Commun. Math. Phys. 113, 263–297 (1987)

Communications in
Mathematical
Physics

Etude spectrale d'une famille d'opérateurs non-symétriques intervenant dans la théorie des champs de reggeons

Abdelkader Intissar

Département de Mathématiques, Université de Nice, F-06034 Nice Cedex, France

Abstract. In this paper, we study a few spectral properties of a non-symmetrical operator arising in the Gribov theory.

The first and second section are devoted to Bargmann's representation and the study of general spectral properties of the operator:

$$H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}=\lambda' \sum_{j=1}^{N} A_j^{*2}A_j^2+\mu\sum_{j=1}^{N} A_j^*A_j+i\lambda\sum_{j=1}^{N} A_j^*(A_j+A_j^*)A_j$$
$$+\alpha\sum_{j=1}^{N-1}(A_{j+1}^*A_j+A_j^*A_{j+1})\ ,$$

where A_j^* and A_j, $j\in[1,N]$ are the creation and annihilation operators. In the third section, we restrict our study to the case of nul transverse dimension ($N=1$). Following the study done in [1], we consider the operator:

$$H_{\lambda',\mu,\lambda}=\lambda' A^{*2}A^2+\mu A^*A+i\lambda A^*(A+A^*)A\ ,$$

where A^* and A are the creation and annihilation operators.

For $\lambda'>0$ and $\lambda'^2\leqq\mu\lambda'+\lambda^2$. We prove that the solutions of the equation $u'(t)+H_{\lambda',\mu,\lambda}u(t)=0$ are expandable in series of the eigenvectors of $H_{\lambda',\mu,\lambda}$ for $t>0$.

In the last section, we show that the smallest eigenvalue $\sigma(\alpha)$ of the operator $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ is analytic in α, and thus admits an expansion: $\sigma(\alpha)=\sigma_0+\alpha\sigma_1+\alpha^2\sigma_2+\dots$, where σ_0 is the smallest eigenvalue of the operator $H_{\lambda',\mu,\lambda,0}$.

0. Introduction

La théorie des champs de reggeons a été inventé par Gribov [9] en 1967, afin de décrire le comportement à haute énergie des sections éfficaces de collisions de particules élémentaires.

Elle est caractérisée par une famille d'opérateurs non-autoadjoints s'exprimant en fonction des opérateurs de création et d'annihilation usuels.

Plus précisement, l'hamiltonien de la théorie des champs de reggeons à une seule dimension transverse, une fois mis sur réseau et tronqué, s'ecrit:

$$H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}=\lambda' \sum_{j=1}^{N} A_j^{*2} A_j^2 + \mu \sum_{j=1}^{N} A_j^* A_j + i\lambda \sum_{j=1}^{N} A_j^*(A_j + A_j^*)A_j$$
$$+\alpha \sum_{j=1}^{N-1} (A_{j+1}^* A_j + A_j^* A_{j+1}) \ , \tag{0.1}$$

où

- λ' est le «four-pomeron coupling»,
- μ est l'intercept de pomeron,
- λ est le «triple-pomeron coupling»,
- α est la pente de la trajectoire de Regge

et

- A_j, A_j^* sont les opérateurs d'annihilation et de création agissant sur un espace de Hilbert E et vérifiant les propriétés suivantes:

$$[A_j, A_k^*]=\delta_{jk} I \ , \quad [A_j, A_k]=[A_j^*, A_k^*]=0 \ ; \quad j,k=1,2,\ldots,N \ , \tag{0.2}$$

Les domaines

$$\bigcap_{j=1}^{N} D(A_j) \quad \text{et} \quad D(A_j^* A_j) \cap D(A_j A_j^*) \tag{0.3}$$

sont denses dans E pour tout $j \in [1, N]$.

Le fait que $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ n'est pas auto-adjoint est d'une part essentièl pour que la théorie des reggeons ait un sens et d'autre part une source d'ennuis mathématiques.

Dans ce travail, on fait une théorie spectrale compléte pour $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$: – Définition du domaine, construction du semi-groupe associé, analyse spectrale et comportement asymptotique de ce semi-groupe.

En utilisant l'arsenal des perturbations analytiques des opérateurs, on établit des résultats sur le comportement de la valeur propre principale de $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ en fonction du coefficient de couplage entre les sites α.

1. Représentation de $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ dans l'espace de V. Bargmann

Pour l'étude de $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$, on considère la représentation holomorphe dans laquelle, les états sont définis comme les fonctions analytiques de l'espace de Bargmann E [2], c'est à dire:

$$E=\left\{\varphi : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C} \text{ analytiques}; \int_{\mathbb{C}^N} e^{-|z|^2} |\varphi(z)|^2 d_v(z) < +\infty\right\} \ , \tag{1.1}$$

où $z=(z_1,\ldots,z_N)$, $d_v(z)=dX\cdot dY/(2\pi)^N$ avec $z=X+iY$, $X=(x_1,\ldots,x_N)$ et $Y=(y_1,\ldots,y_N)$.

Dans cette représentation, les opérateurs A_j et A_j^* sont respectivement la dérivation par rapport à z_j et la multiplication par z_j.

L'espace ci-dessus est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{C}^N} e^{-|z|^2} \varphi(z) \overline{\psi(z)}\, d_v(z) \ .$$

Nous nous limiterons ici à rappeler, tout en les précisant quelques propriétés de E qui nous serons utiles dans la suite. Pour une description détaillée de l'espace de Bargmann, on consultera [2, 3].

Lemme 1. i) *Pour tout multi-indice $k=(k_1, \ldots, k_N)$ d'entiers naturels, on désigne par $e_k(z) = z^k/\sqrt{k!}$, où $z^k = \prod_{j=1}^{N} z_j^{k_j}$ et $k! = k_1!k_2! \ldots k_N!$ alors la famille e_k est une base orthonormée de E.*

ii) *L'espace P des polynômes à N variables est dense dans E.*

iii) *L'espace E est isometrique à l'espace E_s des suites*

$$a=(a_k) \text{ telles que: } \|a\|^2 = \sum_{K \geqq 0} k!|a_k|^2 < +\infty \ ,$$

l'isométrie ci-dessus est donnée par:

$$\varphi(z) = \sum_{K \geqq 0} a_k z^k \rightarrow a = (a_k)$$

En tenant compte des propriétés de l'espace des suites E_s, les opérateurs A_j et A_j^* (resp. A_j^2 et A_j^{*2}) peuvent s'ecrire:

– $A_j e_0 = 0$, $A_j e_k = \sqrt{k_j}\, e_{k-\varepsilon_j}$, où $j \in [1, N]$ et $\varepsilon_j = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$

– $A_j^* e_k = \sqrt{k_j + 1}\, e_{k+\varepsilon_j}$; $j \in [1, N]$,

– $A_j^2 e_k = \sqrt{k_j}\, \sqrt{k_j - 1}\, e_{k-2\varepsilon_j}$; $j \in [1, N]$,

– $A_j^{*2} e_k = \sqrt{k_j + 1}\, \sqrt{k_j + 2}\, e_{k+2\varepsilon_j}$; $j \in [1, N]$.

Lemme 2. i) $D(A_j) = \left\{ (a_k);\ \sum_K (k_j + 1)|a_{k+\varepsilon_j}|^2 < +\infty \right\}$.

ii) *A_j et A_j^* sont adjoint l'un de l'autre et on a:*

$$D(A_j) = D(A_j^*) \quad ; \quad \forall j \in [1, N] \ .$$

iii) *$D = \bigcap_{j=1}^{N} D(A_j)$ et $D^2 = \bigcap_{j=1}^{N} D(A_j^2)$ sont denses et s'injectent dans E de façon compacte.*

D et D^2 sont respectivement munis des normes:

$$\|\varphi\|_D = \left(\sum_{j=1}^{N} \|A_j \varphi\|^2 \right)^{1/2} , \qquad \|\varphi\|_{D^2} = \left(\sum_{j=1}^{N} A_j^2 \varphi\|^2 \right)^{1/2} .$$

Lemme 3. *Si φ appartient à l'espace de Bargmann alors ses réstrictions aux espaces $X + i\mathbb{R}^N$ sont de carré intégrable par rapport au poids* $\exp(-|Y|^2)$.

La démonstration de ces trois lemmes est classique cependant on donnera ci-dessous une démonstration originale au troisième lemme.

Dans [2], Bargmann a construit une isométrie entre l'espace E et l'espace $L_2(\mathbb{R}^N)$ des fonctions de carré integrable, de sorte que, toute fonction φ de E est représentée de manière unique par une fonction de $L_2(\mathbb{R}^N)$ au moyen de l'intégrale suivante:

$$\varphi(z)=c\int_{\mathbb{R}^N} e^{-1/2\,z^2-1/2\,q^2+\sqrt{2}\,zq} f(q)\,dq\ , \tag{1.2}$$

et on a:

$$\|\varphi\|_E=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\ .$$

Posons $g_z(q)=e^{-1/2\,q^2+\sqrt{2}\,zq}$, qui est une fonction de L_2. On peut alors écrire (1.2) sous la forme:

$$e^{1/2\,z^2}\varphi(z)=c\int_{\mathbb{R}^N} g_z(q)f(q)\,dq\ . \tag{1.3}$$

Comme g et f sont toutes les deux dans $L_2(\mathbb{R}^N)$ on peut appliquer l'identité de Parseval à (1.3) et on obtient:

$$e^{1/2\,z^2}\varphi(z)=c_1\int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_z(p)\hat{f}(p)\,dp\ , \tag{1.4}$$

$g_z(q)$ étant une gaussienne où c_1 est une constante, on sait calculer sa transformée de Fourier:

$$\begin{aligned} g_z(p)&=\int_{\mathbb{R}^N} e^{iqp} g_z(q)\,dq=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-1/2\,q^2+(\sqrt{2}\,z-ip)\cdot q}\,dq \\ &=(2\pi)^{N/2}e^{1/2\,(\sqrt{2}\,z-ip)^2}\ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Comme $z=X+iY$, on peut écrire, pour tout X fixé, la fonction $g_z(p)$ sous la forme:

$$g_z(p)=(2\pi)^{N/2}e^{1/2\,(\sqrt{2}\,X-i(p-\sqrt{2}\,Y))^2}\ . \tag{1.6}$$

En posant:

$$h_X(p)=e^{X^2}e^{-1/2\,(p^2+ipX\sqrt{2-2})}\ ,\quad \text{la fonction}\quad e^{1/2\,z^2}\varphi(z)$$

apparait alors comme la convolée de h_X et de $\hat{f}$ évalué au point $\sqrt{2}\,Y$, c'est à dire:

$$e^{1/2\,(X+iY)^2}\varphi(X+iY)=c_2 h_X*\hat{f}(\sqrt{2}\,Y)\ , \tag{1.7}$$

où c_2 est une constante.

Il en résulte que l'application $y\to e^{1/2\,(X+iY)^2}\varphi(X+iY)$ est dans L_2 pour tout X dans $\mathbb{R}^N$.

En appliquant une inégalité de Young [4], on peut déduire:

$$\|e^{1/2\,(X+iY)^2}\varphi(X+iY)\|_{L_2}^2\leqq c\|h_X\|_{L_1}^2\|\hat{f}\|_{L_2}^2\ , \tag{1.8}$$

où c est une constante.

Comme $\|h_X\|_{L_1}^2=c_3e^{2|X|^2}$ et $\|\hat{f}\|_{L_2}^2=c_4\|f\|_{L_2}^2$ on en déduit que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|Y|^2}|\varphi(X+iY)|^2\,dY\leqq c_5e^{X^2}\|\varphi\|^2\ , \tag{1.9}$$

où c_5 dépend de toutes les constantes précédentes, ce qui achève la démonstration du lemme.

Dans la suite, on considère l'opérateur $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ agissant sur E_0, où E_0 est un sous espace fermé de E, constitué des fonctions de Bargmann qui s'annulent à l'origine c'est à dire:

$$E_0 = \{\varphi \in E;\ \varphi(0) = 0\} \ . \tag{1.10}$$

Cette restriction élimine la valeur propre zéro qui est sans portée physique.

Comme $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ est un opérateur non borné et non auto-adjoint, on étudiera dans le paragraphe suivant ses premières propriétés spectrales par l'intermidiaire de sa résolvante.

2. Propriétés générales de $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$

Tout au long de ce paragraphe, on supposera que $(\lambda', \mu, \lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^4$ avec $\lambda' \neq 0$ et on commence par donner quelques notations:

- P_0 désigne l'ensemble des polynômes qui s'annulent à l'origine,
- $S = \sum_{j=1}^{N} A_j^{*2} A_j^2$ de domaine $D(S) = \{\varphi \in E_0\ ;\ S\varphi \in E_0\}$,
- $H = \mu \sum_{j=1}^{N} A_j^* A_j + i\lambda \sum_{j=1}^{N} A_j^*(A_j + A_j^*) A_j + \alpha \sum_{j=1}^{N-1} (A_{j+1}^* A_j + A_j^* A_{j+1})$,
- $H_{\lambda'} = \lambda' S + H$ avec λ' non nul,
- Le domaine maximal de $H_{\lambda'}$ (resp. de H) est $D(H_{\lambda'}) = \{\varphi \in E_0\ ;\ H_{\lambda'}\varphi \in E_0\}$
- Le domaine minimal de $H_{\lambda'}$ (resp. de H) est:

  $$D_{\min} = \{\varphi \in E_0,\ \exists p_n \in P_0,\ \exists \psi \in E_0\ ;\ p_n \to \varphi \text{ et } H_{\lambda'} p_n \to \psi\}$$

  qu'on notera aussi par $H_{\lambda'}^{\min}$ (resp. $H^{\min}$).

Remarque 1. i) L'espace de Bargmann E s'injecte de façon continue dans l'espace des distributions $D(\mathbb{R}^{2N})$.

ii) L'espace de Bargmann s'injecte de façon continue dans l'espace des fonctions analytiques en la variable iy, $y \in \mathbb{R}^N$ et satisfaisant:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2} |\varphi(iy)|^2 dy < +\infty \ .$$

iii) Tous les domaines défini ci-dessus, (muni de leur norme du graphe), s'injectent de façon compacte dans E.

Commençons par dégager trois lemmes fondamentaux qui nous permettent de montrer, en particulier que pour λ' non nul, que $H_{\lambda'}$ est un opérateur à résolvante compacte.

Lemme 4. i) *Soit* $j \in [1, N]$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $\forall p$ *polynôme en* A_j *et* A_j^* *de degré* $r < 2k$ *on a:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c_\varepsilon > 0$ *tel que* $\forall \varphi \in D(A_j^{2k})$,

$$|\langle p(A_j, A_j^*)\varphi, \varphi\rangle| \leqq \varepsilon \langle A_j^{*k} A_j^k \varphi, \varphi\rangle + c_\varepsilon \|\varphi\|^2 \ .$$

ii) *Soit* $j\in[1,N]$, $\forall k\in\mathbb{N}$, *on a* $\forall\varepsilon>0$, $\exists c_\varepsilon>0$ *tel que* $\forall\varphi\in D(A_j^{k+1})$, $\|A_j^k\varphi\|^2\leqq\varepsilon\|A_j^{k+1}\varphi\|^2+c_\varepsilon\|\varphi\|^2$.

Démonstration.

i) Soit $\varphi(z)=\sum_K a_k e_k(z)$ on a:

$$A_j^{*m}A_j^l\varphi=\sum_K k_j(k_j-1)\dots(k_j-l+1)a_k(z^{k_1\dots k_j+m-l\dots K_N})/\sqrt{k!}$$

$$=\sum_K (k_j+l-m)(k_j+l-m-1)\dots(k_j-m+1)$$

$$\cdot a_{k_1\dots(k_j+l-m)\dots k_N}(z^{k_1\dots k_j+m-l\dots k_N})/\sqrt{k!}\ .$$

$***$ Si $l\geqq m$ on a: $\sqrt{(k_j+l-m)!}=\sqrt{k_j!}\sqrt{k_j+1}\dots\sqrt{(k_j+l-m)}$. Il en résulte que:

$$A_j^{*m}A_j^l\varphi=\sum\{\sqrt{(k_j+l-m)}\sqrt{(k_j+l-m-1)}\cdot\sqrt{(k_j+1)}\dots(k_j-m+1)$$

$$\cdot a_{k_1\cdot(k_j+l-m)\dots k_N}\}e_k(z)\ .$$

En posant $u(k_j)=\sqrt{(k_j+l-m)}\sqrt{(k_j+l-m-1)}\dots\sqrt{(k_l+1)}\dots(k_j-m+1)$, on en déduit:

$$u(k_j)\approx k_j^{1/2(l-m)}k_j^m=k_j^{1/2(l+m)}\quad \text{d'où}\quad u(k_j)=O(k_j^{1/2(l+m)})\ .$$

$***$ Si $l\leqq m$, de façon similaire on déduit que:

$$u(k_j)=O(k_j^{1/2(l+m)})$$

Calculons maintenant l'expression: $\langle A_j^{*m}A_j^l\varphi,\varphi\rangle$ on a:

$$\langle A_j^{*m}A_j^l\varphi,\varphi\rangle=\sum_K u(k_j)a_{k_1\dots(k_j+l-m)\dots k_N}\cdot\bar a_{k_1\dots k_N}$$

$$\leqq\sum_K u(k_j)|a_{k_1\dots(k_j+l-m)\dots k_N}\cdot\bar a_{k_1\dots k_N}|$$

$$\leqq 1/2\sum_K[u(k_j)+u(k_j+l-m)]|a_k|^2\ .$$

Comme $u(k_j)=O(k_j^{1/2(l+m)})$, il existe $c_0>0$ et $c_1>0$ tels que $u(k_j)\leqq c_0+c_1k_j^{1/2(l+m)}$.

Pour $m+l<2k$ on obtient, en appliquant l'inégalité de Young, $\forall\delta>0\exists c_\delta>0$; $k_j^{1/2(l+m)}\leqq\delta k_j^k+c_\delta$, il en résulte alors que:

$$\langle A_j^{*m}A_j^l\varphi,\varphi\rangle\leqq c_1\delta\sum k_j^k|a_k|^2+(c_\delta+c_0)\sum|a_k|^2\ ,$$

d'où:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\quad \exists c_\varepsilon>0\quad \text{tel que}\ \forall\varphi\in D(A_j^{2k})\ ,$$

$$|\langle A_j^{*m}A_j^l\varphi,\varphi\rangle|\leqq\varepsilon\langle A_j^{*k}A_j^k\varphi,\varphi\rangle+c_\varepsilon\|\varphi\|^2\ .$$

ii) De (i) on déduit (ii).

Lemme 5. i) *Soit* $j\in[1,N]$, $\forall k\in\mathbb{N}^+$, $\forall p$ *polynôme en* A_j *et* A_j^* *de degré* $r<2k$ *on a:*

$$\forall\varepsilon>0\ ,\quad \exists c_\varepsilon>0\quad \textit{tel que}\quad \forall\varphi\in D(A_j^{2(k+1)})\ ,$$
$$|\langle p(A_j,A_j^*)\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j)}|\leqq\varepsilon\langle A_j^{*k}A_j^k\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j)}+c_3\|\varphi\|^2_{D(A_j)}\ .$$

ii) *Soit* $j\in[1,N]$, $\forall k\in\mathbb{N}^+$, $\forall p$ *polynôme en* A_j *et* A_j^* *de degré* $r<2k$ *on a:*

$$\forall\varepsilon>0\ ,\quad \exists c_\varepsilon>0\quad \textit{tel que}\quad \forall\varphi\in D(A_j^{2(k+2)})\ ,$$
$$|\langle p(A_j,A_j^*)\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j^2)}|\leqq\varepsilon\langle A_j^{*k}A_j^k\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j^2)}+c_\varepsilon\|\varphi\|^2_{D(A_j^2)}\ .$$

Démonstration. i) En appliquant le (i) du lemme précédent, on obtient:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\quad \exists c_\varepsilon>0\quad \text{tel que}\quad \forall\varphi\in D(A_j^{2(k+1)})\ ,$$
$$|\langle p(A_j,A_j^*)\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j)}|\leqq\varepsilon\langle A_j^{*(k+1)}A_j^{(k+1)}\varphi,\varphi\rangle+c_\varepsilon\|\varphi\|^2\ .$$

Comme $A_jA_j^*-A_j^*A_j=I$, on déduit que:
$\forall k\in\mathbb{N}^+$, $A_j^{*k}A_j=A_jA_j^{*k}-kA_j^{*(k-1)}$, il en résulte que:

$$\begin{aligned}\langle A_j^{*(k+1)}A_j^{(k+1)}\varphi,\varphi\rangle&=\langle A_j^{*k}A_jA_j^k\varphi,A_j\varphi\rangle\\&=\langle(A_jA_j^{*k}-kA_j^{*(k-1)})A_j^k\varphi,A_j\varphi\rangle\\&=\langle A_jA_j^{*k}A_j^k\varphi,A_j\varphi\rangle-k\langle A_j^{*k}A_j^k\varphi,\varphi\rangle\ .\end{aligned}$$

D'où:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\quad \exists c_\varepsilon>0\quad \text{tel que}\quad \forall\varphi\in D(A_j^{2(k+1)})\ ,$$
$$|\langle p(A_j,A_j^*)\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j)}|\leqq\varepsilon\langle A_j^{*k}A_j^k\varphi,\varphi\rangle_{D(A_j)}+c_\varepsilon\|\varphi\|^2_{D(A_j)}\ .$$

ii) De façon similaire.

Lemme 6. *Soient:*

– $S=\sum_{j=1}^{N}A_j^{*2}A_j^2$ *de domaine* $D(S)=\{\varphi\in E_0\,;\,S\varphi\in E_0\}$ *et*

– $$H=\mu\sum_{j=1}^{N}A_j^*A_j+i\lambda\sum_{j=1}^{N}A_j^*(A_j+A_j^*)A_j+\alpha\sum_{j=1}^{N-1}(A_{j+1}^*A_j+A_j^*A_{j+1})\ .$$

Alors on a: i) $\forall\varepsilon>0$, $\exists c_\varepsilon>0$; $\|H\varphi\|\leqq\varepsilon\|S\varphi\|+c_\varepsilon\|\varphi\|$ $\forall\varphi\in D(S)$.

ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists c_\varepsilon>0$; $|\langle H\varphi,\varphi\rangle|\leqq\varepsilon\langle S\varphi,\varphi\rangle+c_\varepsilon\|\varphi\|^2$ $\forall\varphi\in D(S)$.

iii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists c_\varepsilon>0$; $|\langle H\varphi,\varphi\rangle_D|\leqq\varepsilon\langle S\varphi,\varphi\rangle_D+c_\varepsilon\|\varphi\|^2_D$ $\forall\varphi\in\bigcap_{j=1}^{N}D(A_j^6)$

iv) $\forall\varepsilon>0$, $\exists c_\varepsilon>0$; $|\langle H\varphi,\varphi\rangle_{D^2}|\leqq\varepsilon\langle S\varphi,\varphi\rangle_{D^2}+c_\varepsilon\|\varphi\|^2_{D^2}$ $\forall\varphi\in\bigcap_{j=1}^{N}D(A_j^8)$.

Démonstration. i) Soit $\varphi \in D(S)$, alors pour $\varphi(z) = \sum_{|k| \geqq 1} a_k e_k$, on a:

$$\sum_{|k| \geqq 1} [k_1 + k_2 + \ldots + k_N] |a_k|^2 < +\infty \ ,$$

$$\sum_{|k| \geqq 1} [k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_N^2] |a_k|^2 < +\infty \ ,$$

$$\sum_{|k| \geqq 1} [k_1^3 + k_2^3 + \ldots + k_N^3] |a_k|^2 < +\infty$$

et

$$\sum_{|k| \geqq 1} [k_1^2 (k_1 - 1)^2 + k_2^2 (k_2 - 1)^2 + \ldots + k_N^2 (k_N - 1)^2] |a_k|^2 < +\infty \ ,$$

on en déduit que: $\sum_{|k| \geqq 1} [k_1^4 + k_2^4 + \ldots + k_{n/N}^4] |a_k|^2 < +\infty$.

Comme:

$$H\varphi(z) = \sum_{|k| \geqq 1} \left\{ \mu \sum_{j=1}^{N} k_j a_k \right.$$

$$+ i\lambda \sum_{j=1}^{N} [(k_j - 1) \sqrt{k_j} a_{k-\varepsilon_j} + \sqrt{k_j + 1}\, k_j a_{k+\varepsilon_j}]$$

$$\left. + \alpha \sum_{j=1}^{N-1} (\sqrt{k_j} \sqrt{k_{j+1} + 1}\, a_{k-\varepsilon_j+\varepsilon_j+1} + \sqrt{k_{j+1}} \sqrt{k_j + 1}\, a_{k+\varepsilon_j-\varepsilon_j+1}) \right\} e_k(z) \ .$$

En combinant l'inégalité de Cauchy et celle de Hölder on obtient:

$$\|H\varphi\|^2 \leqq \sum_k \left[c_1 \sum_{j=1}^{N} k_j^2 + c_2 \sum_{j=1}^{N} k_j^3 \right] |a_k|^2 \ ,$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes on peut aussi déduire que:

$$\|H\varphi\|^2 \leqq c \sum_k (k_1^3 + k_2^3 + \ldots k_N^3) |a_k|^2 \ ,$$

où c est une constante.

Appliquons à nouveau l'inégalité de Hölder au couple $(k_j^3, 1)$, pour tout $j \in [1, N]$, on obtient:

$$\forall \delta > 0 \ , \quad \exists c_\delta > 0 \quad \text{tel que} \quad k_j^3 \leqq \delta k_j^4 + c_\delta \ ,$$

ce qui nous permet de déduire:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists c_\varepsilon > 0 \ ; \quad \|H\varphi\| \leqq \varepsilon \|S\varphi\| + c_\varepsilon \|\varphi\| \ \forall \varphi \in D(S) \ .$$

(ii), (iii) et (iv) sont une conséquence des Lemmes (4) et (5.).

Proposition 1. i) *Pour toute suite $\{\varphi_k\}$ dans $D(S)$ telle que les suites $\{\varphi_k\}$ et $\{S\varphi_k\}$ soient bornées on peut extraire de la suite $\{H\varphi_k\}$ une sous suite convergente c'est à dire: H est S-compact.*

ii) $D(H_{\lambda'}^{\min}) = D(S)$.

Démonstration. i) Comme S est un opérateur à résolvante compacte et H est strictement dominé par S, d'apres le (i) du lemme précédent, il en résulte que H est S-compact.

ii) Il suffit de combiner (i) et le théorème suivant:

Théorème 111, p. 194, Kato [17].

Soient T_1 et T_2 deux opérateurs sur un Hilbert F tels que T_2 est T_1-compact.
Alors, si T_1 est fermable, l'opérateur $T = T_1 + T_2$ est aussi fermable.
Les fermetures de T_1 et T ont le même domaine, et T_2 est T-compact.
De plus T est fermé si T_1 l'est.

Proposition 2. *Pour λ' non nul, $\exists \beta_0 \in \mathbb{R}$; $H_{\lambda'}^{\min} + \beta_0 I$ soit bijectif.*

Démonstration. Soit $\beta > 0$, considérons l'opérateur $H_{\lambda'} = \lambda' S + H$ qu'on peut écrire sous la forme $H_{\lambda'} = \lambda'(S + H/\lambda')$, soit donc:

$$S + H/\lambda' + \beta I = [I + {}^1/\lambda' H(S+\beta I)^{-1}](S+\beta I) \; .$$

Comme $S + \beta I$ est un opérateur inversible, il suffit de montrer que $\|1/\lambda' H(S+\beta I)^{-1}\| < 1$.

Soit $\psi \in E$, on a $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} \|1/\lambda' H(S+\beta I)^{-1}\psi\| &\leqq \varepsilon \|S(S+\beta I)^{-1}\psi\| + c_\varepsilon \|(S+\beta I)^{-1}\psi\| \\ &\leqq \varepsilon \|(S+\beta I - \beta I)(S+\beta I)^{-1}\psi\| + c_\varepsilon \|(S+\beta I)^{-1}\psi\| \\ &\leqq \varepsilon \|\psi\| + (\varepsilon\beta + c_\varepsilon)\|(S+\beta I)^{-1}\psi\| \; . \end{aligned}$$

Comme $\|(S+\beta I)^{-1}\| \leqq 1/\beta$, on en déduit que:

$$\|1/\lambda' H(S+\beta I)^{-1}\psi\| \leqq (2\varepsilon + c_\varepsilon/\beta)\|\psi\| \; .$$

D'où pour $\varepsilon < 1/2$ et $\beta > c_\varepsilon/(1-2\varepsilon)$ on a:

$$\|1/\lambda' H(S+\beta I)^{-1}\| < 1 \; .$$

Par conséquent, il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que:

$$H_{\lambda'}^{\min} + \beta_0 I \quad \text{soit bijectif} \; .$$

Proposition 3. *Pour λ' non nul, on a: Le domaine maximal de $H_{\lambda'}$ est égal à son domaine minimal.*

Démonstration. a) L'inclusion de $D_{\min}$ dans $D(H_{\lambda'})$ est évidente.

b) Pour montrer l'inclusion réciproque, on considère $\varphi \in D(H_{\lambda'})$: c'est à dire $\varphi \in E_0$ et $H_{\lambda'}\varphi \in E_0$ comme il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $H_{\lambda'}^{\min} + \beta_0 I$ soit bijectif de $D_{\min}$ sur E_0, alors il existe $\varphi_1 \in D_{\min}$ tel que $(H_{\lambda'} + \beta_0 I)\varphi = (H_{\lambda'}^{\min} + \beta_0 I)\varphi_1$ on a en particulier $(H_{\lambda'} + \beta_0 I)(\varphi - \varphi_1) = 0$, il faut donc montrer que $H_{\lambda'} + \beta_0 I$ est injectif.

Pour ce faire montrons l'inégalité a priori suivante:

$$\begin{aligned} &\text{Pour } \lambda' > 0, \; \exists c > 0; \; \operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}^{\min}\varphi, \varphi\rangle \geqq -c\|\varphi\|^2 \forall \varphi \in D_{\min} \; . \\ &\text{Pour } \lambda' < 0, \; \exists c > 0; \; \operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}^{\min}\varphi, \varphi\rangle \leqq c\|\varphi\|^2 \forall \varphi \in D_{\min} \; . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour $\lambda' > 0$, on a $\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}^{\min}\varphi, \varphi\rangle = \lambda'\langle S\varphi, \varphi\rangle + \operatorname{Re}\langle H\varphi, \varphi\rangle$, de l'inégalité (ii) du

Lemme (6) on déduit que:

$$\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}^{\min}\varphi,\varphi\rangle \geqq (\lambda'-\varepsilon)\langle S\varphi,\varphi\rangle - c\|\varphi\|^2 \quad \forall\varphi\in D_{\min}\ .$$

En choisissant $\varepsilon \leqq \lambda'$ on obtient le résultat.

De cette inégalité a priori, on déduit que $H_{\lambda'}^{\min}+\beta_0 I$ est un opérateur à image fermée. D'autre part, on a: $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}^{T}=H_{\lambda',\mu,-\lambda,\alpha}$, où $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}^{T}$ désigne l'adjoint formel de $H_{\lambda'}$.

Puisque l'adjoint du minimal est l'adjoint formel maximal voir [6]; il découle de la proposition précédente que $H_{\lambda'}^{T}+\beta_0 I$ est inversible; il est donc surjectif ce qui prouve l'injectivité de $H_{\lambda'}+\beta_0 I$. Par suite $\varphi=\varphi_1$ et donc $\varphi\in D_{\min}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 4. *Pour λ' non nul on a:*

i) *$H_{\lambda'}$ de domaine $D(S)$ est un opérateur à résolvante compacte.*

ii) *Le spectre de $H_{\lambda'}$ est une suite de nombres complexes (σ_k) (qu'on peut ordonner en ordre croissant de modules tels que* $\lim|\sigma_k|=+\infty$ *lorsque k tend vers l'infini).*

iii) *σ_k est une valeur propre de $H_{\lambda'}$ $\forall k\geqq 0$.*

iv) *L'image de $H_{\lambda'}-\sigma_k I$ est fermée*

v) *$H_{\lambda'}-\sigma_k I$ est un opérateur à indice et son indice est nul.*

Démonstration. i) Comme $D(S)$ s'injecte dans E_0 de façon compacte et que l'ensemble résolvant de $H_{\lambda'}$ n'est pas vide, on en déduit que $H_{\lambda'}$ est un opérateur à résolvante compacte.

(ii), (iii), (iv), (v) sont des résultats classiques.

On suppose $\lambda'>0$, et on considère le problèeme de Cauchy:

$$u'(t)=-H_{\lambda'}u(t)\ ,\qquad t>0\ ,\quad u(0)=\varphi \quad \text{et}\quad \varphi\in D(H_{\lambda'})\ . \tag{2.2}$$

Pour montrer que le problème de Cauchy est bien posé, c'est à dire, pour montrer l'existence et l'unicité du problème (2.2), on est amené à vérifier les hypothèses du théorème de Hille-Yosida.

Proposition 5. *Pour $\lambda'>0$ on a:*

i) *$-H_{\lambda'}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $e^{-tH_{\lambda'}}$ et il existe $\beta_0>0$ tel que*

$$\|e^{-tH_{\lambda'}}\|\leqq e^{\beta_0 t}\quad \forall t\geqq 0\ .$$

ii) *$e^{-t(H_{\lambda'}+\beta_0 I)}$ est compact $\forall t>0$.*

iii) *$\sigma(e^{-tH_{\lambda'}})=e^{-t\sigma(H_{\lambda'})}\cup\{0\}$, où $\sigma(H_{\lambda'})$ désigne le spectre de $H_{\lambda'}$.*

Démonstration. i) De l'inégalité a priori (2.1) et la Proposition (3) on a l'existence de $\beta_0>0$ tel que:

$$\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}\varphi,\varphi\rangle \geqq -\beta_0\|\varphi\|^2\quad \forall\varphi\in D(H_{\lambda'})\ . \tag{2.3}$$

Il en résulte que $H_{\lambda'}+\beta_0 I$ est un opérateur accrétif et par suite:

$$\forall\beta>\beta_0\ ,\qquad \|\varphi\|\leqq 1/(\beta-\beta_0)\|(H_{\lambda'}+\beta I)\varphi\|\ \forall\varphi\in D(H_{\lambda'})\ . \tag{2.4}$$

Il découle alors de la proposition (4) que:

$$\|(H_{\lambda'}+\beta I)^{-1}\| \leqq 1/(\beta-\beta_0) \quad \forall \beta > \beta_0 \ . \tag{2.5}$$

Les hypothèses du théorème de Hille-Yosida sont donc vérifiées et le (i) est ainsi démontré.

ii) Pour l'étude de la compacité du semi-groupe on est amené à montrer le lemme suivant:

Lemme 7. *Soit* $u'(t) = -H_{\lambda'}u(t)$, $t>0$, $u(0)=\varphi$.

Soient $\lambda'>0$ *et* $u(0)\in D=\bigcap_{j=1}^{N} D(A_j)$, *alors on a:*

i) *Il existe* $c>0$ *tel que* $\|u(t)\|_D \leqq e^{ct}\|u(0)\|_D$.

ii) $e^{-tH_{\lambda'}}\Phi \in L_2([0,T],D)$ $\forall \Phi\in E_0$.

iii) $e^{-tH_{\lambda'}}\Phi\in D$ $\forall t>0$ *et* $\forall \Phi \in E_0$.

Démonstration du lemme. i) Soit $u'(t) = -H_{\lambda'}u(t)$ avec $\lambda'>0$, on a:

$$\operatorname{Re}\langle u'(t),u(t)\rangle_D = -\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}u(t),u(t)\rangle_D \ .$$

D'après l'inégalité a priori (iii) du Lemme (6), on déduit qu'il existe une constante $c>0$ tel que:

$$(1/2)d/dt\|u(t)\|_D^2 \leqq c\|u(t)\|_D^2 \ ,$$

et en appliquant le lemme de Gronwal, on établit:

$$\|u(t)\|_D \leqq e^{ct}\|u(0)\|_D \quad \text{avec} \quad u(0)\in D(H_{\lambda'}^2) \ , \quad \text{mais} \quad D(H_{\lambda'}^2)$$

est dense dans D alors pour tout $u(o)\in D$ il existe $u_m(0)\in D(H_{\lambda'}^2)$ telque $u_m(0)\to u(0)$ quand $m\to+\infty$ et par passage à la limite on en déduit que:

$$\|u(t)\|_D \leqq e^{ct}\|u(0)\|_D \quad \text{avec} \quad u(0)\in D \ . \tag{2.6}$$

ii) Soit $u'(t) = -H_{\lambda'}u(t)$ avec $u(0)=\varphi$, soit $u(0)\in D(H_{\lambda'}^2)$, alors on a:

$\operatorname{Re}\langle u'(t),u(t)\rangle = -\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}u(t),u(t)\rangle$, comme $(A_j+A_j^*)$ est un opérateur symétrique et comme

$$\left|\operatorname{Re}\left\langle \sum_{j}^{N-1}(A_{j+1}^*A_j + A_j^*A_{j+1})u(t),u(t)\right\rangle\right| \leqq 2\sum_{j}^{N}\|A_ju(t)\|^2 \ .$$

Il en résulte que:

$$1/2d/dt\|u(t)\|^2 + \lambda'\sum_{j}^{N}\|A_j^2u(t)\|^2 - (|\mu|+2\alpha)\sum_{j}^{N} A_ju(t)\|^2 \leqq 0$$

or $\forall\varepsilon>0$, $\exists c_\varepsilon>0$ tel que $\|A_ju(t)\|^2 \leqq \varepsilon\|A_j^2u(t)\|^2 + c_\varepsilon\|u(t)\|^2$ [lemme (4)]. D'où pour $\lambda'>0$ on a:

$$1/2d/dt\|u(t)\|^2 + (\lambda'-\varepsilon(|\mu|+2\alpha))\sum_{j}^{N}\|A_j^2u(t)\|^2 - c_\varepsilon(|\mu|+2\alpha)\|u(t)\|^2 \leqq 0 \ .$$

En choisissant $\varepsilon < \lambda'/(|\mu|+2\alpha)$, on en déduit que:

$$1/2\, d/dt \|u(t)\|^2 + (\lambda' - \varepsilon(|\mu|+2\alpha)) \sum_{j=1}^{N} \|A_j^2 u(t)\|^2 \leqq c_\varepsilon(|\mu|+2\alpha)\|u(t)\|^2 .$$

Intégrons chaque membre de cette dernière inégalité sur l'intervalle $[0, T]$ pour obtenir:

$$\|u(T)\|^2 + (\lambda' - \varepsilon(|\mu|+2\alpha)) \int_0^T \sum_{j=1}^{N} \|A_j^2 u(t)\|^2 dt \leqq \|u(0)\|^2 + c \int_0^T \|u(t)\|^2 dt .$$

De cette inégalité a priori on déduit:

d'une part que $\int_0^T \|e^{-tH_{\lambda'}}\varphi\|_D^2 dt \leqq \|\varphi\|^2 \ \forall \varphi \in D(H_{\lambda'})$ et d'autre part (en appliquant le Lemme de Fatou) que $\int_0^T \|e^{-tH_{\lambda'}}\Phi\|_D^2 dt \leqq \|\Phi\|_{E_0}^2 \ \forall \Phi \in E_0$. Il en résulte qu'on a $u(t) \in L_2([0, T], D)$.

iii) Il résulte de (ii) que $u(t) \in D$ sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle. Mais de l'additivité du semi-groupe on déduit que $u(t) \in D \ \forall t > 0$.

Retour a la démonstration de la proposition 5. ii) Du lemme précédent, on déduit que $e^{-t(H_{\lambda'}+\beta_0 I)}$ est un opérateur fortement continu de D sur lui même. Comme D s'injecte de façon compacte dans E_0, on déduit que:

$e^{-t(H_{\lambda'}+\beta_0 I)}$ est un opérateur compact pour tout $t > 0$.

(iii) est une conséquence immédiate du Théorème 2.4, p. 46, Pazy [23].

3. Etude de $H_{\lambda',\mu} = \lambda' A^{*2}A^2 + \mu A^*A + i\lambda A^*(A+A^*)A$ (un site)

Dans ce paragraphe, on étudiera les propriétés spectrales de l'opérateur $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ à un site, c'est à dire agissant sur l'espace de Bargmann:

$$E_0 = \left\{ \varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ analytiques}; \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} |\varphi(z)|^2 dx\, dy < +\infty \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0 \right\} .$$

Plus précisément, l'opérateur $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ s'écrit dans ce cas sous la forme:

$$H_{\lambda'} = \lambda' A^{*2}A^2 + \mu A^*A + i\lambda A^*(A+A^*)A , \quad \text{où} \quad A = d/dz \tag{3.1}$$

et A^* est la multiplication par z.

Nous résumons d'abord certaines propriétés de $H_{\lambda'}$ déduites du paragraphe précédent sous forme d'une proposition:

Proposition 6. *Soient* $S = A^{*2}A^2$ *et* $H = \mu A^*A + i\lambda A^*(A+A^*)A$, *on pose* $H_{\lambda'} = \lambda' S + H$ *alors on a:*

i) *Pour* λ' *non nul*, $D(H_{\lambda'}) = D(S)$.

ii) *Pour* λ' *non nul*, $\exists \beta_0 \in \mathbb{R}$; $(H_{\lambda'} + \beta_0 I)$ *a un inverse compact.*

iii) *Pour* $\lambda' > 0$, $\exists c > 0$ *tel que* $\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}\varphi, \varphi\rangle \geqq -c\|\varphi\|^2$.

iv) *Pour* $\lambda' > 0$, $-H_{\lambda'}$ *engendre un semi-groupe compact vérifiant:* $\|e^{-tH_{\lambda'}}\| \leqq e^{\beta_0 t}$.

v) $\sigma(e^{-tH_{\lambda'}}) = e^{-t\sigma(H_{\lambda'})} \cup \{0\}$.

Commençons par préciser d'autres propriétés spectrales de $H_{\lambda'}$.

Proposition 7. *Soient λ' non nul et $\lambda/\lambda'(\lambda/\lambda'+\mu/\lambda)\geqq 1$ alors les valeurs propres de $H_{\lambda'}$ sont réelles et simples.*

Démonstration. On considère le proplème aux valeurs propres $H_{\lambda'}\varphi=\sigma\varphi$ c'est à dire:

$$(\lambda' z^2+i\lambda z)\varphi''(z)+(i\lambda z^2+\mu z)\varphi'(z)=\sigma\varphi(z) \;;\quad \varphi\in E_0 \quad \text{et} \quad \sigma\in\mathbb{C}\;. \tag{3.3}$$

On réecrit (3.3) sous la forme:

$$\varphi''(z)+\frac{(i\lambda z+\mu)}{(\lambda' z+i\lambda)}\varphi'(z)=\frac{\sigma}{z(\lambda' z+i\lambda)}\varphi(z)\;. \tag{3.4}$$

Il découle de (3.4) que $z_0=0$ et $z_1=-i\lambda/\lambda'$ sont des points singuliers réguliers, de plus en ces points les équations caractéristiques sont respectivement: $s(s-1)=0$ et $s[s+\lambda/\lambda'(\lambda/\lambda'+\mu/\lambda)-1]=0$.

De la théorie de Fuchs [25], on déduit que les solutions $\varphi(z)$ de (3.3) qui sont holomorphes ont le comportement suivant:

$$\varphi(z)\approx z \quad \text{en} \quad z_0=0 \quad \text{et} \quad \varphi(z)\approx cte \quad \text{en} \quad z_1=-i\lambda/\lambda'\;. \tag{3.5}$$

Pour z au voisinage de l'infini, qui est un point singulier irrégulier posons dans (3.4) $\psi(z)=\varphi'(z)$, il en résulte que:

$$\psi'(z)=\frac{\sigma}{z(\lambda' z+i\lambda)}\varphi(z)-\frac{i\lambda z+\mu}{\lambda' z+i\lambda}\psi(z)\;.$$

En posant $\Phi(z)={}^t(\varphi(z),\psi(z))$, on obtient le système différentiel suivant:

$$\Phi'(z)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sigma}{z(\lambda' z+i\lambda)}\;, & -\dfrac{i\lambda z+\mu}{\lambda' z+i\lambda}\end{vmatrix}\Phi(z)\;. \tag{3.6}$$

Soit $z=re^{i\omega}$ avec $r\in[0,+\infty]$, $\omega\in[0,2\pi]$ et $W(r)=(\varphi(re^{i\omega}),\psi(re^{i\omega}))$. On a alors l'équation différentielle suivante:

$$W'(r)=e^{-i\omega}M(re^{i\omega})W(r)\;, \tag{3.7}$$

où

$$M(re^{i\omega})=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sigma}{re^{i\omega}(\lambda' re^{i\omega}+i\lambda)}\;, & -\dfrac{i\lambda re^{i\omega}+\mu}{\lambda' re^{i\omega}+i\lambda}\end{vmatrix}\;.$$

Soit $|||M|||$ une norme de la matrice M dans $\mathbb{C}$ comme $\|M(re^{i\omega})W(z)\|\leqq|||M|||\,\|W\|$, on en déduit que:

$$\|W'(r)\|\leqq|||M|||\,\|W(r)\|\;. \tag{3.8}$$

Pour $R>\lambda/\lambda'$ la norme $|||M|||$ est bornée en dehors du disque de rayon R et puisque $\dfrac{d}{dr}\|W(r)\|\leqq\|W'(r)\|$, on peut appliquer le lemme de Gronwal [5], ce qui conduit à l'inégalité suivante:

$$\forall r\in[R,+\infty[\;,\qquad \|\Phi(z)\|\leqq\sup_{\omega}\|W(\mathrm{R}e^{i\omega})\|e^{|||M|||(|z|-R)}\;, \tag{3.9}$$

en particulier on a: $|\varphi(z)| \leqq \sup_{\omega} \left\| W(\mathrm{Re}^{i\omega}) \right\| e^{|||M|||(|z|-R)}$. Il en résulte que φ appartient à l'espace de Bargmann E_0. C'est à dire, on a le lemme suivant:

Lemme. *Les solutions analytiques de $H_{\lambda'}\varphi = \sigma\varphi$ sont dans l'espace de Bargmann.*

On fait maintenant, une restriction à l'axe des imaginaires négatifs en posant: $u(y) = \varphi(-iy)$ avec $y \in [0, +\infty]$, alors l'équation différentielle ordinaire (3.3) s'ecrit:

$$-y(\lambda - \lambda' y)u''(y) + y(\lambda y + \mu)u'(y) = \sigma u(y) \;, \quad \text{où} \tag{3.10}$$

$u \in E_1 = \left\{ u : [0, +\infty[\to \mathbb{C} \text{ analytiques}; \int_0^{+\infty} e^{-y^2} |u(y)|^2 dy < +\infty \text{ et } u(0) = 0 \right\}$ et $\sigma \in \mathbb{C}$.

On remarque que l'intégrale ci-dessus est finie lorsque φ appartient à E_0 (Lemme 3 du premier paragraphe). On pose:

$$\varrho' = \lambda/\lambda' \;, \quad \varrho = \mu/\lambda \quad \text{avec} \quad \lambda' \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0 \;.$$

Soit $y \in [0, \varrho']$ avec $\varrho' > 0$, on multiplie l'équation (3.10) par $r(y)\bar{u}(y)$ [$r(y)$ sera déterminée plus loin]. On pose $s(y) = yr(y)$ et on intègre par parties sur l'intervalle $[0, \varrho']$, ce qui conduit à:

$$\begin{aligned}
&[s(y)(\lambda' y - \lambda)u'(y)\bar{u}(y)]_0^{\varrho'} - \int_0^{\varrho'} s(y)(\lambda' y - \lambda)|u'(y)|^2 dy \\
&\quad + \int_0^{\varrho'} \left[(\lambda y + \mu)s(y) - \frac{d}{dy}((\lambda' y - \lambda)s(y)) \right] u'(y)\bar{u}(y) dy \\
&= \sigma \int_0^{\varrho'} r(y)|u(y)|^2 dy \;.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

On choisit $s(y)$ tel que $\frac{d}{dy}((\lambda' y - \lambda)s(y)) = (\lambda y + \mu)s(y)$; on obtient:

$s(y) = ce^{\varrho' y}|y - \varrho'|^{\varrho'(\varrho + \varrho') - 1}$ où c est une constante.

Lorsque $\varrho'(\varrho + \varrho') \geqq 1$, la fonction $y \to s(y)$ est bornée ce qui entraine:

$$[s(y)(\lambda' y - \lambda)u'(y)\bar{u}(y)]_0^{\varrho'} = 0 \;.$$

Il en résulte que:

$$-\int_0^{\varrho'} s(y)(\lambda' y - \lambda)|u'(y)|^2 dy = \sigma \int_0^{\varrho'} r(y)|u(y)|^2 dy \;. \tag{3.12}$$

L'équation (3.12) signifie que $H_{\lambda'}$ est un opérateur symétrique sur l'espace $L_2\,[(0, \varrho'), r(y)dy]$.

Soit $E_2 = \{v \in L_2\,[(0, \varrho'), r(y)dy];\ H_{\lambda'}v \in L_2\,[(0, \varrho'), r(y)dy] \text{ et } v(0) = 0\}$.

Alors l'espace des restrictions des èléments du domaine de $H_{\lambda'}$ en tant qu'opérateur sur E_0 est inclus dans E_2.

De l'équation (3.12), on déduit que, pour $\varrho'(\varrho + \varrho') \geqq 1$ les valeurs propres de $H_{\lambda'}$ sont reélles.

Il nous reste à montrer qu'elles sont simples; pour ce faire, considérons l'espace $L_2\,[(0,\varrho'), r(y)dy]$; sur cet espace l'expression de $H_{\lambda'}$ n'est autre que:

$$H_{\lambda'}u(y)=\frac{1}{r(y)}\,(-\lambda' y(\varrho'-y)r(y)u'(y))' \ . \tag{3.13}$$

Posons $p(y)=\lambda' y(\varrho'-y)r(y)$, on a:

$$\psi H_{\lambda'}\varphi=\frac{\psi}{r}\,(p\varphi')' \quad \text{et} \quad \varphi H_{\lambda'}\psi=\frac{\varphi}{r}\,(p\psi')' \ ,$$

alors

$$r\,[\psi H_{\lambda'}\varphi-\varphi H_{\lambda'}\psi]=\psi(p\varphi')'-\varphi(p\psi')'=[p(\psi\varphi'-\varphi\psi')]'$$

si $H_{\lambda'}\varphi=\sigma\varphi$ avec $\varphi\neq 0$ et $H_{\lambda'}\psi=\sigma\psi$ avec $\psi\neq 0$, on en déduit que: $[p(\psi\varphi'-\varphi\psi')]$ est constante, et comme cette expression s'annule à l'origine il en résulte que $\psi\varphi'-\varphi\psi'\equiv 0$, ψ est donc proportionnelle à φ, c'est à dire l'espace propre associé à la valeur propre σ est de dimension un.

Montrons maintenant, qu'il n'y a pas de bloc de Jordan, c'est à dire, montrons que:

$$\forall\sigma\in\sigma(H_{\lambda'}) \quad \text{on a} \quad \operatorname{Ker}(H_{\lambda'}-\sigma I)^2=\operatorname{Ker}(H_{\lambda'}-\sigma I) \ .$$

Pour ce faire, supposons qu'il existe $\psi\in\operatorname{Ker}(H_{\lambda'}-\sigma I)$ tel que:

$$\frac{1}{r}\,(p\varphi')'=\sigma\varphi \quad \text{et} \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{r}\,(p\psi')'=\sigma\psi+\varphi \ . \tag{3.15}$$

En multipliant (3.14) par $r\bar{\psi}$ et (3.15) par $r\bar{\varphi}$, puis en intègrant les deux équations sur $[0,\varrho']$ on obtient:

$$\int_0^{\varrho'}(p\varphi')'\bar{\psi}dy=\sigma\int_0^{\varrho'}r\varphi\bar{\psi}dy \quad \text{et} \quad \int_0^{\varrho'}(p\psi')'\bar{\varphi}dy=\sigma\int_0^{\varrho'}r\bar{\varphi}\psi dy+\int_0^{\varrho'}r|\varphi|^2dy \ .$$

Il en résulte, aprés intégration par parties que:

$$\int_0^{\varrho'}p\varphi'\bar{\psi}'dy=\sigma\int_0^{\varrho'}r\varphi\bar{\psi}dy \quad \text{et} \quad \int_0^{\varrho'}p\psi'\bar{\varphi}'dy=\sigma\int_0^{\varrho'}r\psi\bar{\varphi}dy+\int_0^{\varrho'}r|\varphi|^2dy \ .$$

Si on calcule la différence de ces deux dernières équations on obtient:

$$\int_0^{\varrho'}p\,[\varphi'\bar{\psi}'-\psi'\bar{\varphi}']dy=\sigma\int_0^{\varrho'}r(\varphi\bar{\psi}-\psi\bar{\varphi})dy-\int_0^{\varrho'}r|\varphi|^2dy \ . \tag{3.16}$$

D'où

$$2i\int_0^{\varrho'}\operatorname{Im}(\varphi'\bar{\psi}')dy=2i\sigma\int_0^{\varrho'}\operatorname{Im}(\varphi\bar{\psi})dy-\int_0^{\varrho'}r|\varphi|^2dy \ . \tag{3.17}$$

Comme p est une fonction reélle et $\sigma\in\mathbb{R}$, on en déduit de (3.17) que $\int_0^{\varrho'}r|\varphi|^2dy\equiv 0$ ce qui est impossible, par conséquent, les valeurs propres de $H_{\lambda'}$ sont simples; ce qui achève la démonstration.

Maintenant, on va appliquer un résultat fin de Lidskii pour montrer l'existence d'un ensemble total de fonctions propres de $H_{\lambda'}$ avec $\lambda' \neq 0$. D'une façon précise on a:

Proposition 8. *Soient $\lambda' > 0$ et $\lambda'^2 \leqq \mu\lambda' + \lambda^2$, on cosidère le problème de Cauchy: $u'(t) + H_{\lambda'}u(t) = 0$, $u(0) = \varphi$ et $t > 0$; alors on a:*

$$u(t) \approx \sum_k \frac{\langle \varphi, \varphi_k^* \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k^* \rangle} e^{-\sigma_k t} \varphi_k \quad où \quad \varphi_k \in D(H_{\lambda'}) \ , \qquad \varphi_k^* \in D(H_{\lambda'}^*) \ ,$$

$$H_{\lambda'} \varphi_k = \sigma_k \varphi_k \quad et \quad H_{\lambda'}^* \varphi_k^* = \sigma_k \varphi_k^* \ .$$

La démonstration de cette proposition (énoncée dans [14]) repose sur un théorème fin de Lidskii qu'on donnera ci-dessous sous forme simplifiée.

Théorème de Lidskii [19], Théorème 3, p. 208]. *Soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T)$ dense dans un Hilbert B et à résolvante compacte, on suppose que les valeurs propres de T sont simples et que zéro n'est pas valeur propre. Soit le problème de Cauchy:*

$$u'(t) + Tu(t) = 0 \ , \qquad u(0) = \varphi \quad et \quad t > 0 \ . \tag{3.18}$$

Si T vérifie les deux conditions suivantes:

i) *$\exists p$; $0 < p < 1$ et $\sum_k |\alpha_k|^p$ converge où α_k, $k = 1, \ldots$ sont les valeurs propres de $(T^{*-1}T^{-1})^{1/2}$.*

ii) *$\exists \varepsilon > 0$; $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \operatorname{Arg} \langle T\varphi, \varphi \rangle \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $\forall \varphi \in D(T)$.*

Alors. 1) *Le problème (1.18) est bien posé.*

2) *La solution $u(t)$ du problème de Cauchy (3.18) est limite de sommes partièlles de l'expression:*

$$\sum_k \frac{\langle \varphi, \varphi_k^* \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k^* \rangle} e^{-\beta_k t} \varphi_k \quad où \quad \varphi_k \in D(T) \ , \qquad \varphi_k^* \in D(T^*)$$

$$T\varphi_k = \beta_k \varphi_k \quad et \quad T^* \varphi_k^* = \beta_k \varphi_k^* \ .$$

Pour notre problème de Cauchy, on pose:

$\tilde{H}_{\lambda'} = H_{\lambda'} + \beta_0 I$ et $H_1 = \lambda' S + \mu A^* A + \beta_0 I$ où $\beta_0 > 0$ tel que $\tilde{H}_{\lambda'}$ et H_1 soient inversibles. On peut aussi écrire $\tilde{H}_{\lambda'} = H_1 + iH_2$ avec $H_2 = \lambda A^*(A + A^*)A$.

Alors la verification des hypothèses du théorème de Lidskii repose sur le:

Lemme 8. *Soit $\lambda' > 0$ et $\tilde{H}_{\lambda'} = H_1 + iH_2$ alors on a:*

i) *Il existe $c > 0$; $|\langle H_2\varphi, \varphi \rangle| \leqq c|\langle H_1\varphi, \varphi \rangle|$ $\forall \varphi \in D(s)$.*

ii) *L'operateur $(I + iH_2H_1^{-1})$ est inversible.*

iii) *$\exists \varepsilon > 0$; $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \operatorname{Arg} \langle \tilde{H}_{\lambda'}\varphi, \varphi \rangle \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $\forall \varphi \in D(H_{\lambda'})$.*

iv) *La série $\sum_k |\alpha_k|^p$ où α_k, $k = 1, \ldots,$ désigne la suite des valeurs propres de l'opérateur compact hermitien positif $(\tilde{H}_{\lambda'}^{*-1} \tilde{H}_{\lambda'}^{-1})^{1/2}$ est convergente $\forall p > 1/2$. (On dit que $\tilde{H}_{\lambda'}^{-1}$ appartient à la classe $lp(E_0)$ de Carleman.)*

Démonstration du lemme. (i) et (ii) découle du Lemme (6).

iii) découle de (i).

iv) Comme $\tilde{H}_{\lambda'}^{-1}=H_1^{-1}(I+iH_2H_1^{-1})^{-1}$, et soient α_k les valeurs propres de $(\tilde{H}_{\lambda'}^{*-1}\tilde{H}_{\lambda'}^{-1})^{1/2}$ et $\gamma_k, k=1,\dots$, celles de H_1^{-1}. Puisque l'opérateur $(I+iH_2H_1^{-1})^{-1}$ est borné par une constante c, il est connu en appliquant le théorème du minimax ([8], Gohberg-Krein, p. 27), que $\alpha_k \leqq c\gamma_k$.

Comme $H_1=\lambda' A^{*2}A^2+\mu A^*A+\beta_0 I$ est auto-adjoint et que la famille $e_k(z)=\{z^k/\sqrt{k!}\}$ forme une base de fonctions propres de H_1 associées aux valeurs propres $\omega_k=\lambda' k(k-1)+\mu k+\beta_0 I$ on déduit que $\gamma_k=1/\omega_k \approx 1/k^2$, il en résulte que:

$$\sum_k \alpha_k^p < +\infty \ \forall p > 1/2 \ .$$

Quant à l'opérateur limite $H_{\mu,\lambda}$ $(\lambda'=0)$, il a été étudié dans [11, 12, 1].

Nous commençons par résumer quelques propriétés spectrales de $H_{\mu,\lambda}$ étudiées dans [11, 12].

1) *Propriétés de* $H_{\mu,\lambda}$. a) $H_{\mu,\lambda}=\lambda H_{\mu/\lambda}$ où on a noté H_μ au lieu de $H_{\mu,1}$.

b) Pour $\mu \neq 0$, $H_{\mu,\lambda}$ est la fermeture de sa restriction aux polynômes.

c) Pour $\mu \neq 0$, $H_{\mu,\lambda}$ a un inverse compact.

d) $H_{\mu,-\lambda}=H_{\mu,\lambda}^*$.

e) Les valeurs propres de $H_{\mu,\lambda}$ sont reélles.

f) Pour $\mu>0$, $\mathrm{Re}\langle H_{\mu,\lambda}\varphi,\varphi\rangle \geqq \mu\|\varphi\|^2$, pour $\mu<0$, $\mathrm{Re}\langle H_{\mu,\lambda}\varphi,\varphi\rangle \leqq \mu\|\varphi\|^2$.

Dans la suite nous indiquons une démonstration de ces propriétés. Notons par $H_{\mu,\lambda}^{\min}$ la fermeture de $H_{\mu,\lambda}$ aux polynômes P_0 et par $D_{\min}$ son domaine.

Soit $\mu>0$ alors on a pour $\varphi \in D_{\min}$:

$$\mathrm{Re}\langle H_{\mu,\lambda}\varphi,\varphi\rangle = \mu\|A\varphi\|^2 \geqq \mu\|\varphi\|^2 \ . \tag{3.19}$$

L'inégalité (3.19) serait fausse si on n'avait pas éliminé les fonctions constantes. En se restreignant à E_0, cette inégalité deviendra la propriété (f) lorsque nous démontrons (b). De (3.19), on déduit d'une part que $D_{\min}$ est contenu dans le domaine de A, en particulier son injection dans E_0 est compacte (quand on munit $D_{\min}$ de la norme du graphe), et d'autre part que $H_{\mu,\lambda}^{\min}$ est injectif et que son image est fermée.

Nous allons maintenant démontrer que $H_{\mu,\lambda}^{\min}$ est inversible, pour ce faire, on montre que son image est dense et pour cela que son adjoint est injectif. On vérifie que cet adjoint n'est autre que $H_{\mu,-\lambda}$.

Les seules fonctions nulles à l'origine que $H_{\mu,\lambda}$ annule sont les

$$c\int_0^z e^{-\xi^2/2+i\mu/\lambda\xi}d\xi \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 \ .$$

On vérifie facilement que ces fonctions n'appartiennent pas à l'espace de Bargmann.

$H_{\mu,\lambda}^{\min}$ est donc inversible et $H_{\mu,\lambda}$ en est une extension injective. Il en est que $H_{\mu,\lambda}=H_{\mu,\lambda}^{\min}$. La propriété (c) en résulte puisque nous avons vu que $H_{\mu,\lambda}$ est inversible et que l'injection de son domaine dans E_0 est compacte.

La démonstration de la propriété (e) repose sur trois lemmes:

Lemme 9. *Soient $\lambda'>0$ et $\mu>0$, alors les images de la boule unité par $H_{\lambda'}^{-1}$ sont contenues dans un compact de E_0 indépendament de λ'.*

Démonstration. Soit $H_{\lambda'}=\lambda' S+H$ où $S=A^{*2}A^2$ et $H=\mu A^*A+i\lambda A^*(A+A^*)A$. On considère ici $H_{\lambda'}$ comme une perturbation de H. On a:

$\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}\varphi,\varphi\rangle=\lambda'\|A^2\varphi\|^2+\mu\|A\varphi\|^2$; pour $\lambda'>0$, on en déduit que:

$\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}\varphi,\varphi\rangle|\geqq\mu\|A\varphi\|^2$, en appliquant l'inégalité de Cauchy on obtient:

$|\mu|\,\|A\varphi\|^2\leqq\|H_{\lambda'}\varphi\|\,\|\varphi\|$ et comme $\|\varphi\|\leqq\|A\varphi\|$, il en résulte que:

$\|A\varphi\|\leqq 1/|\mu|\,\|H_{\lambda'}\varphi\|$, on en déduit que:

$$\|AH_{\lambda'}^{-1}\Psi\|\leqq 1/|\mu|\,\|\Psi\| \; . \tag{3.20}$$

Ce qui prouve que les images de la boule unité par $H_{\lambda'}^{-1}$ sont contenues dans un compact fixe indépendament de λ'.

Lemme 10. *Soit P_0 l'ensemble des polynomes en z qui s'annulent à l'origine alors $H(P_0)$ est dense dans E_0.*

Démonstration. Soit $\psi\in E_0$, comme H est surjectif, il existe $\varphi\in D(H)$ tel que $H\varphi=\psi$, d'autre part, comme $D_{\min}=D(H)$, il existe une suite de polynômes $p_n\in P_0$ tels que $p_n\to\varphi$ et il existe $\psi_1\in E_0$ de sorte que $Hp_n\to\psi_1$.

Au sens des distributions, on a $Hp_n\to H\varphi=\psi$ d'où $\psi=\psi_1$.

En combinant les deux lemmes précédents, on obtient le résultat ci-dessus.

Lemme 11. *Pour $\mu>0$, on a:*

$$H_{\lambda'}^{-1}\to H^{-1} \quad \textit{quand} \quad \lambda'\to 0 \quad [\textit{en norme}] \; .$$

Démonstration. Comme $H(P_0)$ est dense dans E_0, il suffit de montrer la convergence simple sur $H(P_0)$. Soit $\varphi\in H(P_p)$, il existe $p\in P_0$ tel que $Hp=\varphi$, on obtient alors:

$H_{\lambda'}^{-1}Hp-p=\psi_{\lambda'}$ et $H_{\lambda'}\psi_{\lambda'}=-\lambda' Sp$ d'où:

$\|H_{\lambda'}\psi_{\lambda'}\|=|\lambda'|\,\|Sp\|$, il en résulte que $\|\psi_{\lambda'}\|=|\lambda'|\,\|H_{\lambda'}^{-1}Sp\|$ et d'aprés l'inégalité (3.20) on obtient: $\|\psi_{\lambda'}\|\leqq|\lambda'|/|\mu|\,\|Sp\|$.

Il en résulte que:

$\operatorname{Lim}\|\psi_{\lambda'}\|=0$ quand $\lambda'\to 0$ et par conséquent on a la convergence simple. Pour montrer la convergence uniforme, on rappelle que $D(A)$ s'injecte dans E_0 de façon compacte et comme $\|AH_{\lambda'}^{-1}\psi\|\leqq 1/|\mu|\,\|\psi\|$, la convergence est uniforme sur $D(A)$. Puisque ce dernier est dense dans E_0.

Il en découle que $H_{\lambda'}^{-1}\to H^{-1}$ quand $\lambda'\to 0$ [en norme]. Pour achever la démonstration de la propriété (c), il suffit de rappeler qu'on avait montré que les valeurs propres de $H_{\lambda'}$ sont reélles pour $\lambda/\lambda'(\lambda/\lambda'+\mu/\lambda)\geqq 1$, il résulte alors du lemme précédent que celles de H le sont aussi.

L'étude de la plus petite valeur propre de $H_{\mu,\lambda}$, en particulier son existence a été faite dans [11] et [1], nous rappelons ci-dessus certains résultats de [1].

2) *Méthode de T. Ando et M. Zerner.* La méthode de T. Ando et M. Zerner consiste à expliciter l'inverse de H sur l'axe des imaginaires purs négatifs.

L'opérateur intégral est donné par:

$$H^{-1}\psi(-iy)=\int_0^{+\infty} K_\mu(y,s)\psi(-is)\,ds$$

où

$$K_\mu(y,s)=\frac{1}{\lambda s}\operatorname{Exp}\left(\frac{-s^2}{2}-\frac{\mu}{\lambda}s\right)\int_0^{\min(y,s)}\operatorname{Exp}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{\mu}{\lambda}u\right)du \tag{3.21}$$

Soit $L_2\,[[0,+\infty[,e^{-x^2-2\omega x}dx]$, espace des fonctions de carré integrable par rapport à la mesure $e^{-x^2-2\omega x}dx$.

Certains résultats de T. Ando et M. Zerner sont résumés dans la proposition suivante:

Proposition 9 (Ando et Zerner [1]).

i) *Pour tout μ de partie reélle au moins égale à ω, H^{-1} s'étend en un opérateur de Hilbert-Schmidt de $L_2[[0,+\infty[,e^{-x^2-2\omega x}dx]$ dans lui même.*

ii) *Pour $\mu>0$, H possède au moins une valeur propre. Soit $\sigma_0(\mu)$ la plus petite de ces valeurs propres, elle est simple et la fonction σ_0 se prolonge en une fonction analytique réelle positive et croissante.*

Conséquences. L'analyticité de σ_0 par rapport à μ permet de prolonger les éléments de la matrice de Diffusion de façon analytique par rapport à μ. Le comportement asymptotique de la section éfficace aux hautes énergies serait alors $s^{\sigma_0(\mu)}$, $\sigma_0(\mu)$ donnée par ce prolongement analytique (s est l'énergie).

Pour une discution du rapport de ces résultats avec la théorie physique, on pourra se reporter à Intissar et al. [13].

3) *Comportement asymptotique de e^{-tH} pour $t\to+\infty$.* Nous terminons ce paragraphe par la démonstration de certains résultats énoncés dans [12].

Pour $\mu>0$, nous rappelons que le problème de Cauchy $u'(t)=-Hu(t)$ avec $u(0)=\varphi$ est bien posé et que e^{-tH} est un semi-groupe compact vérifiant la relation suivante:

$$\sigma(e^{-tH})=e^{-t\sigma(H)}\cup\{0\}\ .$$

Nous avons la proposition suivante:

Proposition 10. *Soient σ_0 et σ_1 désignant respectivement la plus petite et la seconde valeur propre de H alors:*

i) $\|e^{-tH}\|=e^{-\sigma_0 t}+o(e^{-\varepsilon t})$ *pour tout* $\varepsilon<\sigma_1$.

ii) $\langle e^{-tH}\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\varphi_0^*\rangle\langle\varphi_0,\psi\rangle e^{-\sigma_0 t}+O(e^{-\sigma_0 t})$ *pour tout $\varphi\in E_0$ et pour tout $\psi\in E_0$ où φ_0 est la fonction propre de H associeé à σ_0 et φ_0^* est la fonction propre de H^* associée à σ_0 telle que $\langle\varphi_0,\varphi_0^*\rangle=1$.*

Démonstration. i) Soit σ_0, la plus petite valeur propre de H. Comme elle est simple, alors il existe $\varphi_0\neq 0$, fonction propre associée à σ_0, qui engendre un espace F_0 de dimension un. Désormais, on prend $\|\varphi_0\|=1$; alors il existe un sous espace F_1 supplémentaire de F_0 tel que:

$$\varphi_0\notin F_1\ ,\qquad E_0=F_0\oplus F_1\quad\text{et}\quad e^{-tH}F_1\subset F_1\ .$$

Soit P la projection de E_0 sur F_0 et $Q=I-P$ la projection de E_0 sur F_1, alors on peut écrire:

$$\forall\varphi\in E_0\ ,\qquad \varphi=P\varphi+Q\varphi=c_1\varphi_0+Q\varphi\ ,\qquad \text{d'où:}\quad e^{-tH}\varphi=c_1e^{-\sigma_0 t}\varphi_0+e^{-tH}Q\varphi\ .$$

Dans la suite on cherche une majoration de $\|e^{-tH}Q\varphi\|$. Comme e^{-tH} est une opérateur compact on a:

$r(e^{-tH}|_{F_1})=e^{-\sigma_1 t}$; où $r(e^{-tH}|_{F_1})$ désigne la rayon spectral de l'opérateur $e^{-tH}|_{F_1}$ et σ_1 désigne la seconde valeur propre de H [6].

Posons maintenant, $t=n+s$, où n est la partie entière de t donc $0\leqq s<1$, on en déduit que:

$$\|e^{-tH}|_{F_1}\| = \|e^{-nH}e^{-sH}|_{F_1}\| \leqq \|e^{-nH}|_{F_1}\| \ .$$

Comme $\lim \|e^{-nH}|_{F_1}\|^{1/n}=e^{-\sigma_1}$ quand n tend vers l'infini, il en résulte que:
$\|e^{-nH}|_{F_1}\|^{1/n}=e^{-\sigma_1}+\omega_n$ avec $\omega_n\to 0$ quand $n\to+\infty$. On a aussi:

$$\|e^{-nH}|_{F_1}\| = e^{-n\sigma_1}(1+e^{\sigma_1}\omega_n)^n = e^{-n\sigma_1}(1+\omega_n')^n \quad \text{avec} \quad \omega_n'=e^{\sigma_1}\omega_n \ .$$

Soit $\varepsilon<\sigma_1$, on peut ecrire:

$$\begin{aligned} e^{-n\sigma_1}(1+\omega_n')^n &= e^{-\varepsilon t+\varepsilon t-n\sigma_1}(1+\omega_n')^n \\ &= e^{-\varepsilon t+n\varepsilon+s\varepsilon-n\sigma_1}(1+\omega_n')^n \\ &= e^{-\varepsilon t}e^{n(\varepsilon-\sigma_1)}e^{s\varepsilon}(1+\omega_n')^n \ . \end{aligned}$$

On a donc:

$$\|e^{-tH}|_{F_1}\| \leqq \|e^{-nH}|_{F_1}\| = e^{-\varepsilon t}e^{n(\varepsilon-\sigma_1)}e^{s\varepsilon}(1+\omega_n')^n \ .$$

Il en résulte que:

$\lim \operatorname{Log}\,[e^{-s\varepsilon}e^{\varepsilon t}\|e^{-tH}|_{F_1}\|]=-\infty$ quand $t\to+\infty$ d'où: $\lim e^{\varepsilon t}\|e^{-tH}|_{F_1}\|=0$ lorsque $t\to+\infty$.

ii) Il suffit d'écrire $\langle e^{-tH}\varphi,\psi\rangle=\langle e^{-tH}P\varphi,\psi\rangle+\langle e^{-tH}Q\varphi,\psi\rangle$. Comme $|\langle e^{-tH}Q\varphi,\psi\rangle|\leqq c_1 e^{-\varepsilon t}$ avec $\varepsilon<\sigma_1$, il en résulte que:

$$|\langle e^{-tH}\varphi,\psi\rangle| = ce^{-\sigma_0 t}+o(e^{-\sigma_0 t}) \ \forall\varphi\in E_0 \ , \qquad \forall\psi\in E_0$$

et

$$c=\langle\varphi,\varphi_0^*\rangle\langle\varphi_0,\psi\rangle \ .$$

4. Quelques propriétés spectrales de $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$; $\lambda'=0$ ou $\alpha=0$

Dans ce paragraphe, on étend d'abord les résultats principaux du Sect. 2 au cas $\lambda'=0$ et $|\alpha|<\mu/2$. On aborde ensuite le cas $\alpha=0$ dans ce dernier cas l'opérateur $H_{\lambda',\mu,\lambda,0}$ peut s'écrire:

$$H=\sum_{j=1}^{N} H_j \text{ où } H_j \text{ n'opère que sur la variable } z_j \ .$$

L'utilisation d'un résultat fin de Ira Herbst sur les produits tensoriels des semi-groupes et leurs générateurs infinitésimaux permet alors de donner une description complète du spectre.

A] *Etude de:*

$$H=\sum_j^N [\mu A_j^*A_j+i\lambda A_j^*(A_j+A_j^*)A_j]+\alpha\sum_j^{N-1}(A_{j+1}^*A_j+A_j^*A_{j+1}) \ .$$

Okazawa a été amené à étudier une famille d'opérateurs de la forme: $1/nS+T$, $n=1,2\ldots$.

Proposition d'Okazawa (Proposition 11, p. 21, [22]). *Soit T un opérateur linéaire sur un Hilbert B, soit S un opérateur linéaire de domaine $D(S)$ tel que $D(S)\subset D(T)$. On suppose que:*

$(*)$ $\exists\beta\in\mathbb{C}$; *Image* $(1/nS+T+\beta I)=B$ *c'est à dire:*

$$\forall\psi\in B\exists\varphi_n\in D(S)\ ;\quad 1/nS\varphi_n+T\varphi_n+\beta\varphi_n=\psi\ .$$

$(**)$ $\forall\psi\in B$, *les suites* $\{\|\varphi_n\|\}$ *et* $\{\|T\varphi_n\|\}$ *sont bornées. Alors* $(T+\beta I)D(S)$ *est dense dans B.*

Pour nos opérateurs $H_{\lambda'}$ et H, la vérification des hypothèses de la proposition d'Okazawa repose sur les deux lemmes suivants:

Lemme 12. *Soient $\mu>0$, $|\alpha|<\mu/2$ et $H^{\min}=H$ de domaine $D_{\min}$, alors on a:*

i) $\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle\geqq 0$ *et* $\|\varphi\|\leqq\dfrac{1}{\mu-2|\alpha|}\ \|H\varphi\|\ \forall\varphi\in D_{\min}$.

ii) *L'opérateur H est à image fermée.*

iii) *$D_{\min}$ s'injecte dans E_0 de façon compacte.*

Démonstration. i) Soit $\varphi\in D_{\min}$, on a:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle=\mu\sum_{j=1}^{N}\|A_j\varphi\|^2+\alpha\sum_{j=1}^{N-1}\langle(A_{j+1}^*A_j+A_j^*A_{j+1})\varphi,\varphi\rangle$$

$$\geqq(\mu-2|\alpha|)\sum_{j=1}^{N}\|A_j\varphi\|^2\ .$$

Pour $\mu>0$ et $|\alpha|<\mu/2$, on déduit que:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle\geqq(\mu-2|\alpha|)\sum_{j=1}^{N}\|A_j\varphi\|^2\geqq(\mu-2|\alpha|)\|\varphi\|^2\ . \tag{4.1}$$

D'où $\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle\geqq 0$ et $\|\varphi\|\leqq\dfrac{1}{\mu-2|\alpha|}\ \|H\varphi\|\ \forall\varphi\in D_{\min}$.

ii) De l'inégalité (4.1) on déduit que l'image de H est fermée.

iii) Classique.

Lemme 13. *Pour $\mu>0$ et $|\alpha|<\mu/2$, il existe une constante $b>0$ telle que:*

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi,S\varphi\rangle\geqq -b\|S\varphi\|\ \|\varphi\|\ .$$

Démonstration. On commence par remarquer que:

$$\left|\operatorname{Re}\left\langle\sum_{j=1}^{N-1}(A_{j+1}^*A_j+A_j^*A_{j+1})\varphi,\ \sum_{j=1}^{N}A_j^{*2}A_j^2\varphi\right\rangle\right|$$

$$\leqq 2\left\langle\sum_{j=1}^{N}A_j^*A_j\varphi,\ \sum_{j=1}^{N}A_j^{*2}A_j^2\varphi\right\rangle\ .$$

Il en résulte que:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi, S\varphi\rangle \geqq (\mu-2|\alpha|)\left\langle \sum_{j=1}^{N} A_j^* A_j\varphi, S\varphi\right\rangle$$

$$-\lambda \operatorname{Im}\left\langle \sum_{j=1}^{N-1} (A_j^*(A_j+A_j^*)A_j)\varphi, S\varphi\right\rangle$$

$$\geqq (\mu-2|\alpha|)\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\langle A_j^* A_j\varphi, A_l^{*2}A_l^2\varphi\rangle$$

$$-\lambda \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\operatorname{Im}\langle (A_j^*(A_j+A_j^*)A_j)\varphi, A_l^{*2}A_l^2\varphi\rangle \ .$$

Commençons par simplifier ces dernières expressions; pour $l=j$ on a:

$$\langle A_j^* A_j\varphi,\ A_j^{*2}A_j^2\varphi\rangle = \|A_j^* A_j^2\varphi\|^2 + \|A_j^2\varphi\|^2$$

$$\operatorname{Im}\langle A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\varphi,\ A_j^{*2}A_j^2\varphi\rangle = -2\operatorname{Im}\langle A_j^* A_j\varphi,\ A_j^* A_j^2\varphi\rangle \ .$$

Pour $l\neq j$ on a:

$$\langle A_j^* A_j\varphi,\ A_l^{*2}A_l^2\varphi\rangle = \|A_j A_l^2\varphi\|^2 \ , \qquad \operatorname{Im}\langle A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\varphi,\ A_l^{*2}A_l^2\varphi\rangle = 0 \ .$$

D'où:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi, S\varphi\rangle \geqq \sum_{j=1}^{N}\ [(\mu-2|\alpha|)(\|A_j^* A_j^2\varphi\|^2 + \|A_j^2\varphi\|^2)$$

$$-2|\lambda|\ \|A_j^* A_j\varphi\|\ \|A_j^* A_j^2\varphi\|] \ .$$

En appliquant l'ε-inégalité au couple $(\|A_j^* A_j\varphi\|, \|A_j^* A_j^2\varphi\|)$ on obtient:
$2\|A_j^* A_j\varphi\|\ \|A_j^* A_j^2\varphi\| \leqq 1/\varepsilon\|A_j^* A_j\varphi\|^2 + \varepsilon\|A_j^* A_j^2\varphi\|^2$ et comme $\|A_j^*\varphi\|^2 \leqq 2\|A_j\varphi\|^2\ \forall j\in[1,N]$, on en déduit:
$2\|A_j^* A_j\varphi\|\ \|A_j^* A_j^2\varphi\| \leqq 2/\varepsilon\|A_j^2\varphi\|^2 + \varepsilon\|A_j^* A_j^2\varphi\|^2$. Il en résulte que:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi, S\varphi\rangle \geqq \sum_{j=1}^{N}\ [(\mu-2|\alpha|-2|\lambda|\varepsilon)\|A_j^* A_j^2\varphi\|^2$$

$$+(\mu-2|\alpha|-4|\lambda|/\varepsilon)\|A_j^2\varphi\|^2] \ .$$

En choisissant $\varepsilon \leqq \dfrac{\mu-2|\alpha|}{2|\lambda|}$, on obtient:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi, S\varphi\rangle \geqq (\mu-2|\alpha|-4|\lambda|/\varepsilon)\sum_{j=1}^{N}\|A_j^2\varphi\|^2$$

$$\geqq (\mu-2|\alpha|-4|\lambda|/\varepsilon)\langle S\varphi, \varphi\rangle \ .$$

On en déduit donc:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi, S\varphi\rangle \geqq -b\|S\varphi\|\ \|\varphi\| \quad \text{avec} \quad b = |(\mu-2|\alpha|-4|\lambda|/\varepsilon)| \ . \tag{4.2}$$

Proposition 11. *Soit $H_{\lambda'} = \lambda' S + H$, on suppose, $\mu > 0$ et $|\alpha| < \mu/2$.*

Alors les hypothèses $(*)$ et $(**)$ de la proposition d'Okazawa sont vérifiées.

Démonstration. Pour $\mu>0$ et $|\alpha|<\mu/2$, on a $\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle \geqq 0$ $\forall\varphi\in D_{\min}$. Soit $\lambda'>0$, alors $\operatorname{Re}\langle(\lambda' S+H)\varphi,\varphi\rangle\geqq 0$. Comme $H_{\lambda'}=\lambda' S+H$ est un opérateur à résolvante compacte et son ensemble résolvant $\varrho(H_{\lambda'})$ contient $]-\infty,0]$, $\forall\lambda'>0$ il éxiste un réel β_0 indépendant de λ', tel que $H_{\lambda'}+\beta_0 I$ soit inversible. C'est à dire:

$$\forall\psi\in E_0\ ,\qquad \exists\varphi\in D(S)\ ;\qquad (\lambda' S+H+\beta_0 I)\varphi=\psi\ , \tag{4.3}$$

d'où la première hypothèse (*) de la proposition d'Okazawa.

Pour vérifier l'hypothèse (**), on déduit de (4.3) que $\varphi=(\lambda' S+H+\beta_0 I)^{-1}\psi$ et comme $\|(\lambda' S+H+\beta_0 I)^{-1}\|$ est borné indépendament de λ', il est de même pour $\|\varphi\|$. Il nous reste à vérifier que $\|H\varphi\|$ est aussi borné indépendament de λ', pour ce faire, considérons l'expression $\|\lambda' S\varphi\|^2$. On a:

$$\|\lambda' S\varphi\|^2=\langle\lambda' S\varphi,\lambda' S\varphi\rangle=\lambda'\langle\lambda' S\varphi,S\varphi\rangle\ .$$

En appliquant l'inégalité du lemme précédent, on a:

Pour $\lambda'>0$, $\lambda' \operatorname{Re}\langle H\varphi,S\varphi\rangle+\lambda' b\|S\varphi\|\,\|\varphi\|\geqq 0$, il en résulte que:

$$\|\lambda' S\varphi\|^2\leqq +\lambda'\langle\lambda' S\varphi,S\varphi\rangle+\lambda' \operatorname{Re}\langle H\varphi,S\varphi\rangle+\lambda' b\|S\varphi\|\,\|\varphi\|\ .$$

Soit $\beta_0>0$, alors pour $\psi=(\lambda' S+H+\beta_0 I)\varphi$ on a:

$$\begin{aligned}\|\lambda' S\varphi\|^2&\leqq\lambda' \operatorname{Re}\langle(\lambda' S+H+\beta_0 I)\varphi,S\varphi\rangle+\lambda' b\|S\varphi\|\,\|\varphi\|\\&\leqq\lambda'\|(\lambda' S+H+\beta_0 I)\varphi\|\,\|S\varphi\|+\lambda' b\|S\varphi\|\,\|\varphi\|\\&\leqq\lambda'\|\psi\|\,\|S\varphi\|+\lambda' b\|S\varphi\|\,\|\varphi\|\ ,\end{aligned}$$

d'où:

$$\|\lambda' S\varphi\|\leqq\|\psi\|+b\|\varphi\|\ . \tag{4.4}$$

Comme $\|\psi\|+b\|\varphi\|$ est borné indépendament de λ', il en est de même pour $\|\lambda' S\varphi\|$.

Finalement de (4.3) on déduit que $H\varphi=\psi-\lambda' S\varphi-\beta_0\varphi$ et par suite $\|H\varphi\|\leqq\|\psi\|+\|\lambda' S\varphi\|+\beta_0\|\varphi\|$. $\|H\varphi\|$ est donc borné indépendament de λ'. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Théorème 1. *Pour $\mu>0$, $|\alpha|<\mu/2$ et $\beta_0>0$ on a:*

1) *L'opérateur H est à résolvante compacte.*
2) *Le domaine minimal de H est égal à son domaine maximal.*
3) *Le spectre de H ne peut étre constitué que des valeurs propres.*
4) *Les images de la boule unité par $(H_{\lambda'}+\beta_0 I)^{-1}$ sont contenues dans un compact de E_0 indépendament de λ'*
5) *$(H_{\lambda'}+\beta_0 I)^{-1}$ converge en norme vers $(H+\beta_0 I)^{-1}$ lorsque λ' tend vers zéro.*
6) *$-H$ est générateur infinitésimal d'un semi groupe e^{-tH}; $t\geqq 0$.*
7) *e^{-tH} est un opérateur compact pour tout $t>0$.*
8) *$\sigma(e^{-tH})=e^{-t\sigma(H)}\cup\{0\}$.*

Démonstration. 1) Soient $\mu>0$, $|\alpha|<\mu/2$ et $\beta_0>0$.. De la proposition précédente et de la proposition d'Okazawa, on déduit que $(H+\beta_0 I)D(S)$ est dense dans E_0; comme $D(S)$ est inclus dans $D_{\min}$, il en résulte que $(H+\beta_0 I)D_{\min}$ est aussi dense dans E_0. Or $H^{\min}+\beta_0 I$ est à image fermée alors $H^{\min}+\beta_0 I$ est donc surjectif. On sait d'une part que $H^{\min}+\beta_0 I$ est injectif et d'autre part que $D_{\min}$ s'injecte dans

E_0 de façon compacte, il en découle alors que $H^{\min}$ est un opérateur à résolvante compacte.

2) Il suffit de faire le même raisonnement que pour le cas $\lambda' \neq 0$ de la Proposition (3).

3) Ce résultat est une conséquence de (1) et (2).

4) Soit $\varphi \in D(S)$, on a:

$$\operatorname{Re}\langle H_{\lambda'}\varphi, \varphi\rangle \geqq \lambda' \sum_{j=1}^{N} \|A_j^2\varphi\|^2 + (\mu - 2|\alpha|) \sum_{j=1}^{N} \|A_j\varphi\|^2 .$$

Pour $\lambda' > 0$, $\mu > 0$, $|\alpha| < \mu/2$ et $\beta_0 > 0$ on a:

$$\operatorname{Re}\langle (H_{\lambda'} + \beta_0 I)\varphi, \varphi\rangle \geqq (\mu - 2|\alpha|) \sum_{j=1}^{N} \|A_j\varphi\|^2 ,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{N} \|A_j\varphi\|^2 \leqq 1/(\mu - 2|\alpha|) \, \|(H_{\lambda'} + \beta_0 I)\varphi\| \cdot \|\varphi\|$$

c'est à dire:

$$\|\varphi\|_D \leqq 1/(\mu - 2|\alpha|) \, \|(H_{\lambda'} + \beta_0 I)\varphi\| \quad ; \qquad D = \bigcap_{j=1}^{N} D(A_j) ,$$

$$\|(\lambda' S + H + \beta_0 I)^{-1}\psi\|_D \leqq 1/(\mu - 2|\alpha|) \, \|\psi\|_{E_0} , \tag{4.5}$$

ce qui montre que les images de la boule unité par $(H_{\lambda'} + \beta_0 I)^{-1}$ sont contenues dans un compact indépendament de λ'.

5) Soit $\Phi \in (H + \beta_0 I) \, D(S)$, $\exists \varphi \in D(S)$ tel que $(H + \beta_0 I)\varphi = \Phi$, soit $\psi_{\lambda'} = (H_{\lambda'} + \beta_0 I)^{-1}(H + \beta_0 I)\varphi - \varphi$ on a:

$$(H_{\lambda'} + \beta_0 I)\psi_{\lambda'} = (H + \beta_0 I)\varphi - (H_{\lambda'} + \beta_0 I)\varphi = -\lambda' S\varphi .$$

Il en résulte que $\|(H_{\lambda'} + \beta_0 I)\psi_{\lambda'}\| = |\lambda'| \, \|S\varphi\|$ et par suite:

$$\|\psi_{\lambda'}\| \leqq |\lambda'| \, \|(\lambda' S + H + \beta_0 I)^{-1} S\varphi\| \leqq \frac{|\lambda'|}{\mu - 2|\alpha|} \, \|S\varphi\| .$$

On a donc lim $\|\psi_{\lambda'}\| = 0$ lorsque λ' tend vers zéro. En appliquant le théorème d'Ascoli, on déduit de l'inégalité (4.5) la convergence dans D.

La convergence en norme des opérateurs $(H_{\lambda'} + \beta_0 I)^{-1}$ vers $(H + \beta_0)^{-1}$ lorsque λ' tend vers zéro résulte alors de la densité de D dans E_0.

6) Pour $\mu > 0$ et $|\alpha| < \mu/2$ on a:

$\operatorname{Re}\langle (H + \beta I)\varphi, \varphi\rangle \geqq \beta \|\varphi\|^2$ $\forall \beta > 0$. Il en résulte que:

$$\|(H + \beta I)^{-1}\| \leqq 1/\beta \quad \forall \beta > 0 .$$

Comme $]-\infty, 0[\subset \varrho(H)$, il résulte du théorème de Hille-Yosida, que $-H$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, qu'on notera e^{-tH}.

7) La démonstration de cette propriété repose sur le lemme suivant (similaire au Lemme 7).

Lemme 7 bis. *Soient* $\mu>0$, $|\alpha|<\mu/2$ *et* $u'(t)=-Hu(t)$; $u(0)\in D$, *Alors:*

i) $\exists c>0$ *tel que* $\forall\varphi\in D(H^2)$, $\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle_D \geqq -c\|\varphi\|_D^2$.

ii) $\exists c>0$ *tel que* $\|u(t)\|_D \leqq e^{ct}\|u(0)\|_D$.

iii) $e^{-tH}\Phi\in L^2([0,T],D)$ $\forall\Phi\in E_0$.

iv) $e^{-tH}\Phi\in D$ $\forall t>0$ *et* $\Phi\in E_0$.

Démonstration. i) Soit $\varphi\in D(H^2)$, alors:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle_D \geqq (\mu-2|\alpha|)\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\langle A_l A_j^* A_j\varphi, A_l\varphi\rangle$$
$$-|\lambda|\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\operatorname{Im}\langle A_l A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\varphi, A_l\varphi\rangle \ .$$

Pour $l\neq j$ on a $\operatorname{Im}\langle A_l A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\varphi, A_l\varphi\rangle=0$. Pour $l=j$ on a $\operatorname{Im}\langle A_j A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\varphi, A_j\varphi\rangle=\operatorname{Im}\langle A_j^* A_j\varphi, A_j\varphi\rangle$, d'où:

$$|\operatorname{Im}\langle A_l A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\varphi, A_l\varphi\rangle| \leqq \|A_j^* A_j\varphi\|\cdot\|A_j\varphi\| \ .$$

Comme $\forall\varepsilon>0$ $\exists c_\varepsilon>0$;

$$\|A_j^* A_j\varphi\|\cdot\|A_j\varphi\| \leqq \varepsilon\|A_j^* A_j\varphi\|^2 + c_\varepsilon\|A_j\varphi\|^2 \ .$$

On en déduit que:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle_D \geqq (\mu-2|\alpha|-\varepsilon|\lambda|)\sum_{j=1}^{N}\|A_j^* A_j\varphi\|^2 - c_\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\|A_j\varphi\|^2$$

pour $\varepsilon\leqq(\mu-2|\alpha|)/|\lambda|$, on a:

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi,\varphi\rangle_D \geqq -c_\varepsilon\|\varphi\|^2 \quad \forall\varphi\in D(H^2) \ .$$

ii) La démonstration est similaire à celle de (i) du Lemme 7.

iii) Soit $u'(t)=-Hu(t)$, avec $u(0)=\varphi$.

Soit $u(0)\in D(H^2)$ alors $\operatorname{Re}\langle u'(t),u(t)\rangle=-\operatorname{Re}\langle Hu(t),u(t)\rangle$. Pour $\mu>0$ et $|\alpha|<\mu/2$ on a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+(\mu-2|\alpha|)\sum_{j=1}^{N}\|A_j u(t)\|^2 \leqq 0 \ .$$

Intégrons chaque membre de cette dernière inégalité sur l'intervalle $[0,T]$,, on obtient:

$$\|u(T)\|^2+(\mu-2|\alpha|)\sum_{j=1}^{N}\int_0^T\|A_j u(t)\|^2dt \leqq \|u(0)\|^2 \ ,$$

il en résulte que:

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^T\|A_j u(t)\|^2dt$$

est bornée et par conséquent $u(\cdot)\in L_2([0,T],D)$.

iv) Similaire à la démonstration de celle de iii) du Lemme 7.

La suite de la démonstration du théorème est similaire à celle de la Proposition 5.

B) *Etude de l'opérateur $H_{\lambda',\mu,\lambda,\alpha}$ dans le cas $\alpha=0$.*

Soit $E_j=\left\{\varphi_j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\text{ analytiques};\ \int_{\mathbb{C}} e^{-|z_j|^2}|\varphi(z_j)|^2\,dx_j\,dy_j<+\infty\right\}\ \forall j\in[1,N]$.

L'espace de Bargmann E est le complété de $\bigotimes_{j=1}^{N} E_j$ produit tensoriel algébrique [3]. Considérons les opérateurs:

$$\begin{aligned}
H_j^{\lambda'} &= \lambda' A_j^{*2}A_j^2+\mu A_j^*A_j+i\lambda A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\\
H_{\lambda'} &= \sum_{j=1}^{N} H_j^{\lambda'}\ ;\qquad \lambda'\neq 0\ ,\\
H_j &= \mu A_j^*A_j+i\lambda A_j^*(A_j+A_j^*)A_j\ ,\\
H &= \sum_{j=1}^{N} H_j\ ,\\
\tilde{H}_{\lambda'} &= H_1^{\lambda'}\otimes I_2\otimes\ldots\otimes I_N+\ldots I_1\otimes I_2\otimes\ldots\otimes H_N^{\lambda'}\ ,\\
\tilde{H} &= H_1\otimes I_2\otimes\ldots\otimes I_N+\ldots I_1\otimes I_2\otimes\ldots\otimes H_N\ .
\end{aligned}$$

Les résultats de Herbst rappelés ci-dessous facilitent l'étude des opérateurs $H_{\lambda'}$ et H.

Soit $\{e^{-tB},t\geqq 0\}$ un semi groupe vérifiant $\|e^{-tB}\|\leqq e^{\beta_0 t}$ sur un Hilbert F. On suppose que:

$$(*)\qquad\left\{\begin{array}{l}\text{Etant donné }\gamma\in\mathbb{R},\ \exists y_\gamma\text{ tel que si on pose:}\\ D_\gamma=\{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}z\leqq\gamma\text{ et }\operatorname{Im}z\geqq y_\gamma\}\text{ on ait:}\\ D_\gamma\cap\sigma(B)=\emptyset\quad\text{et}\quad\sup\limits_{z\in D_\gamma}\|(zI-B)^{-1}\|<+\infty\end{array}\right.$$

Soient B_1 et B_2 deux opérateurs de domaines denses $D(B_1)$ et $D(B_2)$ sur deux Hilbert F_1 et F_2 respectivement.

On considère l'opérateur $B_1\otimes I_2+I_1\otimes B_2$ comme fermeture sur $D(B_1)\otimes D(B_2)$. Alors on a:

Théorème de Herbst (Théorème 3.1, p. 67, [10]). *Soient $\{e^{-tB_j};t\geqq 0\}$ $j=1,2$ des semi-groupes sur F_1 et F_2 respectivement vérifiant $\|e^{-tB_j}\|\leqq e^{\beta t}$. On suppose que B_1 et B_2 possèdent la propriété $(*)$.*

Soit B le générateur infinitésimal du semi-groupe $e^{-tB}=e^{-tB_1}\otimes e^{-tB_2}$. Alors:

i) *B possède la propriété $(*)$.*

ii) $\sigma(B)=\sigma(B_1)+\sigma(B_2)$.

En appliquant ce résultat de Herbst on démontre le théorème suivant (énoncé dans [15]):

Théorème 2. *Pour $\lambda'>0$ respectivement pour $\mu>0$, les opérateurs $\bigotimes_{j=1}^{N} e^{-tH_j^{\lambda'}}$ et $\bigotimes_{j=1}^{N} e^{-tH_j}$ sont des semi-groupes fortement continus de générateur infinitésimal respectif $C_{\lambda'}$ et C tels que:*

i) $C_{\lambda'|\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} D(H_j^{\lambda'})} = \tilde{H}_{\lambda'|\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} D(H_j^{\lambda'})}$ et $C_{|\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} D(H_j)} = \tilde{H}_{|\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} D(H_j)}$.

ii) $H_{\lambda'} = \tilde{H}_{\lambda'}$ et $H = \tilde{H}$.

iii) $\sigma(H_{\lambda'}) = \sum_{j=1}^{N} \sigma(H_j^{\lambda'})$ et $\sigma(H) = \sum_{j=1}^{N} \sigma(H_j)$.

iv) *Pour $\lambda/\lambda'(\lambda/\lambda' + \mu/\lambda) \geqq 1$, les valeurs propres de $H_{\lambda'}$ sont réelles dont la plus petite est de multiplicité N. De même pour $\mu > 0$, les valeurs propres de H sont réelles et la plus petite est semi-simple de multiplicité N, c'est à dire: son indice est l'unité et sa multiplicité géométrique est égale à sa multiplicité algebrique $= N$.*

Démonstration. Le produit tensoriel de N semi-groupes fortement continus est un semi-groupe fortement continu est une propriété classique [26]. Quant à la propriété (i), elle se déduit de la formule de Leibnitz qui nous donne:

$$\left[\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} e^{-tH_j^{\lambda'}}\right]' \varphi = -[H_1^{\lambda'} \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N + \ldots + I_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes H_N^{\lambda'}] \overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} e^{-tH_j^{\lambda'}} \varphi$$

avec $\varphi \in \otimes D(H_j^{\lambda'})$. De façon similaire pour $\lambda' = 0$.

ii) Comme l'ensemble P des polynômes est inclus dans $\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} D(H_j^{\lambda'})$ (respectivement dans $\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}} D(H_j)$), on en déduit que:

$$H_1^{\lambda'} \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N + \ldots + I_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes H_{N|P}^{\lambda'} = H_{\lambda'|P}$$

(respectivement $H_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N + \ldots + I_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes H_{N|P} = H_{|P}$)

$$H_1^{\lambda'} \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N + \ldots + I_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes H_N^{\lambda'}$$

étant la fermeture de:

$$H_1^{\lambda'} \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N + \ldots + I_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes H_{N|\otimes D(H_j)}^{\lambda'} .$$

Alors c'est une extension de $H_{\lambda'}^{\min}$.

Par conséquent $H_{\lambda'}^{\min} \subset H_1^{\lambda'} \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N + \ldots + I_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes H_N^{\lambda'}$, or $D_{\min} = D(H_{\lambda'})$ d'où $H_{\lambda'} = H_{\lambda'}$.

Si $\lambda' = 0$ le raisonnement est similaire.

iii) Pour $\lambda' > 0$, il existe $\beta_0 > 0$ tel que $e^{-t(H_j + \beta_0 I)}$ est compact pour tout $t > 0$, en appliquant le Théorème 3.6, p. 50, Pazy [23], on déduit que:

$$\operatorname{Lim} \left\|(\beta_0 + iy - H_j)^{-1}\right\| = 0 \tag{4.6}$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini pour tout $j \in [1, N]$.

D'aprés la Sect. 3, pour $\lambda/\lambda'(\lambda/\lambda' + \mu/\lambda) \geqq 1$, on a montré que le spectre de H_j n'est constitué que des valeurs propres et qui sont réelles. En combinant ce résultat et la propriété (4.6) on déduit que les hypothèses du théorème de Herbst son vérifiées et par suite:

$\sigma(H_{\lambda'}) = \sum_{j=1}^{N} \sigma(H_j^{\lambda'})$, ce qui entraine que:

Les valeurs propres de $H_{\lambda'}$ sont réelles. De la même façon, on montre que pour $\mu>0$, $\sigma(H)=\sum_{j=1}^{N}\sigma(H_j)$ et que les valeurs propres de H sont réelles.

Pour achever la démonstration du théorème précédent, il nous reste à prouver que la plus petite valeur propre de H (respectivement de $H_{\lambda'}$) est semi-simple de multiplicité N.

Pour ce faire soit σ_0 la plus petite valeur propre non nulle de l'opérateur H_j qui est simple [Proposition de T. Ando et M. Zerner, Sect. 3]. Soit Ψ une fonction propre associée à σ_0, elle vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$i\lambda z_j\psi''(z_j)+(i\lambda z_j^2+\mu z_j)\psi'(z_j)=\sigma_0\psi(z_j) \ . \tag{4.7}$$

Soit $\psi_j(z_1,z_2,\ldots,z_N)=\psi(z_j)$, on vérifie que:

$$H\psi_j=\sigma_0\psi_j \quad \forall j\in[1,N] \ . \tag{4.8}$$

Il en résulte que σ_0 est une valeur propre de H, de multiplicité au moins égale à N.

Dans la suite, on montrera que sa multiplicité est éxactement N. Pour ce faire, on se contentera d'étudier le cas à deux sites (le cas à N sites se traitant de façon similaire).

Supposons donc $N=2$ et considérons $H=H_1+H_2$. Soit σ_0 la plus petite valeur propre non nulle de H_1 qui est aussi celle de H_2.

Soit E_1' (respectivement E_2') l'espace associé à σ_0 valeur propre de H_1 (respectivement de H_2).

Soient E_1'' et E_2'' deux supplémentaires respectifs de E_1' et E_2' respectivement stables par H_1 et H_2. On peut alors écrire:

$$E_1=\Lambda\oplus E_1'\oplus E_1'' \quad \text{et} \quad E_2=\Lambda\oplus E_2'\oplus E_2'' \ ,$$

où Λ désigne les constantes.

Il en résulte que: $E_0=E_1'\otimes\Lambda\oplus\Lambda\otimes E_2'\oplus F$ où

$$F=E_1''\otimes E_2''\oplus E_1''\otimes E_2'\oplus E_1'\otimes E_2''\oplus E_1'\otimes E_2'\oplus E_1''\otimes\Lambda\oplus\Lambda\otimes E_2'' \ .$$

Comme $H_1+H_2=H_1\otimes I+I\otimes H_2$ et H_1 (resp. H_2) laisse stable E_1' et E_1'' (resp. E_2' et E_2''), on vérifie facilement que H laisse invariant F.

Montrons, maintenant, que sur chaque sous espace décomposant F, $H-\sigma_0 I$ est inversible, ce qui prouvera que $H_{|F}-\sigma_0 I$ l'est. Nous commençons par le sous espace $E_1''\otimes E_2''$.

Comme $(H_1-\sigma_0 I)_{|E_1''}$ est inversible, il en est de même pour $(H_1-\sigma_0 I)_{|E_1''}\otimes I_{|E_2''}$, de façon similaire puisque $(H_2-\sigma_0 I)_{|E_2''}$ est inversible alors $I_{|E_1''}\otimes(H_2-\sigma_0 I)_{|E_2''}$ l'est aussi. Par consequent σ_0 n'est ni dans $\sigma(H_1\otimes I_{2\,|E_1''\otimes E_2''})$ ni dans $\sigma(I_1\otimes H_{2\,|E_1''\otimes E_2''})$. Or d'aprés le théorème de Herbst on a:

$\sigma(H_{|E_1''\otimes E_2''})=\sigma(H_{1\,|E_1''})+\sigma(H_{2|E_2''})$. D'où si σ_0 appartenait à $\sigma(H_{|E_1''\otimes E_2''})$, on aurait $\sigma_0=\alpha+\beta$; $\alpha\in\sigma(\mathrm{H}_{1|E_1''})$ avec $\alpha\leqq\sigma_0$ et $\beta\in\sigma(H_{2|E_2''})$ avec $\beta\leqq\sigma_0$.

σ_0 étant la plus petite valeur propre non nulle de H_1 et H_2, les seuls cas possibles sont $\alpha=\sigma_0$ et $\beta=0$ ou $\beta=\sigma_0$ et $\alpha=0$; comme σ_0 et 0 n'appartiennent ni à $\sigma(H_{1\,|E_1''})$ ni à $\sigma(H_{2|E_2''})$ on déduit que: $\sigma_0\notin\sigma(H_{|E_1''\otimes E_2''})$.

Considérons maintenant le sous espace $E_1''\otimes E_2'$, comme précédement, d'aprés le théorème de Herbst on a:

$\sigma(H_{|E_1''\otimes E_2'}) = \sigma(H_{1|E_1''}) + \sigma(H_{2|E_2'})$ donc, si σ_0 était dans $\sigma(H_{|E_1''\otimes E_2'})$ on aurait $\sigma_0 = \alpha + \sigma_0$ avec $\alpha \in \sigma(H_{1|E_1''})$ et $\alpha = 0$, ce qui est impossible par conséquent $\sigma_0 \notin \sigma(H_{|E_1''\otimes E_2'})$. De façon similaire, on obtient pour $E_1' \otimes E_2'' : \sigma_0 \notin \sigma(H_{|E_1'\otimes E_2''})$. Soient maintenant, les sous espaces $E_1' \otimes E_2'$, $\Lambda \otimes E_2''$ et $E_1'' \otimes \Lambda$, on a:

$\sigma(H_{|E_1'\otimes E_2'}) = \sigma(H_{1|E_1'}) + \sigma(H_{2|E_2'})$, d'où $\sigma_0 = 2\sigma_0$ ce qui est impossible.

$\sigma(H_{|\Lambda\otimes E_2''}) = \sigma(H_{2|E_2''})$ et $\sigma(H_{|E_1''\otimes \Lambda}) = \sigma(H_{1|E_1''})$, comme σ_0 n'appartenait ni à $\sigma(H_{2|E_2''})$ ni à $\sigma(H_{1|E_1''})$ on déduit que:

$$\sigma_0 \notin \sigma(H_{|\Lambda\otimes E_2''}) \quad \text{et} \quad \sigma_0 \notin \sigma(H_{|E_1''\otimes \Lambda}) \ .$$

Il en résulte que $\sigma_0 \notin \sigma(H_{|F})$ c'est à dire:

$[(H - \sigma_0 I)_{|F}]^{-1}$ existe. Par conséquent la multiplicité de σ_0 est deux.

5. Sur une méthode de perturbation

On fait souvent usage du calcul des perturbations dans la mecanique quantique. Il a pour objet de calculer les valeurs propres et les éléments propres d'un opérateur T_α de l'espace de Hilbert (ou de Banach) dépendant d'un paramètre α sous la forme d'une série entière:

$T_\alpha = T_0 + \alpha T_1 + \alpha^2 T_2 + \ldots$, à condition qu'on les connaisse pour l'opérateur non perturbé T_0 correspondant à $\alpha = 0$.

Différents auteurs, tels que Friedrichs [7], *Sz*-Nagy [20, 21] Kato [18] et Rellich [24] ont étudiés la convergence de la méthode de perturbation. Nous rappelons ici le:

Théorème de Kato-Rellich. *Soit T_α une famille d'opérateur analytique au sens de Kato et σ_0 une valeur propre simple de T_0, alors pour α assez petit, T_α a une seule valeur propre $\sigma(\alpha)$ dans le voisinage de σ_0 et qui est simple, en plus $\sigma(\alpha)$ et l'élement propre correspondant $\varphi(\alpha)$ peuvent étre développés en séries entières de α.*

Si la valeur propre σ_0 de T_0 n'est pas simple, le résultat précédant n'est plus valable en général. Néanmoins, le résultat relatif à $\sigma(\alpha)$ reste vrai dans le cas particulier d'une valeur propre non perturbée σ_0 semi-simple de multiplicité finie N dont se détache déja en première approximation une valeur propre perturbée simple. D'une façon précise, on a:

Théorème 3 (énoncé dans [16]). *Soit T_α un opérateur linéaire d'un espace de Hilbert (ou de Banach) B, analytique au sens de Kato. Soit σ_0 une valeur propre semi-simple de multiplicité finie N de T_0 dont P_0 et B_0 désignent respectivement le projecteur et l'espace propre associés à σ_0.*

Si on écrit $T_\alpha = T_0 + \alpha T_1 + \alpha^2 T_2 + \ldots$, on suppose que $P_0 T_{1|B_0}$ a une valeur propre simple σ_1. Alors l'opérateur perturbé T_α aura, pour $|\alpha|$ assez petit, une valeur propre $\sigma(\alpha)$ dans un voisinage de σ_0 et dans ce voisinage, $\sigma(\alpha)$ peut étre développée en série entière; la première approximation de ce développement est donnée par $\sigma(\alpha) = \sigma_0 + \alpha\sigma_1 + o(\alpha)$.

Démonstration. Pour $|\alpha|$ assez petit, il existe un contour fermé γ du plan complexe qui entoure à la fois la valeur propre non perturbée σ_0 et les valeurs propres de T_α

tendant vers cette dernière à la limite $\alpha=0$. Soit $P_\alpha=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(\zeta-T_\alpha)^{-1}d\zeta$, ce projecteur est bien défini pour $|\alpha|$ assez petit car la résolvante est analytique. On a donc lim $P_\alpha=P_0$ lorsque α tend vers zéro; $P_0=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(\zeta-T_0)^{-1}d\zeta$.

Soient P_0 et P_α les projecteurs, définis précédement parallèles de l'espace B sur ses sous espaces B_0 et B_α.

Comme $\|P_\alpha-P_0\|<1$, il est bien connu (voir [21]) que B_0 et B_α ont la même dimension et l'opérateur $Q_\alpha=P_0P_\alpha$ est bijectif.

Soit maintenant, le problème des valeurs propres de T_α dans B_α qui est équivalent au problème des valeurs propres de $T_\alpha P_\alpha$.

Posons $M_\alpha=Q_\alpha T_\alpha(Q_{\alpha|B_0})^{-1}$, comme M_α est analytique en $\alpha=0$, on l'écrit:

$$M_\alpha=M_0+\alpha M_1+\alpha^2M_2+\dots\ .$$

Explicitons les coefficients M_0 et M_1 de ce développement:

Soit $\varphi\in B_0$, on a:

$$Q_\alpha\varphi=P_0(P_0+\alpha P_1+o(\alpha))\varphi=(I+\alpha P_0P_1+o(\alpha))\varphi \quad \text{d'où:}$$

$$(Q_{\alpha|B_0})^{-1}\varphi=(I-\alpha P_0P_1+o(\alpha))\varphi \quad \text{et} \quad M_\alpha\varphi=Q_\alpha T_\alpha(Q_{\alpha|B_0})^{-1}\varphi$$
$$=P_0P_\alpha T_\alpha(Q_{\alpha|B_0})^{-1}\varphi\ .$$

En première approximation on a:

$$[M_0+\alpha M_1+o(\alpha)]\varphi=[P_0T_0P_0+\alpha(-P_0T_0P_0P_1+P_0T_0P_1+P_0T_1P_0)+o(\alpha)]\varphi\ .$$

Comme P_0 et T_0 commutent on dèduit que:

$$[M_0+\alpha M_1+o(\alpha)]\varphi=[P_0T_0P_0+\alpha P_0T_1P_0+o(\alpha)]\varphi\ .$$

Il en résulte que le problème des valeurs propres s'écrit:

$$\begin{aligned}M_\alpha\varphi=\sigma\varphi&=[P_0T_0P_0+\alpha P_0T_1P_0+\alpha^2M_2+\dots]\varphi\\&=P_0T_0P_0\varphi+\alpha[P_0T_1P_0+\alpha M_2+\dots]\varphi\\&=\sigma_0\varphi+\alpha[P_0T_1P_0+\alpha M_2+\dots]\varphi\ .\end{aligned}$$

D'où:

$(M_\alpha-\sigma_0I)\varphi=\alpha[P_0T_1P_0+\alpha M_2+\dots]\varphi$. Si σ_1 est une valeur propre simple de $P_0T_1P_0$, en appliquant le théorème de Kato-Rellich rappelé au début de ce paragraphe, on déduit que:

$\sigma=\sigma_0+\alpha\sigma_1+\alpha^2\sigma_2+\dots$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Maintenant, on va appliquer les résultats de ce théorème à l'opérateur $H_\alpha=H_0+\alpha H_1$ avec:

$$H_0=\sum_{j=1}^{N}(\lambda' A_j^{*2}A_j^2+\mu A_j^*A_j+i\lambda A_j^*(A_j+A_j^*)A_j)\ ; \qquad \lambda'\neq 0 \quad \text{et}$$

$$H_1=\sum_{j=1}^{N-1}(A_{j+1}^*A_j+A_j^*A_{j+1})$$

où A_j désigne l'opérateur d'annihilation et donc A_j^* l'opérateur de création.

Pour $\lambda'=0$ et $\mu \neq 0$, soit $H_{00}=\sum_{j=1}^{N} \mu A_j^* A_j + i\lambda A_j^*(A_j+A_j^*)A_j$ et on continuera à noter $H_\alpha = H_{00}+\alpha H_1$.

Remarque 2. Les propriétés spectrales suivantes de H_α étaient montrées dans les paragraphes précédentes.

a] Pour $\lambda' \neq 0$, $D(H_\alpha)=\bigcap_{j=1}^{N} D(A_j^4)=D(S)$.

b] Pour $\lambda' \neq 0$ et $|\alpha|<\mu/2$, il existe β_0 réel indépendant de α tel que $H_\alpha+\beta_0 I$ soit bijectif.

c] $\exists a>0$, $\exists b>0$; $\|H_1\varphi\| \leqq a\|H_0\varphi\|+b\|\varphi\| \forall \varphi \in D(S)$.

d] Pour $\lambda' \neq 0$ et $\lambda/\lambda'(\lambda/\lambda'+\mu/\lambda)\geqq 1$, les valeurs propres de H_0 sont réelles et la plus petite est semi-simple de multiplicité N.

e] Pour $\lambda'=0$, $\mu>0$ et $|\alpha|<\mu/2$, il existe β_0 indépendant de α tel que $H_\alpha+\beta_0 I$ soit bijectif.

f] Pour $\lambda'=0$ et $\mu>0$, la plus petite valeur propre σ_0 de H_{00} est réelle et semi-simple de multiplicité N.

g] Pour $\mu>0$ et $|\alpha|<\mu/2$, on a:
$(H_0+\alpha H_1+\beta_0 I)^{-1}$ converge en norme vers $(H_{00}+\alpha H_1+\beta_0 I)^{-1}$ lorsque λ' tend vers zéro.

Dans la suite, on cherche à résoudre le problème des valeurs propres $H_\alpha\varphi=\sigma\varphi$ pour $|\alpha|$ assez petit.

Commençons par un lemme:

Lemme 14. i) *Pour $\lambda'>0$ et $|\alpha|$ assez petit, la famille $H_\alpha=H_0+\alpha H_1$ est analytique au sens de Kato.*

ii) *Pour $\lambda'=0$, $\mu>0$ et $|\alpha|$ assez petit, la famille $H_\alpha=H_{00}+\alpha H_1$ est analytique au sens de Kato.*

Démonstration. En combinant les propriétés (a), (b) et (c), on déduit le résultat (i).

En combinant le (i), la propriété (g) rappelée ci-dessus et le théorème d'Ascoli, on obtient (ii).

Pour l'étude de $H_\alpha\varphi=\sigma\varphi$, on se contentera d'étudier le cas limite où $\lambda'=0$; le cas $\lambda'\neq 0$ se traite de façon similaire.

Soit σ_0 la plus petite valeur propre de H_{00}, soient ψ_j, $j\in[1,N]$ les fonctions propres linéairement indépendantes associées à σ_0 et E_{00} l'espace vectoriel engendré par la suite $\{\psi_j\} j\in[1,N]$.

Soit E_1 l'espace vectoriel orthogonal aux éléments $\{\psi_j^*\}$, $j\in[1,N]$ où $\{\psi_j^*\}$, $j\in[1,N]$ sont les fonctions propres de H_α^* associées à σ_0 telles que:

$$\langle \psi_j, \psi_k^* \rangle = \delta_{jk}\ , \quad j\in[1,\mathrm{N}] \quad \text{et} \quad k\in[1,N]\ .$$

On vérifie que:

i) $E_0=E_{00}\oplus E_1$,

ii) H_{00} laisse invariant E_1.

iii) H_{00} est l'homothétie sur E_{00} de rapport σ_0.

iv) $H_{00}-\sigma_0 I$ est inversible sur E_1.

Afin d'appliquer le Théorème 3, il nous reste à préciser l'action de H_1 sur E_{00} et d'étudier les valeurs propres de $P_0 H_1 P_0$ où P_0 est le projecteur associé à σ_0.

Proposition 12. *Les valeurs propres de $P_0 H_1 P_0$ sont réelles et simples.*

Démonstration. On rappelle que L'opérateur H_α agit sur l'espace de Bargmann [1],
$E_0 = \left\{\varphi : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C},\ \text{analytiques};\ \int_{\mathbb{C}^N} e^{-|z|^2} |\varphi(z)|^2 dz \wedge d\bar{z} < +\infty \text{ et } \varphi(0) = 0\right\}$.

Et dans cette représentation holomorphe, il s'écrit $H_\alpha = H_{00} + \alpha H_1$ avec:

$$H_{00} = \sum_{j=1}^{N} \left[\mu z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + i\lambda z_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j} + z_j\right) \frac{\partial}{\partial z_j}\right] \quad \text{et}$$

$$H_1 = \sum_{j=1}^{N-1} \left(z_{j+1} \frac{\partial}{\partial z_j} + z_j \frac{\partial}{\partial z_{j+1}}\right) .$$

Soit P_0 le projecteur sur E_{00} parallélement à E_1, où $P_0 \varphi = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi, \psi_j^* \rangle \psi_j \ \forall \varphi \in E_{00}$.

Pour tout $\varphi \in E_{00}$, on a $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi, \psi_j^* \rangle \psi_j$ et $H_1 \varphi = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi, \psi_j^* \rangle H_1 \psi_j$, il en résulte que pour j fixé avec $j \in [1, N]$, on obtient:

$$\begin{aligned} H_1 \psi_j &= \sum_{k=1}^{N} \left(z_{k+1} \frac{\partial}{\partial z_k} \psi_j\right) + \sum_{k=1}^{N} \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_{k+1}} \psi_j\right) \\ &= z_{j+1} \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j + z_{j-1} \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j \\ &= (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j \quad \forall j \in [1, N] , \end{aligned}$$

il en résulte que:

$$H_1 \varphi = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi, \psi_j^* \rangle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j \quad \text{avec} \quad z_0 = z_{N+1} = 0 ,$$

par conséquent on a:

$$P_0 H_1 \varphi = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi, \psi_j^* \rangle P_0 (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j .$$

On est donc amené à calculer les expressions:

$$P_0 (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j \quad \text{pour tout} \quad j \in [1, N] .$$

Pour j fixé, on a:

$$P_0 (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j = \sum_{k=1}^{N} \left\langle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_j^* \right\rangle \psi_k .$$

Comme $\left\langle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_j^* \right\rangle$ est l'intégrale sur $\mathbb{C}^N$ d'une fonction en les variables z_{j+1}, z_j et z_{j-1} on peut déduire que:

Si $k \notin \{j-1, j, j+1\}$ l'intégrale précédente se sépare en produit d'intégrales dont un facteur est $\langle 1, \psi_k^* \rangle = \psi_k^*(0) = 0$. Il en résulte que:

Pour $k = j-1$ on a:

$$\begin{aligned}
&\left\langle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_{j-1}^* \right\rangle , \\
&= \left\langle z_{j+1} \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_{j-1}^* \right\rangle + \left\langle z_{j-1} \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_{j-1}^* \right\rangle \\
&= \langle z_{j+1}, 1 \rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j} t_j, 1 \right\rangle \langle 1, \psi_{j-1}^* \rangle + \langle z_{j-1}, \psi_{j-1}^* \rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, 1 \right\rangle .
\end{aligned}$$

Comme $\langle z_{j+1}, 1 \rangle = 0$ et comme dans l'espace de Bargmann E_0, la multiplication par z n'est autre que l'adjoint de la dérivation, on en déduit que:

$$\left\langle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_{j-1}^* \right\rangle = \langle z, \psi^*(z) \rangle \langle \psi(z), z \rangle .$$

Dans la suite on va poser $a = \langle z, \psi^*(z) \rangle \langle \psi(z), z \rangle$. Pour $k = j$ on vérifie que:

$$\left\langle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_j^* \right\rangle = 0 ,$$

et pour $k = j+1$ on a:

$$\left\langle (z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j, \psi_{j-1}^* \right\rangle = \langle z, \psi^*(z) \rangle \langle \psi(z), z \rangle .$$

Il vient qu'on a:

$$P_0 \left[(z_{j+1} + z_{j-1}) \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_j \right] = a(\psi_{j-1} + \psi_{j+1}) \quad ; \quad j \in [1, N] ,$$

d'où:

$$P_0 H_1 \varphi = a \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi, \psi_j^* \rangle (\psi_{j-1} + \psi_{j+1}) .$$

De cette expression, on déduit que les valeurs propres de $P_0 H_1 P_0$ sont données par $\beta_k = a\left(2 - 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)$; $k \in [1, N]$, il en résulte que pour a réel non nul toutes les valeurs propres de $P_0 H_1 P_0$ sont réelles et simples.

Le lemme suivant achève la démonstration de la proposition.

Lemme 15. *Le paramétre $a = \langle z, \psi^*(z) \rangle \langle \psi(z), z \rangle$ est un nombre réel non nul.*

Démonstration. Commençons par montrer que le nombre a est non nul; pour ce faire, on a:

$\langle z, \psi^*(z) \rangle = \langle \psi(z), z \rangle$ donc $a = [\langle \psi(z), z \rangle]^2$, où $\psi(z)$ est la solution de l'équation différentièlle ordinaire:

$$i\lambda z \psi''(z) + (i\lambda z^2 + \mu z)\psi'(z) = \sigma_0 \psi(z) \quad \text{avec} \quad \psi(0) = 0 .$$

Comme $\langle\psi(z), z\rangle = \psi'(0)$ alors si $\langle\psi(z), z\rangle = 0$ on aurait $\psi \equiv 0$ ce qui est impossible.

Montrons maintenant que a est un nombre réel. Pour $y>0$, on sait d'après [1] que $\psi(-iy)$ est réelle. Si on écrit

$$\begin{aligned}\psi(-iy) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\operatorname{Re} a_k + i \operatorname{Im} a_k)(-iy)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (\operatorname{Re} a_{2k} + i \operatorname{Im} a_{2k})(-iy)^{2k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} (\operatorname{Re} a_{2k+1} + i \operatorname{Im} a_{2k+1})(-iy)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} [\operatorname{Re} a_{2k}(-1)^k y^{2k} + \operatorname{Im} a_{2k+1}(-1)^k y^{2k+1}] \\ &\quad + i \sum_{k=1}^{+\infty} [\operatorname{Im} a_{2k}(-1)^k y^{2k} - \operatorname{Re} a_{2k+1}(-1)^k y^{2k+1}] \ .\end{aligned}$$

Comme $\psi(-iy) \in \mathbb{R}$, il en résulte que $\operatorname{Im} a_{2k} = \operatorname{Re} a_{2k+1} = 0$, d'où : $\psi'(0) = i \operatorname{Im} a_1$, donc $a = -(\operatorname{Im} a_1)^2$; ce qui prouve que a est un nombre réel non nul.

Conséquences. i) Pour $|\alpha|$ assez petit, la plus petite valeur propre de H_α peut étre développée en série entière:

$\sigma = \sigma_0 + \alpha\sigma_1 + \alpha^2\sigma_2 + \dots$, où σ_1 est la plus petite valeur propre $P_0 H_1 P_0$.

ii) Pour $|\alpha|$ assez petit, la plus petite valeur propre de H_α développée à l'ordre un est réelle.

iii) Dans le cas à deux sites, c'est à dire $N=2$, on a:

$$\sigma^1 = \sigma_0 + a\alpha + o(\alpha) \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \psi_1 + \psi_2 \ ,$$

$$\sigma^2 = \sigma_0 - a\alpha + o(\alpha) \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \psi_1 - \psi_2 \ ,$$

où $\{\psi_1, \psi_2\}$ est une base de fonctions propres associées à σ_0.

Acknowledgements. First, and most importantly, I want to thank the professor Martin Zerner for introducing me to the Reggeon Field theory and Spectral theory, and for his persistent encouragement. I am grateful also to Professors Claude Bardos and Michel le Bellac for the many stimulating discussions we had.

Bibliographie

1. Ando, T., Zerner, M.: Sur une valeur propre d'un opérateur. Commun. Math. Physics **93**, 123–139 (1984)
2. Bargmann, V.: On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. I. Commun. Pure App. Math. **14**, 187–214 (1961)
3. Bargmann, V.: On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. II. Commun. Pure App. Math. **20**, 220–242 (1967)
4. Besov, LL'in, Nucol'skii: Integral representation of functions and imbedding theorem. V.I., Winston Willy 1978
5. Dieudonné, J.: Fondements de l'analyse moderne Fasicule XXVIII. Paris: Gauthier-Villars
6. Friedrichs, K.O.: Spectral theory of operators in Hilbert space. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973

7. Friedrichs, K.O.: On the perturbation of continuous spectra, Comm. Appl. Math. **1**, 361–406 (1948)
8. Gohberg-Krein, –.: Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. **18**, A.M.S. (1969)
9. Gribov, V.: J.E.T.P. (Sov. Phys.) **26**, 414 (1968)
10. Herbst, I.W.: Contraction semi-groups and the spectrum of $A_1 \otimes I + I \otimes A_2$. J. Operator Theory **7**, 64–78 (1982)
11. Intissar, A.: Etude spectrale d'une famille d'opérateurs non-symétriques intervenant dans le théorie des champs de Reggeons; Thèse D'Etat, Université de Nice (1986)
12. Intissar, A.: Sur une propriété spectrale d'un opérateur non symétrique intervenant dans la théorie de Regge, C.R. Acad. Sci. Paris T **294**, 715–718 (1982)
13. Intissar, A., Le Bellac, M., Zerner, M.: Properties of the Hamiltonian of reggeon field theory. Phys. Lett. **113**B, 487–489 (1982)
14. Intissar, A.: Diagonalisation d'opérateurs non auto-adjoints intervenant dans la théorie des champs des reggeons de Gribov. C.R. Acad. Sci. Paris T: **304**, N° 2 Sér I, 43–46 (1987)
15. Intissar, A.: Quelques propriétés spectrales de l'hamiltonien de la théorie des champs de reggeons, C.R. Acad. Sci. Paris T **304**, N° 3 Sér I, 63–66 (1987)
16. Intissar, A.: Sur une méthode de perturbation C.R. Acad. Sci. Paris T **304**, N° 4 Série I, 95–98 (1987)
17. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966
18. Kato, T.: Perturbation theory of semi-bounded operators. J. Math. Annal. **0**, 435–447 (1953)
19. Lidskii, V.B.: Summability of series in the principal vectors of non self-adjoint operators. Am. Math. Soc. Trans. Ser. 2, **40**, 193–228
20. Sz-Nagy, B.: Perturbations des transformations auto-adjointes dans l'espace de Hilbert. Comment. Math. Helv. **19**, 347–366 (1947)
21. Sz-Nagy, B.: Perturbations des transformations linéaires fermées. Acta. Sci. Math. **14**, 125–137 (1951)
22. Okazawa: Singular perturbations of m-accretive operators; J. Math. Soc. Jpn. **32**, 19–44 (1980)
23. Pazy, A.: Semi-groups of linear operators and applications to partial diffrential equations. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983
24. Rellich, F.: Perturbation theory of eigenvalue problems. Notes on Mathematics and its Applications. pp. 71–80. New York: Gordon and Breach 1969
25. Valiron, G.: Equations fonctionnellles – applications, p. 203. Paris: Masson 1950
26. Weidman, J.: Linear operators in Hilbert space. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980

Communicated by H. Araki

Received January 11, 1987; in revised form June 8, 1987