Commun. math. Phys. 55, 47—51 (1977)

Communications in
Mathematical
Physics


# Applications conservant une mesure absolument continue par rapport à $dx$ sur $[0, 1]$

D. Ruelle

Institut des Hautes Etudes Scientifique, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

**Abstract.** Sufficient conditions are given such that a differentiable, non invertible, map $g:[0,1]\mapsto[0,1]$ leaves invariant a measure absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. In particular, this is shown to be the case for $g(x)=Rx(1-x)$ when $R=3{,}6785735\ldots$.

Nous nous intéressons dans cette note à des applications différentiables non invertibles de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même pour lesquelles il existe une mesure invariante absolument continue par rapport à $dx$. De telles mesures invariantes n'existent pas «en général»: cela résulte d'un théorème de Iakobson [2] qui affirme que les applications $\Omega$-stables de $S^1$ dans lui-même forment un ensemble dense pour la topologie $C^1$. Nous obtiendrons cependant des conditions suffisantes assez générales pour l'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'intérêt que présente l'existence d'une telle mesure est qu'elle est ici liée à une «dépendance sensitive par rapport à la condition initiale» pour l'évolution à temps discret définie par $g:[0,1]\mapsto[0,1]$. La sensitivité par rapport à la condition initiale joue un rôle important dans divers problèmes de physique et d'écologie (voir Lorenz [4], Ruelle-Takens [7], May [5]).

Nous discuterons surtout des applications du type indiqué sur la Figure 1: croissant de 0 à 1 sur un intervalle $[0,c]$, puis décroissant de 1 à 0 sur $[c,1]$. Nous commençons par rappeler un cas classique (voir Ulam-von Neumann [8]), celui de l'application $x\mapsto 4x(1-x)$.

Soient $f, \varphi$ les applications continues de $[0,1]$ sur lui-même définies par

$$f(x)=4x(1-x)$$

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\,.$$

Alors $\varphi$ est un homéomorphisme et

$$\varphi^{-1}(x)=\sin^2\frac{\pi x}{2}=\frac{1-\cos\pi x}{2}.$$

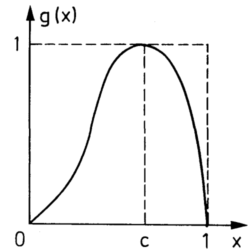


**Fig. 1**

En outre

$$\tilde{f}=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$$

est donnée, comme on le vérifie immédiatement, par

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}2x & \text{si} \quad x\in[0,\frac{1}{2}]\\ 2(1-x) & \text{si} \quad x\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

La mesure de Lebesgue $m$ est invariante pour $\tilde{f}$, donc $f$ laisse invariante $\varphi^{-1}m$, c'est-à-dire la mesure donnée par

$$(\varphi^{-1}m)(dx)=\frac{d\varphi(x)}{dx}dx=\frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

**Lemme 1.** *Soit $h$ une fonction croissante sur $[0,1]$ avec $h(0)=0$, $h(1)=1$. Supposons que la dérivée $h'$ est Hölder continue d'exposant $\gamma$, et satisfait $0<\alpha\leqq h'\leqq\beta$. Alors la dérivée $\tilde{h}'$ de $\tilde{h}=\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}$ est Hölder continue d'exposant $\gamma$ et satisfait*

$$\frac{\alpha}{\beta}\leqq\tilde{h}'\leqq\frac{\beta}{\alpha}.$$

On a l'identité

$$\begin{aligned}\tilde{h}'(x)&=\frac{d}{dx}\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}(x)\\ &=\frac{1}{\sqrt{(h\circ\varphi^{-1}(x))(1-h\circ\varphi^{-1}(x))}}(h'\circ\varphi^{-1}(x))\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\\ &=\left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{h\circ\varphi^{-1}(x)}\cdot\frac{1-\varphi^{-1}(x)}{1-h\circ\varphi^{-1}(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(h'\circ\varphi^{-1}(x)).\end{aligned}$$

Si l'on utilise les inégalités

$$\alpha x\leqq h(x)\leqq\beta x\,; \qquad \alpha(1-x)\leqq 1-h(x)\leqq\beta(1-x)$$

il vient immédiatement $\alpha/\beta\leqq\tilde{h}'\leqq\beta/\alpha$. Comme $\varphi^{-1}$ est de classe $C^1$, la continuité de Hölder de $\tilde{h}'$ résulte de celle des fonctions

$$x\mapsto\frac{h(x)}{x},\frac{1-h(x)}{1-x},h'.$$

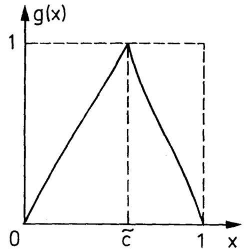


Fig. 2

On a par exemple, en utilisant la formule de Taylor

$$th'(t)-h(t)=t(h'(t)-h'(\theta t))\leqq tC|t-\theta t|^{\gamma}\leqq Ct^{\gamma+1}.$$

Donc, si $x<y$,

$$\left|\frac{h(y)}{y}-\frac{h(x)}{x}\right|=\int_x^y\frac{th'(t)-h(t)}{t^2}dt\leqq\int_x^y Ct^{\gamma-1}$$

$$=\frac{C}{\gamma}(y^{\gamma}-x^{\gamma})\leqq\frac{C}{\gamma}|y-x|^{\gamma}.$$

**Lemme 2.** *Soit $\tilde{g}$ une fonction continue sur* $[0,1]$, *croissant de* $0$ *à* $1$ *sur un intervalle* $[0,\tilde{c}]$, *puis décroissant de* $1$ *à* $0$ *sur* $[\tilde{c},1]$ *(voir Fig. 2). On suppose que $\tilde{g}$ a une dérivée $\tilde{g}'$ Hölder continue d'exposant $\gamma$ sur* $[0,\tilde{c}]$ *et sur* $[\tilde{c},1]$, *avec* $|\tilde{g}'|>1$. *Il existe alors $k$ Hölder continue d'exposant $\gamma$ sur* $[0,1]$ *telle que $e^{k(x)}dx$ est une mesure de probabilité $\tilde{g}$-invariante sur* $[0,1]$.

Pour la démonstration, voir Ruelle [6], Section 7.31. Si $\tilde{g}$ est de classe $C^2$ par morceaux, l'existence d'une mesure $\tilde{g}$-invariante équivalente à $dx$ résulte aussi d'un théorème de Lasota et Yorke [3].

**Proposition.** *Soient $h_1$, $h_2$ des fonctions croissantes sur* $[0,1]$ *avec* $h_i(0)=0$, $h_i(1)=1$. *On suppose que les dérivées $h_i'$ sont Hölder continues et satisfont aux inégalités* $0<\alpha_i\leqq h_i'\leqq\beta_i$. *Alors, si* $2\alpha_1\alpha_2/\beta_1\beta_2>1$, *il existe une mesure de probabilité équivalente à $dx$ sur* $[0,1]$, *et invariante pour $h_2\circ f\circ h_1$ (où $f(x)=4x(1-x)$).*

Soit $g=h_2\circ f\circ h_1$. On peut écrire $\tilde{g}=\tilde{h}_2\circ\tilde{f}\circ\tilde{h}_1$, avec $\tilde{g}=\varphi\circ g\circ\varphi^{-1},\ldots$, et $|\tilde{f}'|=2$. Il résulte donc du Lemme 1 que la dérivée $\tilde{g}'$ est Hölder continue et satisfait

$$|\tilde{g}'|\geqq 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}>1.$$

Par le Lemme 2, il existe alors une mesure de probabilité $\tilde{g}$-invariante de la forme $e^{k(x)}dx$ sur $[0,1]$. L'image de cette mesure par $\varphi^{-1}$ est

$$\frac{e^{k\circ\varphi(x)}dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

C'est une mesure $g$-invariante équivalente à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

**Corollaire 1.** *Soit $g$ une fonction concave sur $[0,1]$ telle que $g(0)=g(1)=0$ et* $\max g(x)=1$. *Si $g$ est de classe $C^{2+\gamma}$ et si*

$$u<-\tfrac{1}{8}g''<v \quad avec \quad v^3<4u^3$$

*alors il existe une mesure de probabilité $g$-invariante équivalente à $dx$ sur $[0,1]$.*

Posons $h_1(x)=\int_0^x \frac{|g'(t)|dt}{4\sqrt{1-g(t)}}$, alors $f\circ h_1=g$ parce que $h_1(x)=\frac{1}{2}(1-(\operatorname{sgn} g'(x))$ $\cdot\sqrt{1-g(x)})$. La dérivée $h_1'$ est Hölder continue d'exposant $\gamma$. En effet si $c$ est tel que $g(c)=1$ et si $x<y$, on a

$$|h_1'(y)-h_1'(x)|\leqq \int_x^y \frac{dt}{4\sqrt{1-g(t)}}\left|g''(t)+\frac{g'(t)^2}{2(1-g(t))}\right|$$

$$\leqq \int_x^y C|t-c|^{\gamma-1}dt \leqq \frac{2C}{\gamma}|y-x|^\gamma .$$

En outre, on voit aisément que

$$\frac{\min|g''(x)|}{\sqrt{\max|g''(x)|}}\leqq 2\sqrt{2}h_1'(x)\leqq \frac{\max|g''(x)|}{\sqrt{\min|g''(x)|}}.$$

Par conséquent

$$\alpha_1=\frac{u}{\sqrt{v}}\leqq h_1'(x)\leqq \frac{v}{\sqrt{u}}=\beta_1$$

et $2\alpha_1/\beta_1>1$.

**Corollaire 2.** *Soit $I$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Il existe une variété $\Sigma$ de codimension 1 dans $C^{2+\gamma}(I,I)$ telle que toute $g\in\Sigma$ possède une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I$.*

On peut prendre $I=[-\varepsilon,1+\varepsilon]$ avec $\varepsilon>0$. Posons alors

$$S=\left\{g\in C^{2+\gamma}(I,I): g\left(\max_x g(x)\right)=g^2\left(\max_x g(x)\right)\right\}$$

et soit $g_0\in S$ telle que $g_0(x)=4x(1-x)$ pour $x\in[0,1]$ et $g_0(x)<0$ pour $x\notin[0,1]$. Si $\Sigma$ est un voisinage ouvert assez petit de $g_0$ dans $S$, alors $\Sigma$ est une sous-variété de codimension 1 dans $C^{2+\gamma}(I,I)$. En outre toute fonction $g\in\Sigma$, restreinte à $[Hg(\max g), \max g]$, satisfait, après un changement linéaire de variables, aux conditions du Corollaire 1.

*Exemple.* Soit $R=3{,}6785735\ldots$ la seule racine réelle de l'équation $(R-2)^2(R+2)=16$, et posons $g(x)=(R-2)^2x(1-x)[1+(R-2)x(1-x)]$. Alors $g$ applique $[0,1]$ sur lui-même. Si l'on définit $h_1$ comme dans la démonstration du Corollaire 1, on a encore $g=f\circ h_1$. Le Corollaire 1 ne s'applique pas ($g$ n'est pas concave), mais un calcul élémentaire montre que

$$\alpha=\frac{R-2}{\sqrt{R+2}}\leqq h_1'\leqq\frac{(R-2)\sqrt{R}}{2\sqrt{2}}=\beta .$$

Comme $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R(R+2)}}=0{,}6188503\ldots>\frac{1}{2}$, la Proposition montre que $g$ a une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue.

Pour $0\leqq r\leqq 4$, soit $f_r(x)=rx(1-x)$. Alors $f_r$ applique $[0,1]$ dans lui-même. En particulier $f_R$ permute les intervalles $[1/R, 1-1/R]$ et $[1-1/R, R/4]$. Si l'on pose $\Psi(x)=(R-1-Rx)/(R-2)$, il vient $\Psi\left[\frac{1}{R}, 1-\frac{1}{R}\right]=[0,1]$ et $\Psi\circ f_R\circ\Psi^{-1}(x)=(R-2)x(x-1)$, donc $\psi\circ f_R\circ f_R\circ\Psi^{-1}(x)=g(x)$. Du résultat obtenu plus haut pour $g$, on déduit que $f_R\circ f_R$ a une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\left[\frac{1}{R}, 1-\frac{1}{R}\right]$, donc que $f_R$ a une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\left[\frac{1}{R}, \frac{R}{4}\right]$. Ceci confirme une conjecture de Dunet, Sakowitsch et Taranco [1].

En général, on peut conjecturer que $f_r$ a une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue quand l'image du point critique $\frac{1}{2}$ par une itérée de $f_r$ tombe sur une orbite périodique répulsive.

## Bibliographie


1. Dunet, H., Sakowitsch, M., Taranco, A.: Etude de mesures invariantes par une famille de transformations liées à la biologie. Thèse 3ème cycle, Paris VII (1975)
2. Iakobson, M.V.: On smooth mappings of the circle into itself. Mat. Sbornik **85**, 163—188 (1971)
3. Lasota, A., Yorke, J.A.: On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **186**, 481—488 (1973)
4. Lorenz, E.N.: Deterministic nonperiodic flow. J. atmos. Sci. **20**, 130—141 (1963)
5. May, R.M.: Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature **261**, 459—467 (1976)
6. Ruelle, D.: Thermodynamic formalism. Reading, Mass.: Addison-Wesley (to appear)
7. Ruelle, D., Takens, F.: On the nature of turbulence. Commun. math. Phys. **20**, 167—192 (1971); **23**, 343—344 (1971)
8. Ulam, S.M., Neumann, J. von: On combination of stochastic and deterministic processes. Preliminary report. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 1120 (1947)


Transmis par J. L. Lebowitz

Reçu le 16 mars 1977