C. Maire
Nagoya Math. J.
Vol. 150 (1998), 1–11

UN RAFFINEMENT DU THÉORÈME DE GOLOD-SAFAREVIC

CHRISTIAN MAIRE

Abstract. Soient k un corps de nombres, p un nombre premier, et L la p-tour de Hilbert de k; $G = \mathrm{Gal}(L/k)$. Dans ce papier, on se propose de donner un raffinement du critère de Golod-Safarevic appliqué à G, construit en filtrant le groupe de nombres $\Lambda = \{x \in k^\times/(x) = \mathcal{Q}^p\}$. Ce raffinement permettra alors de montrer qu'un corps quadratique réel dont le groupe des classes contient un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4, 4)$, possède une 2-tour de Hilbert infinie.

§1. Introduction

Soient k un corps de nombres et p un nombre premier. Notons par L la p-extension maximale de k, non-ramifiée pour les places finies et totalement décomposée pour les places infinies; on dit que L est la p-tour de Hilbert de k; soit G le groupe de Galois de L/k. Un problème classique est d'étudier la finitude ou non de G.

Le premier critère de non-finitude fut donné en 1964 par Golod-Safarevic [1]; il permet par exemple de montrer que dès que le 2-rang du groupe des classes d'un corps quadratique réel k est supérieur ou égal à six, alors k a une 2-tour de Hilbert infinie. Ce critère est une conséquence d'un résultat de théorie des p-groupes finis; plus précisémment, Golod et Safarevic ont montré que si un p-groupe G est fini, alors on a l'inégalité

$$r > d^2/4, \tag{1}$$

où d est le p-rang de G, et où $r = d_p H_2(G, \mathbb{F}_p)$ est le nombre de relations de G (on rappelle que si A est un groupe, le p-rang de A, noté d_pA, est égal à la dimension sur $\mathbb{F}_p$ de $A/A^p[A, A]$).

Deux raffinements de (1) ont alors été donné:

Le premier en 1965 par Koch et Vinberg ([5], [7], [15]); ce résultat fait intervenir les filtrations de Zassenhaus d'une représentation de G. Il permet par exemple de montrer, pour p différent de 2, que si le p-rang du groupe

Received July 16, 1996.

des classes d'un corps quadratique imaginaire k est supérieur ou égal à 3, alors la p-tour de Hilbert de k est infinie (Koch et Venkov [8]).

Le second raffinement a été donné en 1986 par Schoof [13]; il est obtenu après filtration du groupe $H_1(G, I)$, I étant l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{F}_p[G]$. Il permet alors de montrer par exemple les deux résultats suivants:

i) Soit $p \geq 3$ et k un corps quadratique; alors si $d_p cl_k \geq 3$, k a une p-tour de Hilbert infinie [13].

ii) Soit $p > 3$ et k un corps cubique cyclique sur $\mathbb{Q}$; alors si $d_p cl_k \geq 4$, k a une p-tour de Hilbert infinie [10].

Ces deux résultats sont obtenus en utilisant l'action de $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ sur certains groupes G-homologiques, en particulier la méthode utilisée ne s'applique pas lorsque $|G|$ et $[k : \mathbb{Q}]$ ne sont pas premiers entre eux.

A travers ce papier, on se propose alors de donner un autre raffinement de l'inégalité de Golod-Safarevic, obtenu en filtrant le groupe de nombres $\frac{\Lambda}{k^{\times p} N_{L/k} E_L}$, où $\Lambda = \{x \in k^\times / (x) = \mathcal{Q}^p\}$ et où E_L est le groupe des unités de L (théorème 3.1).

Ce raffinement permettra alors de montrer le résultat suivant (corollaire 3.2):

Soit k un corps quadratique **réel***; si le groupe des classes de k a un sous-groupe de la forme* $(4, 4, 4, 4)$*, alors k a une* 2*-tour de Hilbert infinie.*

Notons que ce corollaire complète le résultat de F. Hajir [3] suivant:

Soit k un corps quadratique **imaginaire**; si le groupe des classes de k contient un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4)$, alors la 2-tour de Hilbert de k est infinie.

§2. Situation

Dans toute la suite, on suppose que le groupe $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ est fini. On a une filtration naturelle de G:

$$\begin{aligned} G_1 &= G, \\ G_2 &= G^p[G, G], \\ &\vdots \\ G_i &= (G_{i-1})^p[G_{i-1}, G], \qquad i \geq 3; \end{aligned}$$

notons alors L_i le sous-corps de L fixé par G_i; en particulier, $L_1 = k$.

On peut alors noter que la p-tour de Hilbert des corps L_i est égal à L.

Si l'on considère ensuite $\frac{\Lambda_i}{L_i^{\times p} N_{L/L_i} E_L}$, où $\Lambda_i = \{x \in L_i^\times / (x) = \mathcal{Q}_i^p\}$, $\mathcal{Q}_i$ étant un idéal de L_i, on sait que l'on a alors l'isomorphisme suivant ([9], [11] chapitre 4):

$$\frac{\Lambda_i}{L_i^{\times p} N_{L/L_i} E_L} \xrightarrow{\sim} H_2(G_i, \mathbb{F}_p). \tag{2}$$

Posons alors pour $i \geq 1$,

$$\Delta_i = \frac{\Lambda_i}{L_i^{\times p} N_{L/L_i} E_L}. \tag{3}$$

On construit ensuite une filtration $(M_i)_i$ de Δ_1 de la manière suivante:

$$M_i = \frac{\mathrm{Im}\Big(\Delta_{i-1} \overset{N_{L_{i-1}/k}}{\rightarrow} \Delta_1\Big)}{\mathrm{Im}\Big(\Delta_i \overset{N_{L_i/k}}{\rightarrow} \Delta_1\Big)}, \qquad i \geq 2; \tag{4}$$

posons $m_i = d_p M_i$; on a ainsi

$$\sum_{i \geq 2} m_i = r = d_p H_2(G, \mathbb{F}_p). \tag{5}$$

Rappelons finalement l'inégalité classique:

$$r - d \leq d_p E_k; \tag{6}$$

en particulier, si k est un corps quadratique réel, pour $p = 2$ on a:

$$r \leq d + 2. \tag{7}$$

§3. Résultats principaux

Sous les notations du paragraphe précédent, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *Si G est fini, on a $\forall t \in]0;1[$,*

$$\sum_{i \geq 2} m_i t^i - dt + 1 > 0. \tag{8}$$

De ce théorème, que l'on montrera dans la paragraphe 4, on en déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.2. *Soit k un corps quadratique réel. Si le groupe des classes cl_k de k contient un sous-groupe de la forme $(4,4,4,4)$, alors la 2-tour de Hilbert de k est infinie.*

Démonstration. Notons tout d'abord que par l'inégalité de Golod-Safarevic, si $d_2 cl_k$ est supérieur ou égal à 6, alors la 2-tour de Hilbert de k est infinie.

Soit k_1 le 2-corps de Hilbert de k; on a $k \subset L_2 \subset k_1$.

Par hypothèse, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_1/L_2)$ contient un sous-groupe H de la forme $(2,2,2,2)$; H va être engendré par quatre éléments σ_i, $i = 1, \ldots, 4$.

On sait par la théorie du corps de classes, que $\sigma_i = (\mathcal{Q}_{2,i}, k_1/L_2)$, où $\mathcal{Q}_{2,i}$ est un idéal de L_2 et où $(\cdot, k_1/L_2)$ est le symbole d'Artin. On a ${\mathcal{Q}_{2,i}}^2 = (y_i)$, avec $y_i \in L_2$, ainsi y_i peut être vu dans Δ_2. Regardons ensuite $N_{L_2/k} y_i$. On a alors le lemme suivant:

LEMME 3.3. *Les quatres éléments $(N_{L_2/k} y_i)_{i=1\ldots4}$ sont libres modulo ${k^\times}^2 E_k$.*

Démonstration. Tout d'abord, notons que par la propriété du symbole d'Artin, on a

$$(\mathcal{Q}_{2,i}, k_1/L_2) = (N_{L_2/k}\mathcal{Q}_{2,i}, k_1/k), \tag{9}$$

car k_1/k est abélienne; ainsi, les idéaux $(N_{L_2/k}\mathcal{Q}_{2,i})_{i=1,\ldots,4}$ sont libres modulo P_k. Ensuite, soient $0 \leq \theta_i < 2$, tels que

$$\prod_i N_{L_2/k} {y_i}^{\theta_i} \in {k^\times}^2 E_k; \tag{10}$$

on a alors

$$\prod_i (N_{L_2/k} y_i)^{\theta_i} = (\alpha)^2, \tag{11}$$

aves $\alpha \in k^\times$; plus précisémment, on a

$$\left(\prod_i (N_{L_2/k}\mathcal{Q}_{i,2})^{\theta_i}\right)^2 = (\alpha)^2, \tag{12}$$

i.e.

$$\prod_i (N_{L_2/k}\mathcal{Q}_{i,2})^{\theta_i} = (\alpha), \tag{13}$$

ou encore d'après (9)

$$\prod_i {\sigma_i}^{\theta_i} = 1. \tag{14}$$

Par l'hypothèse faite sur les σ_i, on en déduit que $\theta_i = 0$ $\square$

De ceci, il vient alors que $d_2 \operatorname{Im}(\Delta_2 \to \Delta_1) \geq 4$, i.e.

$$m_2 \leq r - 4. \tag{15}$$

Comme k est un corps quadratique réel, l'inégalité du théorème 3.1 avec (5), (7) et (15) donne alors:

Si G est fini, on a $\forall t \in]0;1[$,

$$(d-2)\,t^2 + 4t^3 - dt + 1 > 0. \tag{16}$$

Pour $d = 4$, le minimun de $2t^2 + 4t^3 - 4t + 1$ est atteint en $t_0 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ et vaut $\frac{46-13\sqrt{13}}{27} \approx -0.032$.

Pour $d = 5$, le minimun de $3t^2 + 4t^3 - 5t + 1$ est atteint en $t_1 = \frac{-3+\sqrt{69}}{12}$ et vaut $\frac{171-23\sqrt{69}}{72} \approx -0.278$. $\square$

REMARQUE 3.4. *De manière générale, si le groupe des classes de k contient un sous-groupe de la forme $(p^2, \ldots, p^2)$, n fois, alors $m_2 \leq d + d_p E_k - n$.*

ILLUSTRATION NUMÉRIQUE 3.5. *On connait à l'aide de résultats de Rédei et Reichardt [12], ou encore de Gras [2], des critères pour qu'un corps quadratique réel vérifie les hypothèses du corollaire 3.2; par exemple dans les deux cas suivants, k a une 2-tour infinie:*

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 * p_2 * p_3 * p_4 * p_5})$, *avec* $p_i \equiv 1(4)$, $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$, $\forall i,j = 1,\cdots,5$, *et la norme de l'unité fondamentale égale à -1;*
- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3 * p_1 * p_2 * p_3 * p_4})$, *avec* $p_i \equiv 1(4)$, *et* $\left(\frac{2}{p_i}\right) = \left(\frac{3}{p_i}\right) = \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$, $\forall i,j = 1,\cdots,4$.

Ainsi les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5 * 29 * 109 * 349 * 661})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3 * 73 * 97 * 673 * 1249})$ ont une 2-tour de Hilbert infinie.

§4. Démonstration du théorème principal

4.1. Application d'un résultat de Schoof

On considère la filtration $(G_i)_i$ de G (voir §3). Notons par I_i l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{F}_p[G_i]$; $I_1 = I$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{F}_p[G]$; on peut noter que l'on a alors ([5], [6]):

$$I_i \subset I^i, \qquad \forall i \geq 1. \tag{17}$$

On a également pour tout i plus grand que 1, l'isomorphisme suivant:

$$H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H_1(G_i, I_i). \tag{18}$$

Pour i fixé, il apparait alors la suite d'homomorphismes:

$$H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H_1(G_i, I_i) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H_1(G, I_i) \longrightarrow H_1(G, I^i); \tag{19}$$

on a ainsi le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
H_2(G, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "\sim", "\Phi"'] & H_1(G, I) \\
H_2(G_2, \mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Cor}_{2,1}"] & H_1(G, I^2) \arrow[u] \\
H_2(G_3, \mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Cor}_{3,2}"] & H_1(G, I^3) \arrow[u] \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Posons alors pour $i \geq 2$,

$$N_i = \frac{\mathrm{Im}\,(H_2(G_{i-1}, \mathbb{F}_p) \to H_2(G, \mathbb{F}_p))}{\mathrm{Im}\,(H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \to H_2(G, \mathbb{F}_p))}, \tag{20}$$

et finalement, considèrons $\Phi(N_i)$, l'image de N_i par Φ dans $H_1(G, I)$; $n_i = d_p N_i$.

Reprenant alors la démonstration du théorème 2.1 de [13], on en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 4.1. *On a* $\forall t \in]0;1[$,

$$\sum_{i\geq 2} n_i t^i - dt + 1 \geq \frac{1}{P(t)} \tag{21}$$

où $P(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, *avec* $a_i = d_p \frac{I^i}{I^{i+1}}$.

4.2. Interprétation de N_i

A partir de la proposition 4.1, pour montrer le théorème 3.1, il suffit de montrer la proposition suivante qui relie N_i à M_i:

PROPOSITION 4.2. *On a pour tout* $i \geq 2$,

$$M_i \simeq N_i, \tag{22}$$

i.e.

$$\frac{\mathrm{Im}\,(H_2(G_{i-1}, \mathbb{F}_p) \to H_2(G, \mathbb{F}_p))}{\mathrm{Im}\,(H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \to H_2(G, \mathbb{F}_p))} \simeq \frac{\mathrm{Im}\Big(\Delta_{i-1} \overset{N_{L_{i-1}/k}}{\longrightarrow} \Delta_1\Big)}{\mathrm{Im}\Big(\Delta_i \overset{N_{L_i/k}}{\longrightarrow} \Delta_1\Big)}. \tag{23}$$

On voit en fait qu'il suffit de montrer que l'on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 \arrow[r, "\sim"] & H_2(G, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "\sim", "\Phi"'] & H_1(G, I) \\
\Delta_2 \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "N_{L_2/k}"] & H_2(G_2, \mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Cor}_{2,1}"] & H_1(G, I_1^2) \arrow[u] \\
\Delta_3 \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "N_{L_3/L_2}"] & H_2(G_3, \mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Cor}_{3,2}"] & H_1(G, I_1^3) \arrow[u] \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Pour ceci, on voit qu'il suffit de montrer alors la proposition suivante:

PROPOSITION 4.3. *Pour tout $i \geq 2$, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{i-1} & \xrightarrow[\Theta_{i-1}]{\sim} & H_2(G_{i-1},\mathbb{F}_p) \\ {\scriptstyle N_{L_i/L_{i-1}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}_{i,i-1}} \\ \Delta_i & \xrightarrow[\Theta_i]{\sim} & H_2(G_i,\mathbb{F}_p) \end{array}$$

On se contentera de démontrer cette proposition pour $i = 2$; il suffira ensuite de remarquer que la démonstration reste encore valable pour i quelconque.

Tout d'abord quelques notations: $\bar{k}$ désignera une p-clôture algébrique de k, et par conséquent des L_i; on notera alors par $\bar{G}_i$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/L_i)$; $\bar{G}_1 = \bar{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$; H désignera le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/L)$, en particulier H est engendré par les groupes d'inertie absolus des places finies de k, et par les groupes de décomposition absolus des places infinies.

A cause de l'hypothèse faite sur L/k, on a pour N assez grand

(24) $$H = \bar{G}_N \subset \ldots \subset \bar{G}_{i+1} \subset \bar{G}_i \subset \ldots \subset \bar{G}_1 = \bar{G}.$$

Avant de montrer la proposition 4.3, on montre le lemme suivant:

LEMME 4.4. *On a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \overset{\Psi_1}{\hookrightarrow} & \dfrac{H}{H^p[\bar{G},H]} \\ {\scriptstyle N_{L_2/k}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{2,1}} \\ \Delta_2 & \overset{\Psi_2}{\hookrightarrow} & \dfrac{H}{H^p[\bar{G}_2,H]} \end{array}$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord la description de Ψ_1:

(25) $$\Psi_1 : \Delta_1 \longrightarrow \frac{H}{H^p[\bar{G},H]}$$

Soit $x \in \Delta_1$; il existe alors $j = (j_v)_v \in \mathcal{J}_k$, $\mathcal{J}_k$ étant le groupe des idèles de k, et $y = (y_v)_v \in \prod_v U_{k_v} \hookrightarrow \mathcal{J}_k$, U_{k_v} étant le groupe des unités de k_v, tels que

(26) $$x = yj.$$

Notons ensuite par ρ_1 l'homomorphisme construit sur $\prod_v U_{k_v}$, et à valeur dans $\frac{H}{H^p[\bar{G},H]}$, défini comme suit ([9], [11]):

$$\rho_1(y) = \prod_v (y_v, \bar{k}_v/k) \bmod H^p[\bar{G}, H], \tag{27}$$

$(\cdot, \bar{k}_v/k)$ étant le symbole de réciprocité local.

Tout ceci est parfaitement défini, et de plus, $\rho_1(N_{L/k}E_L) = 1$.

On a alors

$$\Psi_1(x) = \rho_1(y). \tag{28}$$

On construit de même, pour $i \geq 2$, $\Psi_i : \Delta_i \longrightarrow \frac{H}{H^p[\bar{G}_i,H]}$.

Montrons alors que le diagramme du lemme 4.4 est commutatif:

Soit $x_2 \in \Delta_2$, $x_2 = y_2 j_2$, avec $y_2 = (y_{2v})_v \in \prod_v U_{L_{2v}}$, et $j_2 \in \mathcal{J}_{L_2}$; alors d'après (29), on a:

$$\Psi_2(x_2) = \rho_2(y_2) = \prod_v (y_{2v}, \bar{k}_v/L_2) \bmod H^p[\bar{G}_2, H]. \tag{29}$$

Ainsi, il vient:

$$\begin{aligned}
(Res_{2,1} \circ \Psi_2)(x_2) &= \Psi_2(x_2) \bmod H^p[\bar{G}, H] && (30)\\
&= \rho_2(y_2) \bmod H^p[\bar{G}, H] && (31)\\
&= \rho_1(N_{L_2/k} y_2) \qquad ([9], [11]) && (32)\\
&= \Psi_1(N_{L_2/k} x_2) && (33)
\end{aligned}$$

□

REMARQUE 4.5. *Par construction de ρ_i, le diagramme suivant est commutatif pour tout $i \geq 1$ ([9], [11]):*

$$\begin{tikzcd}
H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \arrow[rr, hook, "\phi_i"] & & \dfrac{H}{H^p[\bar{G}_i, H]} \\
& \Delta_i \arrow[ul, "\Theta_i"] \arrow[ur, "\Psi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons ensuite le résultat homologique suivant (qui se voit bien après passage au dual):

LEMME 4.6. *On a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \frac{H}{H^p[\bar{G}_2,H]} & \xrightarrow{\mathrm{Res}_{2,1}} & \frac{H}{H^p[\bar{G},H]} \\ {\scriptstyle\phi_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi_1} \\ H_2(G_2,\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\mathrm{Cor}_{2,1}} & H_2(G,\mathbb{F}_p) \end{array}$$

On peut alors montrer la proposition 4.3: Soit $x \in \Delta_2$; on veut montrer que $y = (\Theta_1^{-1} \circ \mathrm{Cor}_{2,1} \circ \Theta_2)(x)$ est égal à $N_{L_2/k}x$:

$$\begin{aligned} y &= (\Theta_1^{-1} \circ \mathrm{Cor}_{2,1} \circ\Theta_2)(x) \\ &\Longleftrightarrow \Theta_1(y) = (\mathrm{Cor}_{2,1} \circ\Theta_2)(x) \\ &\Longleftrightarrow (\phi_1 \circ \Theta_1)(y) = (\phi_1 \circ Cor_{2,1} \circ \Theta_2)(x) && \text{(car } \phi_1 \text{ est injectif)} \\ &\Longleftrightarrow (\phi_1 \circ \Theta_1)(y) = (\mathrm{Res}_{2,1} \circ\phi_2 \circ \Theta_2)(x) && \text{(lemme 4.6)} \\ &\Longleftrightarrow \Psi_1(y) = (\mathrm{Res}_{2,1} \circ\phi_2 \circ \Theta_2)(x) && \text{(remarque 4.5)} \\ &\Longleftrightarrow \Psi_1(y) = (\mathrm{Res}_{2,1} \circ\Psi_2)(x) && \text{(remarque 4.5)} \\ &\Longleftrightarrow \Psi_1(y) = \Psi_1(N_{L_2/k}x) && \text{(lemme 4.4)} \\ &\Longleftrightarrow y = N_{L_2/k}x && \text{(car } \Psi_1 \text{ est injectif)} \end{aligned}$$

□

REFERENCES

[1] E.-S. Golod et I.-R. Safarevic, *On Class Field Towers*, Izk. Ak. SSSR (1964), 273–276, (russian); AMS Translations, **48** (1965), 91–102.

[2] G. Gras, *Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier, **23 4** (1973), 1–44.

[3] F. Hajir, *On a theorem of Koch*, Pacific J. Math., **176** (1996), 15–18.

[4] H. Koch, *Über den 2-Klassenkörperturm eines quadratischen Zahlkörper* I, J. Reine Angew. Math., **214/215** (1964), 201–206.

[5] H. Koch, Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970.

[6] H. Koch, Number theory II, EMS 62, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[7] H. Koch, *Zum Satz von Golod-Schafarewitsch*, Math. Nachr., **42** (1969), 321–333.

[8] H. Koch et B. Venkov, *Über den p-Klassenkörperturm eines imaginär quadratischen Zahlkörpers*, Astérisque, **24/25** (1975), 57–67.

[9] C. Maire, *Extensions T-ramifiées modérées, S-décomposées*, Thèse, Faculté des Sciences de Besançon (1995).

[10] C. Maire, *Tours de Hilbert des extensions cubiques cycliques sur Q*, Manuscripta Math., à paraitre.

[11] C. Maire, *Compléments à un résultat de Safarevic*, Math. Nachrichten, à paraitre.

[12] L. Rédei et H. Reichardt, *Die Anzahl der durch* 4 *teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. reine angew. Math., **170** (1933), 69–74.

[13] R. Schoof, *Infinite class field towers of quadratic fields*, J. reine angew. Math., **372** (1986), 209–220.

[14] J.-P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Springer-Verlag, 1995.

[15] E.-B. Vinberg, *On the dimension theorem of associative algebras*, Izv. Ak. Nauk. SSSR, **29** (1965), 209–214, (russian).

Laboratoire de Matématiques-UMR 6623
Université de Besançon
16, route de Gray
25000 Besançon