Commun. Math. Phys. 109, 313–326 (1987)

Communications in
Mathematical
Physics

Ergodicité et limite semi-classique

B. Helffer[1], A. Martinez[2] et D. Robert[1]

[1] Département de Mathématiques, 2, Rue de la Houssinière, F-44072 Nantes, France
[2] Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, F-91405 Orsay, France

Abstract. Consider a self adjoint quantic hamiltonian: $P(h)=p(x, hD_x)$ where $h>0$ is the Planck's constant and p some smooth classical observable on the phase space $\mathbb{R}^{2n}$. When the classical flow on a compact energy shell $\{p=\lambda\}$ is ergodic we prove that in the limit $h\downarrow 0$ almost all the eigenfunctions of $P(h)$ whose energy is near of λ are distributed according to the Liouville measure on $\{p=\lambda\}$.

In the high energy case $(\lambda\to+\infty)$ this sort of problem was considered by A. Schnirelman, S. Zelditch, and Y. Colin de Verdière.

0. Introduction

Le sujet abordé ici nous a été suggéré par un travail récent de Colin de Verdière [C.V] concernant la concentration des fonctions propres du Laplacien sur des variétés riemanniennes compactes, [C.V] faisant suite aux travaux de Schnirelman [S] et de Zelditch [Z] (cas des variétés à courbure constante négative).

En particulier [C.V, Sect. 6] pose le problème de l'extension des travaux précédents dans le cadre semi-classique: l'objet de ce travail est d'apporter une réponse à ce problème pour les fonctions propres d'opérateurs du type $P(h)=p(x, hD_x)$ correspondant à des surfaces d'énergie compactes sur lesquelles le flot classique est ergodique. Nous montrons également que pour les systèmes à un degré de liberté on obtient un résultat plus précis. Pour les systèmes à n degrés de liberté, $n\geqq 2$, l'existence d'hamiltoniens à flot ergodique sur des surfaces d'énergie ne semble toujours pas pouvée pour l'équation de Schrödinger, mais seulement conjecturée (cf. [V, Chap. III]).

Le plan de notre travail est le suivant:

1. Rappels et compléments d'analyse semi-classique
2. Utilisation de l'ergodicité
3. Conséquence du résultat principal du §2
4. Cas unidimensionel
5. Application à l'équation de Schrödinger

On obtient en particulier le résultat suivant:

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ non critique pour p tel que sur la surface d'énergie $p^{-1}(\lambda)$ le flot hamiltonien soit ergodique.

Sous des hypothèses supplémentaires convenables, il existe une famille Ψ_h de fonctions propres normalisées telle que la famille $\lambda(h)$ des valeurs propres associées vérifie: $\lim_{h\to 0}\lambda(h)=\lambda$ et telle que pour tout ouvert $D\subseteq\mathbb{R}^n$ on ait:

$$\lim_{h\to 0}\|\Psi_h\|^2_{L^2(D)}=\int_{\left\{\substack{p(x,\xi)=\lambda\\ x\in D}\right\}} d\sigma_\lambda$$

où $d\sigma_\lambda$ est la mesure de Liouville sur $p^{-1}(\lambda)$.

On montre dans le §4 que pour $n=1$, ce résultat est vrai pour toute famille de fonctions propres normalisées telle que $\lim_{h\to 0}\lambda(h)=\lambda$.

1. Rappels et compléments d'analyse semi-classique

Soit P_h ($h\in]0,h_0]$, $h_0>0$ assez petit) une famille d'opérateurs symétriques donnés par la quantification de H. Weyl:

$$P_h\Psi(x)=(2\pi h)^{-n}\int\int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi}p\left(h,\frac{x+y}{2},\xi\right)\Psi(y)dyd\xi\overset{\text{déf}}{=}(\mathrm{OP}_h^W(p))\Psi(x)$$

où $\Psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et $p(h,x,\xi)=p_0(x,\xi)+hp_1(x,\xi)+\ldots+h^Np_N(x,\xi)$, $p_j\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ (plus généralement, on pourra supposer que P_h est un opérateur admissible au sens de [H-R]$_2$).

Soit aussi $\lambda\in\mathbb{R}$. On suppose:

(H1) $1+p_0^2$ est un poids tempéré, et il existe $\gamma_0\in\mathbb{R}$ et des constantes $C_{\alpha\beta j}>0$ t.q. $p_0\geqq\gamma_0$ et $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p_j|\leqq C_{\alpha\beta j}(1+p_0^2)^{1/2}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $j=1,\ldots,N$.

(H2) $\exists\varepsilon_1>0$ t.q. $p_0^{-1}([\lambda-\varepsilon_1,\lambda+\varepsilon_1])$ est compact, et $[\lambda-\varepsilon_1,\lambda+\varepsilon_1]$ ne contient pas de valeurs critiques de p_0.

D'après Helffer et Robert [H-R]$_1$, on sait alors que P_h est essentiellement auto-adjoint et, si on désigne encore par P_h son extension auto-adjointe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varepsilon_0<\varepsilon_1$, le spectre de P_h est purement discret dans $[\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0]$.

Pour $\mu\in[\lambda-\varepsilon_1,\lambda+\varepsilon_1]$, on désigne par $d\sigma_\mu$ la mesure de Liouville sur la surface d'énergie $\Sigma_\mu\overset{\text{déf}}{=}p_0^{-1}(\mu)$, i.e.:

$$d\sigma_\mu=\left(\int_{\Sigma_\mu}\frac{dS_\mu}{|\nabla p_0|}\right)^{-1}\cdot\frac{dS_\mu}{|\nabla p_0|}$$

où dS_μ désigne la mesure euclidienne sur Σ_μ.

Soit d'autre part $H_{p_0}=(\partial_\xi p_0,-\partial_x p_0)$ le champ hamiltonien associé à p_0, et $F^t(x,\xi)=\exp tH_{p_0}(x,\xi)$ son flot.

On suppose aussi:

(H3) $\sigma_\lambda(\{(x,\xi)\in\Sigma_\lambda/\exists t\neq 0,\ F^t(x,\xi)=(x,\xi)\})=0$.

[Bien entendu, (H3) $\Rightarrow$ $n\geqq 2$.]

En reprenant les arguments de Petkov et Robert [P-R] [en particulier les proposition (4.2), le lemme (4.4) et le théorème taubérien (3.1)], on obtient sans trop de difficultés:

Théorème 1.1 (d'après Petkov-Robert). *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), *il existe une constante $C>0$ ne dépendant que de p et de λ telle que: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, $\exists C_\varepsilon>0$ tel que pour tout intervalle $I\subset]\lambda-\eta,\lambda+\eta[$ et pour tout $h\in]0,1]$, on ait:*

$$\left|\#(\mathrm{Spectre}(P_n)\cap I)-(2\pi h)^{-n}\int_{p_0^{-1}(I)}dx\,d\xi\right|\leqq\varepsilon Ch^{1-n}+C_\varepsilon h^{2-n}. \tag{1.1}$$

Désignons maintenant par $E_I(h)$ le projecteur spectral de P_h sur l'intervalle I. Les arguments de [P-R] étant microlocaux, ils permettent aussi d'obtenir l'extension suivante du Théorème 1.1:

Théorème 1.2. *Soit $a\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ vérifiant:*

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\quad \exists C_{\alpha\beta}>0\quad t.q.\quad |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a|\leqq C_{\alpha\beta}\qquad \left(\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}\quad a\in S(1)\right).$$

Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), *il existe $C>0$, t.q.: $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ t.q. pour tout intervalle $I\subset]\lambda-\eta,\lambda+\eta[$ et pour tout $h\in]0,1]$, on ait:*

$$\left|\mathrm{trace}(\mathrm{Op}_h^W(a)\cdot E_I(h))-(2\pi h)^{-n}\int_{p_0^{-1}(I)}a(x,\xi)\,dx\,d\xi\right|\leqq\varepsilon Ch^{1-n}+C_\varepsilon h^{2-n}. \tag{1.2}$$

Notons $(\lambda_j(h))_{j\geqq1}$ la suite (finie) des valeurs propres de P_h dans $[\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0<\varepsilon_1)$ répétées suivant leur multiplicité, et $(\varphi_j(h))_{j\geqq1}$ un système orthonormé de fonctions propres associé. Soit aussi $I(h)=[\alpha(h),\beta(h)]$ tel que $\beta(h)-\alpha(h)\geqq\varepsilon_2 h$ ($\varepsilon_2>0$ fixé), $\alpha(h)\to\lambda$, $\beta(h)\to\lambda$ lorsque $h\to0$. On note:

$$\Lambda(I,h)=\{j/\lambda_j(h)\in I(h)\}\quad\text{pour } h \text{ assez petit}.$$

Il résulte alors de (1.2) et de l'égalité:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\int_{\nu\leqq p_0(x,\xi)\leqq\mu}a(x,\xi)\,dx\,d\xi\right)=\int_{\Sigma_\mu}\frac{a}{|\nabla p_0|}\,dS_\mu\qquad(\nu,\mu\in[\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0])$$

que l'on a, en notant $A_h=\mathrm{Op}_h^W(a)$:

$$\sum_{j\in\Lambda(I,h)}\langle A_h\varphi_j(h),\varphi_j(h)\rangle=(2\pi h)^{-n}(\beta(h)-\alpha(h))\left(\int_{\Sigma_\lambda}\frac{a}{|\nabla p_0|}\,dS_\lambda+o(1)\right) \tag{1.3}$$

$(h\searrow0)$.

A l'aide de (1.1), on en déduit:

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), *et pour tout $a\in S(1)$, on a:*

$$\lim_{h\searrow0}\left(\frac{\sum_{j\in\Lambda(I,h)}\langle A_h\varphi_j(h),\varphi_j(h)\rangle}{\#\Lambda(I,h)}\right)=\int_{\Sigma_\lambda}a\,d\sigma_\lambda. \tag{1.4}$$

Dans le même esprit que Zelditch [Z], on va maintenant modifier la quantification des opérateurs, afin de pouvoir réécrire (1.4) comme une convergence vague de mesures de Radon. Pour cela, on va utiliser la h-quantification antiwick (cf. [V]) notée Op_h^{AW}, qui respecte la positivité [i.e. $a \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{Op}_h^{AW}(a) \geqq 0$].

Posons $\Psi_h(x) = (\pi h)^{-n/4} e^{-x^2/2h}$ (état fondamental normalisé d'un oscillateur harmonique), soit Π_h l'opérateur de projection orthogonale sur Ψ_h, et $W(y,\eta)$ l'opérateur $\eta x - y D_x$.

On définit alors

$$\mathrm{Op}_h^{AW}(a) = (2\pi h)^{-n} \int a(y,\eta) e^{ih^{-1} W(hy,\eta)} \cdot \Pi_h \cdot e^{-ih^{-1} W(hy,\eta)} dy d\eta . \tag{1.5}$$

Il est clair que l'on a la propriété:

$$a \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{Op}_h^{AW}(a) \geqq 0 .$$

D'autre part, le h-symbole de Weyl de Π_h s'écrit:

$$\sigma_h(x,\xi) = (\pi h)^{-n/2} \int e^{-ih^{-1} u \cdot \xi} e^{-\left(\left|x+\frac{u}{2}\right|^2 + \left|x-\frac{u}{2}\right|^2\right)/2h} du = 2^n e^{-h^{-1}(x^2+\xi^2)} .$$

On en déduit que $\mathrm{Op}_h^{AW}(a)$ admet pour h-symbole de Weyl:

$$a(h,x,\xi) = (\pi h)^{-n} \int a(y,\eta) e^{-h^{-1}[(x-y)^2 + (\xi-\eta)^2]} dy d\eta . \tag{1.6}$$

Cette formule permet en particulier de donner un sens à $\mathrm{Op}_h^{AW}(a)$ pour tout $a \in S(m)$ où m est une fonction d'ordre pour la métrique plate de $\mathbb{R}^{2n}$ (cf. Hörmander [Hö]).

Proposition 1.4. *Pour tout $a \in S(1)$, on a:*

$$\|\mathrm{Op}_h^W(a) - \mathrm{Op}_h^{AW}(a)\|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)} = O(h) \qquad (h \to 0) .$$

Preuve. On a: $\mathrm{OP}_h^{AW}(a) = \mathrm{Op}_h^W(a(h))$ où $a(h)$ est donné par (1.6).

Par un argument standard sur les régularisations gaussiennes, on déduit de (1.6) que:

$$\forall \alpha \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \qquad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(h,x,\xi) - \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) = O(h)$$

uniformément pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

La Proposition 1.5 résulte alors du Théorème de Calderon-Vaillancourt (voir par exemple Robert [R]). □

Pour la suite, on a aussi besoin d'une version semi-classique du théorème d'Egorov, dont on trouvera une démonstration dans le cours [R, théorème IV-9].

Soit $Q(h)$ une famille d'opérateurs admissibles au sens de $[\mathrm{H\text{-}R}]_1$, c'est-à-dire vérifiant:

Il existe une suite de symboles $(q_j)_{j \geqq 0}$ tels que:

(A1) $\qquad \forall j \geqq 0, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_j(x,\xi)| \leqq C_{\alpha\beta}(1+|x|+|\xi|)^{(2-j-|\alpha|-|\beta|)_+}$;

(A2) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| h^{-N-1}\left(Q(h) - \sum_{j=0}^{N} h^j \mathrm{Op}_h^W(q_j)\right)\right\|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)} = O(1) \qquad (h \to 0)$;

(A3) $\qquad Q(h)$ est symétrique sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $h > 0$ assez petit.

Proposition 1.5. *Pour tout $a \in S(1)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:*

$$\|e^{ih^{-1}tQ(h)} \mathrm{Op}_h^W(a) e^{-ih^{-1}tQ(h)} - \mathrm{Op}_h^W(a \circ \exp tH_{q_0})\|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)} = O(h)$$

lorsque $h \to 0$, le $O(h)$ étant uniforme sur tout intervalle borné par rapport à t.

Remarques 1.6. i) On peut montrer que sous les hypothèses (A 1), (A 2), (A 3), $Q(h)$ est essentiellement auto-adjoint pour h assez petit (cf. [R, problèmes IV-12 et IV-13]).

ii) Les résultats de $[\text{H-R}]_2$ sur le calcul fonctionnel permettent de se ramener au cas où (A 1), (A 2), (A 3) sont satisfaites à partir des hypothèses (H 1)–(H 2) relatives à un intervalle d'énergie $[\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0]$.

En effet, soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{Supp}\chi \subset]\lambda-\varepsilon_1, +\infty[$, $\chi \equiv \mathrm{Id}$ sur $[\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0]$, $\chi \equiv \lambda+2\varepsilon_1$ sur $[\lambda+\varepsilon_1, +\infty[$, χ croissante $\mathbb{R}$, strictement croissante, dans un voisinage de $[\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0]$.

$P(h)$ et $\chi(P(h)) = Q(h)$ ont alors même spectre et mêmes fonctions propres dans $[\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0]$. De plus, $\exp tH_{p_0} = \exp tH_{q_0}$ sur $\{(x,\xi)/\lambda-\varepsilon_0 \leqq p(x,\xi) \leqq \lambda+\varepsilon_0\}$, et le symbole $\sum_{j \geqq 0} h^j q_j$ de $Q(h)$ verifie: $q_0 = \chi(p_0)$, $q_j \in C_0^\infty(\lambda-\varepsilon_1 < p_0 < \lambda+\varepsilon_1)$ pour $j \geqq 1$ et h assez petit (cf. $[\text{H-R}]_2$).

Dans la suite, on pourra donc remplacer $P(h)$ par $Q(h)$ pour l'étude du spectre de $P(h)$ dans $[\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0]$.

2. Utilisation de l'ergodicité

Considérons maintenant l'hypothèse:

(H 4) Sur Σ_λ, le flot F^t est ergodique, i.e.:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(F^t(x,\xi))\,dt = \int_{\Sigma_\lambda} a\,d\sigma_\lambda$$

presque partout sur Σ_λ, et pour tout $a \in C^0(\Sigma_\lambda)$.

Cette hypothèse implique (H 3) pour $n \geqq 2$. En effet, du fait que $\nabla_{p_0} \neq 0$ sur Σ_λ, on voit que l'ensemble des périodes de F_t sur Σ_λ est minoré par une constante $T_0 > 0$. Par suite, $\forall \tau \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $K_\tau = \{(x,\xi) \in \Sigma_\lambda / \exists t$ t.q. $|t| \in]0,\tau]$, $F^t(x,\xi) = (x,\xi)\}$ est fermé, et invariant par F^t. L'ergodicité entraîne alors qu'il est de σ_λ-mesure 0 ou 1. Or (H 4) implique qu'il existe une trajectoire de F^t dense dans Σ_λ. Comme $n \geqq 2$ cela entraîne que $K_\tau \neq \Sigma_\lambda$ et donc $\sigma_\lambda(K_\tau) = 0$ puis $\sigma_\lambda\Big(\bigcup_{\tau \geqq 1} K_\tau\Big) = 0$.

D'après le Sect. 1 et un théorème classique de L. Schwartz, l'égalité:

$$\int a\,d\mu_j^h = \langle \mathrm{Op}_h^{AW}(a)\varphi_j(h), \varphi_j(h)\rangle$$

définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{2n}$, et, d'après la Proposition 1.4 et le Théorème 1.3, on en déduit:

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (H 1), (H 2), (H 3), *on a:*

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sum_{j \in \Lambda(I,h)} d\mu_j^h}{\# \Lambda(I,h)} \right) = d\sigma_\lambda$$

au sens de la convergence vague des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^{2n}$.

On se propose maintenant de déduire du Théorème 2.1 et de (H 4) le:

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H4), *et si* $n \geqq 2$, *on a:*

$$\forall \varepsilon>0, \quad \forall a \in S(1),$$

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\#\{j \in \Lambda(I,h); |\int a d\mu_j^h - \int a d\sigma_\lambda| < \varepsilon\}}{\#\Lambda(I,h)}\right)=1.$$

Preuve. On suit la méthode de [Z] et [C.V].

Posons:

$$a_j^h=\int a d\mu_j^h-\int a d\sigma_\lambda, \quad \text{et} \quad \Gamma(I,\varepsilon,h)=\{j \in \Lambda(I,h)/|a_j^h|<\varepsilon\}.$$

On a:

$$|a_j^h| \leqq |b_{j,T}^h| + c_{j,T}^h$$

où:

$$b_{j,T}^h=\int\left(a-\frac{1}{T}\int_0^T a \circ \tilde{F}^t dt\right) d\mu_j^h,$$

$$c_{j,T}^h=\int\left|\frac{1}{T}\int_0^T a \circ \tilde{F}^t dt-\int a d\sigma_\lambda\right| d\mu_j^h, \qquad \tilde{F}^t=\exp tH_{q_0}.$$

Or:

$$b_{j,T}^h=\frac{1}{T}\int_0^T \langle(e^{ith^{-1}Q(h)}\operatorname{Op}_h^{AW}(a)e^{-ith^{-1}Q(h)}-\operatorname{Op}_h^{AW}(a \circ \tilde{F}^t))\varphi_j^h, \varphi_j^h\rangle.$$

Il résulte donc des Propositions 1.5 et 1.6 que, pour tout $T>0$, il existe $h_{T,\varepsilon}$ tel que:

$$|b_{j,T}^h|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout} \quad j \in \Lambda(I,h) \quad \text{et} \quad h<h_{T,\varepsilon}.$$

On en déduit:

$$\frac{\#\Gamma(I,\varepsilon,h)}{\#\Lambda(I,h)} \geqq \frac{1}{\#\Lambda(I,h)} \cdot \#\{j \in \Lambda(I,h)/|c_{j,T}^h|<\varepsilon/2\} \tag{2.1}$$

pour tout $h \in]0, h_{T,\varepsilon}[$.

Posons maintenant:

$$\Omega(T,\varepsilon)=\left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \middle/ \left|\frac{1}{T}\int_0^T a(\tilde{F}^t(x,\xi))dt-\int a d\sigma_\lambda\right|<\varepsilon/4\right\},$$

et

$$dm(I,h)=\frac{1}{\#\Lambda(I,h)}\sum_{j \in \Lambda(I,h)} d\mu_j^h.$$

Comme $\tilde{F}^t$ et F^t coïncident sur Σ_λ, l'hypothèse (H4) montre que $\sigma_\lambda(\Omega(T,\varepsilon)) \to 1$ lorsque $T \to +\infty$.

A l'aide du Théorème 2.1 et du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit:

$$\forall \delta>0, \quad \exists T(\delta)>0 \quad \text{et} \quad h(\delta)>0$$

t.q.

$$m(I,h)(\Omega(T,\varepsilon)) \geqq 1-\delta \quad \text{pour} \quad T \geqq T(\delta) \quad \text{et} \quad h \leqq h(\delta).$$

Par suite, si $\Omega^c(T,\varepsilon)$ désigne le complémentaire dans $\mathbb{R}^{2n}$ de $\Omega(T,\varepsilon)$, on a par l'inégalité de Tchébichev:

$$\#\{j \in \Lambda(I,h), \mu_j^h(\Omega^c(T,\varepsilon)) < \sqrt{\delta}\} \geqq (1-\sqrt{\delta})(\#\Lambda(I,h)). \tag{2.2}$$

Or $\mu_j^h(\Omega^c(T,\varepsilon)) < \sqrt{\delta}$ entraîne:

$$|C_{j,T}^h| \leqq 2\|a\|_{L^\infty}\sqrt{\delta} + \varepsilon/4.$$

A l'aide de (2.1) et de (2.2), on en déduit, en prenant $\sqrt{\delta}$ sous la forme: $\sqrt{\delta} = \frac{\varepsilon}{8\|a\|_{L^\infty}}\sqrt{\delta'}$, que l'on a: $\forall \delta' \in]0,1]$, $\exists h(\delta',\varepsilon,I)>0$ t.q. pour $h<h(\delta',\varepsilon,I)$:

$$\frac{\#\Gamma(I,\varepsilon,h)}{\#\Lambda(I,h)} \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{8\|a\|_{L^\infty}}\sqrt{\delta'}. \quad \square$$

3. Conséquence du Théorème 2.2

On se propose ici de donner un corollaire peut-être un peu plus parlant du Théorème 2.2.

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ dans le Théorème 2.2, on obtient:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \exists h_p > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall h \in]0,h_p],$$

$$\#\left\{j \in \Lambda(I,h);\ \left|\int a\,d\mu_j^h - \int_{\Sigma_\lambda} a\,d\sigma_\lambda\right| < \frac{1}{p}\right\} \geqq \left(1-\frac{1}{p}\right)(\#\Lambda(I,h)). \tag{3.1}$$

On peut de plus supposer que la suite (h_p) est décroissante et converge vers 0. Posons alors, pour $h \in]h_{p+1}, h_p]$:

$$M_p(h) = \left\{j \in \Lambda(I,h) \middle/ \left|\langle \mathrm{Op}_h^W(a)\varphi_j(h), \varphi_j(h)\rangle - \int_{\Sigma_\lambda} a\,d\sigma_\lambda\right| < \frac{1}{p}\right\},$$

puis, pour tout $h \in]0,h_1]$:

$$M(h) = M_p(h) \quad \text{sur} \quad]h_{p+1}, h_p], \qquad p \in \mathbb{N}^*.$$

D'après (3.1) et la Sect. 1, on a donc:

$$\frac{\#M(h)}{\#\Lambda(I,h)} \to 1 \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

De plus, pour toute application $j:]0,h_1] \ni h \to j(h) \in M(h)$, on a:

$$\langle \mathrm{Op}_h^W(a)\varphi_j^h(h), \varphi_j^h(h)\rangle \to \int_{\Sigma_\lambda} a\,d\sigma_\lambda \quad \text{lorsque} \quad h \to 0,$$

et ceci uniformément par rapport à l'application j.

En s'inspirant de la méthode de [C.V], on va montrer que l'ensemble $M(h)$ peut en fait être pris indépendant de a, i.e.:

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H4), $n \geqq 2$ *et si* $I(h)$ *est un intervalle tel que* $|I(h)| \geqq \varepsilon_2 h$ *(*$\varepsilon_2 > 0$ *fixé) et* $I(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \{\lambda\}$, *alors:*

$$\exists M(h) \subset \{j/\lambda_j(h) \in \operatorname{Sp}(P_h) \cap I(h)\}$$

tel que:

$$\frac{\# M(h)}{\#(\operatorname{Sp}(P_h) \cap I(h))} \to 1 \quad \textit{lorsque} \quad h \to 0,$$

et pour tout $a \in S^1(\mathbb{R}^{2n})$ *et toute application* $j:]0, h_1] \ni h \to j(h) \in M(h)$ *(*$h_1 > 0$ *assez petit), on a:*

$$\langle \operatorname{Op}_h^W(a) \varphi_j^h(h), \varphi_j^h(h) \rangle \to \int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda \quad \textit{lorsque} \quad h \to 0,$$

uniformément par rapport à l'application j.

Preuve. On a tout d'abord besoin de se ramener à $\operatorname{Supp}(a) \subset K$ voisinage compact fixe de Σ_λ, et pour cela de localiser en énergie:

Lemme 3.2. *Si* $p_0^{-1}(\lambda)$ *est compact, et si* Ψ_h *est une fonction propre normalisée de* P_h *associée à la valeur propre* $\lambda(h)$, *avec* $\lambda(h) \to \lambda$ *lorsque* $h \to 0$, *alors, pour tout* $a \in S(1)$ *tel que* $\operatorname{Supp}(a) \cap \{p_0 = \lambda\} = \emptyset$, *on a:*

$$\langle \operatorname{Op}_h^W(a) \Psi_h, \Psi_h \rangle = O(h).$$

Preuve. Posons

$$b_h(x, \xi) = \frac{a(x, \xi)}{p(x, \xi) - \lambda(h)}.$$

Du fait que $p - \lambda(h)$ reste minoré par une constante >0 fixe sur $\operatorname{Supp}(a)$ pour h assez petit, il est facile de voir que, si l'on considère $\lambda(h)$ comme un paramètre supplémentaire, alors b_h définit un opérateur pseudo-différentiel auquel le calcul de $[\text{H-R}]_1$ peut s'appliquer.

On a en particulier:

$$\|\operatorname{Op}_h^W(a) - \operatorname{Op}_h^W(b_h) \circ (P_h - \lambda(h))\|_{\mathscr{L}(L^2, L^2)} = O(h)$$

d'où le résultat puisque $(P_h - \lambda(h)) \Psi_h = 0$.

[En fait, en itérant le procédé, on pourrait sans trop de difficultés remplacer $O(h)$ par $O(h^\infty)$.] $\square$

Soit alors $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\{p_0 = \lambda\}$.

En écrivant $\operatorname{Op}_h^W(a) = \operatorname{Op}_h^W((1-\chi)a) + \operatorname{Op}_h^W(\chi_a)$, on est donc ramené par le Lemme 3.1 à $\{a \in S^1(\mathbb{R}^{2n})$ t.q. $\operatorname{Supp}(a) \subset \operatorname{Supp}(\chi)\} \stackrel{\text{déf}}{=} L$ et on peut trouver une suite $(a_l)_{l \geqq 1}$ d'élément de $S(1)$ dont l'adhérence pour la norme uniforme contient L [considérer par exemple les combinaisons linéaires finies des fonctions propres du laplacien dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ avec condition de Dirichlet au bord d'un ouvert contenant $\operatorname{Supp}(\chi)$].

D'après ce qui précède, on peut donc trouver, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, un ensemble $M_l(h) \subset \{j/\lambda_j(h) \in \mathrm{Sp}(P_h) \cap I(h)\}$ tel que:

$$\frac{\# M_l(h)}{\# \mathrm{Sp}(P_h) \cap I(h)} \to 1 \quad \text{et} \quad \int a_l d\mu^h_{j(h)} \to \int a_l d\sigma_\lambda \quad \text{lorsque} \quad h \to 0,$$

et pour toute application $h \to j(h) \in M_l(h)$.

En particulier, $\forall l,\ p \in \mathbb{N}^*$, $\exists h_{p,l} > 0$ tel que

$$h \in]0, h_{p,l}] \Rightarrow \frac{\# M_l(h)}{\# \mathrm{Sp}(P_h) \cap I(h)} \geqq 1 - \frac{1}{p}.$$

On se ramène ensuite à $M_{l+1} \subset M_l$ en posant $\tilde{M}_1 = M_1$ et, pour $l \geqq 1$, $\tilde{M}_{l+1} = M_{l+1} \cap \tilde{M}_l$. Il est alors facile de voir par récurrence sur l que, $\forall l,\ p \in \mathbb{N}^*$, $\exists \tilde{h}_{p,l} > 0$ tel que

$$h \in]0, \tilde{h}_{p,l}] \Rightarrow \frac{\# \tilde{M}_l(h)}{\# \mathrm{Sp}(P_h) \cap I(h)} \geqq 1 - \frac{1}{p}.$$

[Il suffit en effet de prendre $\tilde{h}_{p,1} = h_{p,1}$ et $\tilde{h}_{p,l+1} = \mathrm{Min}(\tilde{h}_{2p,l}, h_{2p,l+1})$.]

Les ensembles $\tilde{M}_l(h)$ ont donc les mêmes propriétés que les $M_l(h)$, avec en plus $\tilde{M}_{l+1} \subset \tilde{M}_l$. D'autre part, la suite $(\tilde{h}_{l,l})_{l \geqq 1}$ peut être prise décroissante, et convergeant vers 0. On pose alors, pour $h \in]0, \tilde{h}_{1,1}]$:

$$M(h) = \tilde{M}_l(h) \quad \text{sur} \quad]\tilde{h}_{l+1,l+1}, \tilde{h}_{l,l}], \qquad l \in \mathbb{N}^*.$$

On a alors:

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad \text{si} \quad h \leqq \tilde{h}_{l,l}, \quad \text{alors} \quad \exists k \geqq l \quad \text{t.q.} \quad M(h) = \tilde{M}_k(h), \qquad h \leqq \tilde{h}_{k,k},$$

et donc:

$$\frac{\# M(h)}{\# \mathrm{Sp}(P_h) \cap I(h)} \geqq 1 - \frac{1}{k} \geqq 1 - \frac{1}{l}.$$

Par suite $\dfrac{\# M(h)}{\# \mathrm{Sp}(P_h) \cap I(h)} \to 1$ lorsque $h \to 0$, et comme $M(h) \subset \tilde{M}_l(h)$ pour h assez petit, on a aussi:

$$\forall l \geqq 1, \quad \int a_l d\mu^h_{j(h)} \to \int a_l d\sigma_\lambda \quad \text{lorsque} \quad h \to 0, \quad \text{et} \quad \forall j(h) \in M(h).$$

Les $\mu^h_{j(h)}$ [avec $j(h) \in M(h)$] sont donc des mesures de probabilité qui, lorsque h tend vers 0, convergent vaguement sur un ensemble dont l'adhérence dans $C^0(\mathbb{R}^{2n})$ contient L. On en déduit qu'elles convergent vaguement sur tout L vers σ_λ. (L'uniformité par rapport à l'application j se voit de même.) □

On a le corollaire suivant du Théorème 3.1:

Corollaire 3.3. *Avec les mêmes notations qu'au Théorème 3.1, et si Π désigne la projection naturelle: $T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on a:*

$$\forall D \subset \mathbb{R}^n \ \text{ouvert}, \quad \|\varphi^h_{j(h)}\|^2_{L^2(D)} \to \sigma_\lambda(\Pi^{-1}(D)) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

(En particulier, la limite est >0 si $D \cap \Pi(\Sigma_\lambda)$ est d'intérieur non vide.)

Preuve. Grâce au Lemme 3.2, on peut supposer D compact et, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi \equiv 1$ sur D, tel que:

$$\left| \int_{\Sigma_\lambda} (\chi \circ \Pi) d\sigma_\lambda - \sigma_\lambda(\Pi^{-1}(D)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$| \, \|\varphi_{j(h)}^h\|_{L^2(D)}^2 - \langle \chi \varphi_{j(h)}^h, \varphi_{j(h)}^h \rangle | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } h \text{ assez petit.}$$

On applique ensuite le Théorème 3.1 avec $a(x, \xi) = \chi(x)$, ce qui permet d'obtenir par l'inégalité triangulaire:

$$| \, \|\varphi_{j(h)}^h\|_{L^2(D)}^2 - \sigma_\lambda(\Pi^{-1}(D)) | < \varepsilon \quad \text{pour } h \text{ assez petit.} \quad \square$$

4. Cas de la dimension 1

Lorsque $n = 1$, l'hypothèse (H4) est automatiquement vérifiée si Σ_λ est connexe. Dans ce cas, on obtient néanmoins un résultat beaucoup plus précis sur le comportement des $\langle A_h \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle$:

Théorème 4.1. *En dimension* 1, *et sous les hypothèses* (H1), (H2), *soit* $\lambda(h)$ *une valeur propre de* P_h *telle que* $\lambda(h) \to \lambda$ $(h \to 0)$, *et soit* φ_h *une fonction propre normalisée associée. Si de plus* $\{p_0 = \lambda\}$ *est connexe, alors, pour tout* $a \in S(1)$ *on a:*

$$\lim_{h \to 0} \langle \mathrm{Op}_h^W(a) \varphi_h, \varphi_h \rangle = \int_{\Sigma_\lambda} a \, d\sigma_\lambda,$$

où $d\sigma_\lambda$ *est la mesure de Liouville sur* $\Sigma_\lambda = \{p_p = \lambda\}$.

Preuve. Appliquant les techniques de $[\text{H-R}]_2$, on pose $Q = \tilde{J}(P_h)$ où $\tilde{J}$ est un prolongement C^∞ à $\mathbb{R}$ (affine en dehors d'un compact) de $J(\mu) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{p_0(x,\xi) \leq \mu} dx d\xi$.

On a alors (cf. Lemme 2.7 de $[\text{H-R}]_2$): $\exp t H_{q_0}$ est 2π-périodique près du niveau d'énergie $\{q_0(x, \xi) = J(\lambda)\}$.

Par suite, si $\tilde{\Sigma}_\mu = \{q_0 = \mu\}$ et $d\tilde{\sigma}_\mu$ est la mesure de Liouville sur $\tilde{\Sigma}_\mu$, on voit facilement que pour $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a:

$$\int_{\tilde{\Sigma}_\mu} a \, d\tilde{\sigma}_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\exp t H_{q_0}(x, \xi)) dt, \quad \forall (x, \xi) \in \tilde{\Sigma}_\mu. \tag{4.1}$$

Si maintenant $a \in S^1(\mathbb{R}^2)$, on se ramène d'abord par le Lemme 3.2 à $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, à support près de $\{p_0 = \lambda\}$, et on pose:

$$\tilde{a}(\mu) = \int_{\tilde{\Sigma}_\mu} a \, d\tilde{\sigma}_\mu. \tag{4.2}$$

On a alors $\tilde{a} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$ [en notant $\tilde{Q} = \chi(Q) Q$ où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vaut 1 près de λ]:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Op}_h^W(a) \varphi_h, \varphi_h \rangle &= \langle e^{ith^{-1}\tilde{Q}} \mathrm{Op}_h^W(a) e^{-ith^{-1}\tilde{Q}} \varphi_h, \varphi_h \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ith^{-1}\tilde{Q}} \mathrm{Op}_h^W(a) e^{-ith^{-1}\tilde{Q}} \varphi_h dt, \varphi_h \right\rangle \\ &= \langle B_h \varphi_h, \varphi_h \rangle + O(h) \end{aligned}$$

où [cf. Proposition 1.6 et (4.1)–(4.2)] B_h a pour symbole principal $\tilde{a} \circ \chi(q_0(x,\xi))$. En utilisant le calcul fonctionnel de $[\text{H-R}]_2$, on peut donc écrire:

$$\langle \mathrm{Op}_h^W(a)\varphi_h, \varphi_h\rangle = \langle \tilde{a}(\tilde{Q})\varphi_h, \varphi_h\rangle + O(h) = \tilde{a}(J(\lambda(h))) + O(h)$$

qui tend vers $\tilde{a}(J(\lambda)) = \int_{\{p_0=\lambda\}} a d\sigma_\lambda$. □

Remarque 4.2. On trouvera en appendice une autre approche du Théorème (4.1) suggérée par le rapporteur.

5. Application à l'équation de Schrödinger

Lorsque $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ [où $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$], les techniques de Helffer et Sjöstrand (cf. $[\text{H-S}]_1$ et $[\text{H-S}]_2$) permettent (comme remarqué dans [He]) de remplacer l'hypothèse (H1) par:

$(\tilde{\text{H}}1)$ $$\varliminf_{|x|\to\infty} V(x) > \lambda .$$

En effet, soit $(P_h)_D$ l'opérateur de Dirichlet associé à P_h sur un ouvert Ω contenant $\{V(x) \leqq \lambda\}$, et soit $\tilde{P}_h = -h^2\Delta + \tilde{V}(x)$ où $\tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $\tilde{V}|_\Omega = V|_\Omega$, et $\tilde{V}$ est tempérée à l'infini (par exemple $\tilde{V} = \lambda + 1$ à l'extérieur d'un ouvert contenant $\bar{\Omega}$).

Du fait que sur $[\lambda - \varepsilon_0, \lambda + \varepsilon_0]$ les cardinaux de $\mathrm{Sp}(P_h)$, $\mathrm{Sp}(P_h)_D$, $\mathrm{Sp}(\tilde{P}_h)$ sont majorés par une puissance négative de h, il est clair qu'en modifiant $I(h)$ par des $O(h^2)$ convenables on peut construire deux intervalle $I'(h)$ et $I''(h)$ tels que:

$$I'(h) \subset I(h) \subset I''(h)$$

et $\exists a(h) > 0$ t.q. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$ avec $a(h) \geqq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon/h}$ et tel que:

$$\mathrm{Sp}(P_h) \cup \mathrm{Sp}(P_h)_D \cup \mathrm{Sp}(\tilde{P}_h)$$

ne rencontre pas les ensembles:

$$(I'(h) + [-2a(h), 2a(h)]) \backslash I'(h) \quad \text{et} \quad (I''(h) + [-2a(h), 2a(h)]) \backslash I''(h) .$$

On sait qu'alors (cf. $[\text{H-S}]_1$), les ensembles $\mathrm{Sp}(P_h) \cap I'(h)$, $\mathrm{Sp}(P_h)_D \cap I'(h)$, $\mathrm{Sp}(\tilde{P}_h) \cap I'(h)$ sont en bijection, et que ces bijections différent de l'identité par un $O(e^{-\varepsilon_2/h})$ où $\varepsilon_2 > 0$ [et de même en remplaçant $I'(h)$ par $I''(h)$].

D'autre part, en appliquant la formule (1.1) à $\tilde{P}_h$ on voit que $\# \Lambda(I,h)$, $\# \Lambda(I',h)$, $\# \Lambda(I'',h)$ ne différent que par un $o(h)h^{-n}$, et de même avec $\mathrm{tr}\, \mathrm{Op}_h^W(a)\tilde{E}_I(h)$, $\mathrm{tr}\, \mathrm{Op}_h^W(a)\tilde{E}_{I'}(h)$, $\mathrm{tr}\, \mathrm{Op}_h^W(a)\tilde{E}_{I''}(h)$ où les $\tilde{E}$ désignent ici les projecteurs spectraux associés à $\tilde{P}_h$ [cf. (1.2)]. Si les $d\tilde{\mu}_j^h$ désignent les mesures de probabilités du §1 associées à $\tilde{P}_h$, on aura donc:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j\in\Lambda(I',h)} d\tilde{\mu}_j^h}{\# \Lambda(I'',h)} = d\sigma_\lambda$$

puis, pour $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\# \{j \in \Lambda(I',h);\ |\int a d\tilde{\mu}_j^h - \int a d\sigma_\lambda| < \varepsilon\}}{\# \Lambda(I'',h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 .$$

Maintenant, les résultats de [H-S]$_1$ impliquent [en passant par les fonctions propres de $(P_h)_D$] que l'on a:

$$\exists \sigma > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall j \in \Lambda(I'', h), \ |\int a d\tilde{\mu}_j^h - \int a d\mu_j^h| = O(e^{-\sigma/h}).$$

On en déduit:

$$\frac{\#\{j \in \Lambda(I,h); \ |\int a d\mu_j^h - \int a d\sigma_\lambda| < \varepsilon\}}{\#\Lambda(I,h)} \geqq \frac{\#\{j \in \Lambda(I',h) / |\int a d\mu_j^h - \int a d\sigma_\lambda| < \varepsilon\}}{\#\Lambda(I'',h)} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

et donc

Théorème 5.1. *Si $P_h = -h^2 \Delta + V$ vérifie les hypothèses* ($\tilde{\mathrm{H}}1$), (H2) *et* (H4), *alors les résultats des Théorèmes 2.2 et 3.1 s'appliquent à P_h.*

Remarque 5.2. Dans le cas du double puits symétrique (i.e. $\{V \leqq \lambda\} = U_1 \cup U_2$ avec U_1, U_2 connexes, et symétriques l'un de l'autre par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ qui est aussi un axe de symétrie pour V), et lorsque V est analytique, notons λ_j^h les valeurs propres de Dirichlet de P_h associées à l'un des puits. Alors, le Théorème 5.1 montre que si H_p est ergodique sur chaque composante connexe de $\{p = \lambda\}$, et si de plus on peut trouver une application $J \ni h \to j(h) \in M(h)$ (où $J \subset]0, 1]$, $0 \in \bar{J}$) telle que $\lambda_{j(h)}^h$ soit simple et séparée du reste du spectre de Dirichlet de P_h par une distance non-exponentiellement petite $\left(\text{i.e.} \geqq \frac{1}{C_\varepsilon} e^{-\varepsilon/h}, \forall \varepsilon > 0\right)$, on se trouve dans ce cas dans la situation du Théorème 1.1 de [M]. (En effet, le Corollaire 3.3 montre que pour tout ouvert non vide D de $\{V \leqq \lambda\}$, $\|\varphi_{j(h)}^h\|_{L^2(D)}$ reste minoré par une constante > 0.)

En particulier, chaque $\lambda_{j(h)}^h$ est alors associée à deux valeurs propres de P_h, $\lambda^+(h)$ et $\lambda^-(h)$ (exponentiellement proches de $\lambda_{j(h)}^h$ de l'ordre de $e^{-S_0/h}$) qui vérifient:

$$\lambda^+(h) - \lambda^-(h) \geqq \frac{1}{\tilde{C}_\varepsilon} e^{-(S_0 + \varepsilon)/h}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall h \in J \quad \text{assez petit},$$

et où S_0 désigne la distance d'Agmon entre les deux puits [distance associée à $(V - \lambda)_+ dx^2$].

Appendice

Comme le suggère le rapporteur, on peut également penser à une démonstration utilisant les constructions B.K.W. Nous en esquissons les grandes lignes sous les mêmes hypothèses que pour le Théorème (4.1) Maslov indique et ceci est démontré rigoureusement dans les travaux de Fedoryuk-Maslov [FE-MA], Duistermaat [DU], Candelberger-Nosmas [CA-NO], Leray [LE] que, pour $\mu \in I_\lambda = [\lambda - \varepsilon_1, \lambda + \varepsilon_1]$ défini par (H2) on peut construire pour tout couple (h, j) vérifiant la condition de quantification:

$$J(\mu) = \left(\frac{d}{d\mu} \int_{p_0 \leqq \mu} dx d\xi\right) = (j + 1/2) h \tag{$*$}$$

avec $j \in \mathbb{N}$, $h \in]0, h_0]$ une solution Lagrangienne ${}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h}$ et un développement asymptotique en h à coefficients continus en $\mu \in I$ telle que

$$P_h {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h} = \left(\mu + \sum_{j \geqq 1} E_j(\mu) h^j\right) \Psi^{\mu}_{j,h} + \mathcal{O}(h^\infty) \quad \text{en norme } L^2$$

avec $\|{}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h}\|_{L^2} = 1$.

Il est démontré (cf. [HE-RO]$_3$) (ce qui était classique dans le cas de Schrödinger) que toutes les valeurs propres dans I_λ sont obtenues module $\mathcal{O}(h^\infty)$ de cette manière et que, près de la solution Lagrangienne ${}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h}$, il existe une vraie fonction propre $\Psi^{\mu}_{j,h}$ telle que

$$\|\Psi^{\mu}_{j,h} - {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^\infty) \quad \text{dans } L^2 \text{ uniformément par rapport au couple } (j, h, \mu) \text{ vérifiant } (*). \qquad (**)$$

Les discussions de [DU, pp. 223–224] montrent que $\mathrm{Op}^w_h(a)\, {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h}$ est également une distribution Lagrangienne dans L^2 et grâce à (1.3.16)–(1.3.18) de [DU] on peut calculer:

$$(\mathrm{Op}^W_h(a)\, {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h} / {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h})_{L^2(\mathbb{R})}$$

par la méthode de la phase stationnaire.

On en déduit que:

$$(\mathrm{Op}^w_h(a)\, {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h} / {}^{\mathscr{L}}\Psi^{\mu}_{j,h}) \equiv \left(\int_{\Sigma_\mu} a\, d\sigma_\mu\right) + \sum_{j \geqq 1} f_j(\mu) h^j \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{O}(h^\infty)) \qquad (***)$$

et revenant aux vraies fonctions propres: $\Psi^{\mu}_{j,h}$, on a, pour des fonctions continues f_j sur I_λ (les f_j sont mêmes C^∞),

$$(\mathrm{Op}^W_h(a) \Psi^{\mu}_{j,h} / \Psi^{\mu}_{j,h}) = \left(\int_{\Sigma_\mu} a\, d\sigma_\mu\right) + \sum_{j \geqq 1} f_j(\mu) h^j + \mathcal{O}(h^\infty)$$

uniformément par rapport à μ.

Pour tout (j, h) tel que $(j + 1/2) h \in J[I_\lambda]$ on obtient ainsi en prenant $\mu = J^{-1}((j + 1/2) h)$ que

$$(\mathrm{Op}^W_h(a) \Psi_{j,h} | \Psi_{j,h}) = \int_{\Sigma_{J^{-1}((j+1/2)h)}} a\, d\sigma + \sum_{j \geqq 1} (f_j \circ J^{-1})((j + 1/2) h) h^j + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Ceci précise le Théorème 4.1.

Bibliographie

[C.V] Colin de Verdière, Y.: Ergodicité et fonctions propres du Laplacien, séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 1984–85 n° XIII. Commun. Math. Phys. **102**, 497–502 (1985)

[CA-NO] Cardelpergher, Nosmas: Proprietés spectrales d'opérateurs differentiels asymptotiques autoadjoints. Commun. Partial Differ. Equations **9**, 137–168 (1984)

[DU] Duistermaat, J.J.: Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities. Commun. Partial Differ. Equations **27**, 207–281 (1974)

[FE-MA] Fedoryuk, Maslov: Semi-classical approximation in quantum mechanics. Amsterdam: Reidel 1981

[He] Helffer, B.: Introduction to the semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications. Cours à Nankaï (Chine) (à paraître)

[H-R] Helffer, B., Robert, D.:
[1] Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. Ann. l'Institut Fourier **XXXI**, 169–223 (1981);
[2] Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles. J. Funct. Anal. **53**, 246–268 (1983);
[3] Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique. Ann. l'Institut Henri Poincaré **41**, 291–331 (1984)

[H-S] Helffer, B., Sjöstrand, J.:
[1] Multiple wells in the semi-classical limit. I. Commun. Partial Differ. Equations **9**, 337–408 (1984);
[2] Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire, symétries, perturbation. Ann. l'Institut Henri Poincaré **42**, 127–212 (1985)

[Hö] Hörmander, L.: The Weyl calculus of pseudo-differential operators. Commun. P.A.M. **32**, 359–443 (1979)

[I] Ivrii, V.: A paraître

[LE] Leray, J.: Analyse lagrangienne et mécanique quantique. Collège de France, 1976–1977

[M] Martinez, A.: Estimations de l'effet tunnel pour le double puits. II. Etats hautement excités (à paraître)

[P-R] Petkov, V., Robert, D.: Asymptotique semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques. Commun. Partial Differ. Equations **10**, 365–390 (1985)

[R] Robert, D.: Autour de l'approximation semi-classique. Cours. de l'Université de Nantes et de Récife (1983). Birkhäuser PM 68

[S] Schnirelman, A.: Ergodic properties of eigenfunctions. Usp. Math. Nauk **29**, 181–182 (1974)

[V] Voros, A.: Développements semi-classiques. Thèse Orsay 1977

[Z] Zelditch, S.: Eigenfunctions on compact Riemann-surfaces of $g \geqq 2$. Preprint 1984 (New York)

Communicated by B. Simon

Received June 25, 1986; in revised form October 6, 1986