K. Il existe une mesure balayée μ' de μ sur K' et ensuite une mesure balayée de μ' sur K. Cette mesure balayée intérativement est par définition $\varphi(\mu; K, K')$ ou simplement $\varphi(\mu)$. Elle est uniquement déterminée.

Les propriétés élémentaires suivantes de φ sont aisément vérifiées.

(i) *$G\varphi(\mu) \leq G\mu' \leq G\mu$ partout dans X.*

(ii) *$\varphi(\mu_1+\mu_2; K, K') = \varphi(\mu_1; K, K') + \varphi(\mu_2; K, K')$.*

(iii) *Si $G\mu_1 \leq G\mu_2$ dans X, $G\varphi(\mu_1; K, K') \leq G\varphi(\mu_2; K, K')$ dans X.*

(iii)′ *Si $G\varphi(\mu; K, K') \leq pG\mu$ dans X, $G\varphi^k(\mu; K, K') \leq pG\varphi^{k-1}(\mu; K, K')$ dans X $(k=2, 3, \ldots\ldots)$, où $\varphi^k(\mu; K, K') = \varphi(\varphi^{k-1}(\mu; K, K'); K, K')$.*

(iv) *Si μ reste invariable par rapport à φ, $\mu = 0$.*

(v) *φ est vaguement continue.* Pour cela il suffit de noter la continuité du balayage sur K': si un filtre $\{\mu_\alpha\}$ converge vaguement vers μ, le filtre $\{\mu'_\alpha\}$ des mesures balayées sur K' converge vaguement vers μ'. En effet, si $\{\mu'_\alpha\}$ converge vaguement vers ν, on a, pour toutes les mesures λ, portées par K',

---

13) Cf. [6].

14) C'est la mesure positive, portée par K', dont le potentiel $G\mu' \leq G\mu$ dans X et $G\mu' = G\mu$ à p.p.p. sur K'. Pour l'existence des mesures balayées, voir [5].

dont les potentiels adjoints sont finis continus,

$$\int G\nu\, d\lambda = \int G^*\lambda\, d\nu = \lim \int G^*\lambda\, d\mu'_\alpha = \lim \int G\mu'_\alpha\, d\lambda = \lim \int G\mu_\alpha\, d\lambda$$
$$= \lim \int G^*\lambda\, d\mu_\alpha = \int G^*\lambda\, d\mu = \int G\mu\, d\lambda.$$

Donc $G\nu = G\mu'$ à p.p.p. sur K' et par le principe d'unicité $\nu = \mu'$.

(vi) *La suite* $\{\varphi^k(\mu;\, K, K')\}$ *converge vaguement vers* 0. Nous ne donnons pas ici la démonstration de cette propriété; nous démontrerons le résultat plus fort: la série $\sum \varphi^k(\mu;\, K, K')$ converge vaguement.

(vii) *Si* $G\mu_1 \leq G\mu_2$ *partout dans* X *et si* $\sum \varphi^k(\mu_2;\, K, K')$ *converge, alors* $\sum \varphi^k(\mu_1;\, K, K')$ *converge aussi.*

(viii) *Soient* $a_k > 0$ *et* $\mu_1 = \sum a_k \varphi^k(\mu;\, K, K')$ *une mesure positive. Alors le support* $S\mu_1$ *contient* $S\varphi(\mu_1;\, K, K')$. En effet, par (ii) et (v) on a $\varphi(\mu_1) = \sum a_k \varphi^{k+1}(\mu)$ donc $S\varphi(\mu_1) \subset S\mu_1$.

(ix) *Si* μ *est une mesure d'énergie finie, il existe un nombre positif* $p < 1$ *tel que* $G\varphi(\mu;\, K, K') \leq pG\mu$ *sur* $S\mu$. Pour cela il suffit de démontrer que $G\mu' < G\mu$ sur $S\mu$. Supposons qu'il existe un point x tel que $G\mu(x) = G\mu'(x)$ et désignons par $\varepsilon_x{}^*$ la mesure balayée de ε_x sur K' par rapport au noyau adjoint G^*. Alors

$$0 = G\mu(x) - G\mu'(x) = \int G^*\varepsilon_x\, d\mu - \int G^*\varepsilon_x\, d\mu' \geq \int G^*\varepsilon_x{}^*\, d\mu - \int G^*\varepsilon_x{}^*\, d\mu'$$
$$= \int (G\mu - G\mu')\, d\varepsilon_x{}^* = 0.$$

Donc $G^*\varepsilon_x = G^*\varepsilon_x^*$ μ-p.p. et par conséquent $G^*\varepsilon_x = G^*\varepsilon_x{}^*$ sur $S\mu$. Alors si x était un point de $S\mu$, on aurait $G^*\varepsilon_x(x) = G^*\varepsilon_x{}^*(x)$. Ce serait absurde parce que l'on obtiendrait l'égalité $G\varepsilon_x = G\varepsilon_x{}'$ partout dans X, où $\varepsilon_x{}'$ est la mesure balayée sur K' par rapport à G. En effet,

$$G\varepsilon_x{}'(x) = \int G^*\varepsilon_x\, d\varepsilon_x{}' = \int G^*\varepsilon_x^*\, d\varepsilon_x{}' = \int G\varepsilon_x{}'\, d\varepsilon_x{}^* = \int G\varepsilon_x d\varepsilon_x^* = G^*\varepsilon_x^*(x)$$
$$= G^*\varepsilon_x(x) = G\varepsilon_x(x).$$

Et par le principe de domination on aurait $G\varepsilon_x{}' = G\varepsilon_x$ partout.

(x) *Si* μ *est une mesure d'énergie finie, la série* $\sum \varphi^k(\mu:\, K, K')$ *converge.* Prenons les nombres $a_0 = 1$ et $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots\ldots)$ tels que $\mu_1 = \sum a_k \varphi^k(\mu)$ soit une mesure d'énergie finie. Alors par (ix) il existe un nombre positif $p < 1$ tel que $G\varphi(\mu_1) \leq$

$pG\mu_1$ sur $S\mu_1$, donc par (viii) on a la même inégalité sur $S\varphi(\mu_1)$. En conséquence, la série $\sum\varphi^k(\mu_1)$ et donc la série $\sum\varphi^k(\mu)$ convergent.

4. Démonstration de l'existence par approximation

Ici nous donnons une démonstration de l'existence des mesures des condensateurs par la méthode d'approximation, en supposant que le noyau G satisfasse au principe complet du maximum et au principe d'unicité et que le noyau adjoint G^* satisfasse au principe de continuité.

Soient K_0 et K_1 deux ensembles compacts disjoints. D'abord nous prenons la mesure d'équilibre μ de K_1 et ensuite nous posons pour tout n

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \{\varphi^k(\mu; K_1, K_0) - \varphi^k(\mu; K_1, K_0)'\}$$

où $\varphi^k(\mu; K_1, K_0)'$ est la mesure balayée de $\varphi^k(\mu; K_1, K_0)$ sur K_0. Nous vérifions aisément que le potentiel $G\sigma_n$ est égal à $1-G\varphi^n(\mu; K_1, K_0)$ à p.p.p. sur K_1 et à 0 à p.p.p. sur K_0 et $0 \leq G\sigma_n \leq 1$ partout. Par la propriété (x) $\{\sigma_n\}$ converge vaguement vers $\sigma=\mu_1-\mu_0$, où $\mu_1=\sum\varphi^k(\mu; K_1, K_0)$, $\mu_0=\sum\varphi^k(\mu; K_1, K_0)'$, et par conséquent $G\sigma$ est égal à p.p.p. à 1 sur K_1 et à 0 sur K_0. Evidemment $0 \leq G\sigma \leq 1$ partout. Donc σ est la mesure du condensateur de $\langle K_1, K_0\rangle$, qui est déterminée de façon unique à cause du principe d'unicité. Alors nous avons:

THÉORÈME. *Si G satisfait au principe complet du maximum et au principe d'unicité et si le noyau adjoint G^* satisfait au principe de continuité, il existe une unique mesure du condensateur pour toute paire ordonnée des ensembles compacts disjoints.*

5. Démonstration par variation.

Ici nous donnons une démonstration par la méthode de variation. D'abord nous considérons le cas particulier où G est symétrique. Nous supposons encore que G satisfasse au principe complet du maximum et au principe d'unicité. Soient K_1 et K_0 deux ensembles compacts disjoints. Nous désignons encore par μ' la mesure balayée de μ sur K_0. Considérons la variation

$$v(\mu) = \int (G\mu - G\mu')d\mu$$

parmi les mesures positives dont les masses totales sont 1 et dont les supports sont contenus dans K_1. Du fait que l'application $\mu \longrightarrow \mu'$ est continue vaguement on déduit l'existence de la mesure minimale μ_0: $v(\mu_0) \leq v(\mu)$ pour toutes les mesures μ susdites. Cette mesure minimale μ_0 possède les propriétés suivantes:

$$G\mu_0 \geq G\mu_0' + a \qquad \text{à p.p.p. sur } K_1$$
$$G\mu_0 \leq G\mu_0' + a \qquad \text{sur } S\mu_0.$$

où $a = v(\mu_0)$. Donc par le principe complet du maximum et le principe d'unicité on a $G\mu_0 \leq G\mu_0' + a$ partout dans X et $a > 0$. Cela prouve l'existence de la mesure du condensateur.

La variation précédente doit être modifiée dans le cas non-symétrique. Nous désignons par $\mathscr{M}^1$ l'ensemble des mesures positives de masses totales 1 et portées par K_1, et par $\mathscr{E}$ l'ensemble des mesures positives, portées par K_1, dont les potentiels adjoints sont finis continus. Pour démontrer l'existence de la mesure du condensateur nous pouvons supposer que K_1 ne soit pas de capacité nulle, et donc $\mathscr{E} \neq \{0\}$. Posons

$$v(\mu, \lambda) = \int (G\mu - G\mu') d\lambda$$

pour $\mu, \lambda \in \mathscr{M}^1$, et définissons l'application Φ de $\mathscr{M}^1$ dans $2^{\mathscr{M}^1}$ comme suit:

$$\mathscr{M}^1 \ni \mu \longrightarrow \Phi(\mu) = \{\nu \in \mathscr{M}^1;\ v(\mu, \nu) \leq \inf_{\lambda \in \mathscr{M}^1 \cap \mathscr{E}} v(\mu, \lambda)\}.$$

L'ensemble $\Phi(\mu)$ est non-vide et convexe. L'application Φ est fermée au sens suivant: si des filtres $\{\mu_\alpha\}$ et $\{\nu_\alpha\}$ de $\mathscr{M}^1$ convergent vaguement vers μ et ν réspectivement et si $\nu_\alpha \in \Phi(\mu_\alpha)$, alors $\nu \in \Phi(\mu)$. En effet, pour toute $\lambda \in \mathscr{M}^1 \cap \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned} v(\mu, \nu) &\leq \liminf \int (G\mu_\alpha - G\mu_\alpha') d\nu_\alpha \\ &\leq \liminf \int (G\mu_\alpha - G\mu_\alpha') d\lambda \\ &= \liminf \left\{ \int G^*\lambda \, d\mu_\alpha - \int G^*\lambda \, d\mu_\alpha' \right\} \\ &= \int G^*\lambda \, d\mu - \int G^*\lambda \, d\mu' = v(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent par le théorème de point fixe de Glicksberg-Fan[15] nous avons la mesure μ_0 telle que $\mu_0 \in \Phi(\mu_0)$, c'est-à-dire,

$$v(\mu_0, \mu_0) \leq v(\mu_0, \lambda)$$

pour toutes les mesures $\lambda \in \mathscr{M}^1 \cap \mathscr{E}$. Par le principe d'unicité, $a = v(\mu_0, \mu_0) > 0$. Donc en posant $\nu = \frac{1}{a} \mu_0$, nous avons

15) Cf. [2, 3].

$$\int (G\nu - G\nu')d\lambda \geq 1$$

pour toutes les mesures $\lambda \in \mathscr{M}^1 \cap \mathscr{E}$, d'où nous déduisons

$$G\nu - G\nu' \geq 1 \quad \text{à p.p.p. sur } K_1$$
$$G\nu - G\nu' \leq 1 \quad \text{sur } S\nu.$$

Cela prouve que la mesure $\sigma = \nu - \nu'$ est la mesure du condensateur de $\langle K_1, K_0 \rangle$.

Durier a démontré indépendamment l'existence des mesures des condensateurs utilisant la méthode analogue de variation (cf. Sém. Théorie du potentiel, 10^e année (1966)).

6. Remarques

(i) L'existence de la mesure du condensateur dans le cas où K_0 est fermé et non-compact est délicate. On la prouve si l'on suppose en outre la possibilité du balayage sur K_0 et la continuité du balayage.

(ii) Si G satisfait au principe de domination et au principe d'unicité et G^* satisfait au principe de continuité, on a, pour toute paire des ensembles compacts disjoints $\langle K_1, K_0 \rangle$ et pour toute mesure positive ν d'énergie finie, une mesure $\sigma = \mu_1 - \mu_0$ telle que μ_i soit la mesure positive portée par K_i, et le potentiel $G\sigma = G\nu$ à p.p.p. sur K_1 et $G\sigma = 0$ à p.p.p. sur K_0 et $0 \leq G\sigma \leq G\nu$ partout. La réciproque est vraie si G et G^* satisfont au principe de continuité et G est régulier.

Bibliographie

[1] J. Deny: Sur les espaces de Dirichlet, Sém. Théorie du potentiel, 1ère année (1957), no. 5, 14p.

[2] K. Fan: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear space, Proc. Nat. Sci. U.S.A., **38** (1952), 121–126.

[3] I.L. Glicksberg: A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 170–174.

[4] M. Itô: Condensors principle and the unit contraction, Nagoya Math. J., 30 (1967), 8–28.

[5] M. Kishi: Maximum principles in the potential theory, ce journal, **23** (1963), 165–187.

[6] 〃 : On the uniqueness of balayaged mesures, Proc. Japan Acad., **39** (1963), 749–752.

Institut de mathématiques, Université de Nagoya et Centre National de la Recherche Scientifique (Paris)