Commun. math. Phys. 32, 305—311 (1973)

Une extension d'un théorème de A. Connes sur les facteurs constructibles

P. Ghez

Université de Provence – U.E.R. de Luminy

R. Lima

Attaché de Rècherches – C.N.R.S.

D. Testard

Collège Scientifique Universitaire – Centre Universitaire d'Avignon

Received December 19, 1972

Abstract. The aim of this work is the proof of a Theorem caracterising the invariant $S(\mathfrak{A})$, in a constructible factor, when $\mathscr{G}$ is an ergodic group but not necessarily freely acting on a measure space $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{m})$.

I. Introduction

Le but de ce travail est de démontrer un théorème caractérisant l'invariant $S(\mathfrak{A})$, cf. [1], dans le cas où $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Von Neumann construite comme dans [2], à partir d'un espace mesurable de Lebesgue $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{m})$ et d'un groupe discret et dénombrable $\mathscr{G}$ d'automorphismes agissant ergodiquement et de façon non singulière sur $\boldsymbol{Z}$.

Ceci étend un résultat de [1] au cas où l'on n'impose pas à $\mathscr{G}$ d'agir presque librement sur $\boldsymbol{Z}$.

Nous résumons la construction décrite dans [2].

Considérons le champ d'espaces de Hilbert complexes sur $\boldsymbol{Z}$ associant à chaque point $x \in \boldsymbol{Z}$, l'espace hilbertien $\mathfrak{H}_x$ de dimension égale au nombre (au plus dénombrable) de points de l'orbite $\mathscr{G}x$ de x. Nous pourrons dorénavant noter e_y, $y \in \mathscr{G}x$ les éléments d'une base orthonormée de $\mathfrak{H}_x$, $x \in \boldsymbol{Z}$, en identifiant tous les $\mathfrak{H}_y$, $y \in \mathscr{G}x$.

On munit le champ

$$x \mapsto \mathfrak{H}_x, \quad x \in \boldsymbol{Z} \tag{1.1}$$

d'une structure de champ mesurable d'espaces de Hilbert ([4], II.1) de telle sorte que le champ de vecteurs v, défini par

$$x \mapsto v_x, \quad x \in \boldsymbol{Z} \tag{1.2}$$

soit mesurable si $\forall S \in \mathscr{G}$ l'application

$$x \mapsto \langle v_x, e_{Sx} \rangle_{\mathfrak{H}x} \tag{1.3}$$

est mesurable, et on désigne par $\mathfrak{H}$ l'intégrale hilbertienne

$$\int^{\oplus} \mathfrak{H}_x \, d\boldsymbol{m}(x). \tag{1.4}$$

Notons $\mathfrak{A}_0$ la sous-algèbre abélienne de $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ engendrée par les operateurs décomposables $\hat{a} \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$:

$$\hat{a} = \int^{\oplus} \hat{a}_x \, d\boldsymbol{m}(x) \tag{1.5}$$

où

$$\hat{a}_x e_y = a(y) e_y, \quad a \in \boldsymbol{L}_c^\infty(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{m}), \quad y \in \mathscr{G}x, \quad e_y \in \mathfrak{H}_x$$

et par $\mathfrak{A}$ l'algèbre de von Neumann sur $\mathfrak{H}$ engendrée par $\mathfrak{A}_0$ et les opérateurs décomposables $\hat{S} \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, $S \in \mathscr{G}$:

$$\hat{S} = \int^{\oplus} \hat{S}_x \, d\boldsymbol{m}(x) \tag{1.6}$$

où

$$\hat{S}_x e_y = e_{Sy}, \qquad y \in \mathscr{G}x, \qquad e_y \quad \text{et} \quad e_{Sy} \in \mathfrak{H}_x .$$

Rappelons que, d'après [2], $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des opérateurs décomposables $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ vérifiant pour presque tout $x \in \boldsymbol{Z}$:

$$A_y = A_x \qquad \forall y \in \mathscr{G}x . \tag{1.7}$$

Alors, cf. [2], $\mathfrak{A}_0$ est une sous-algèbre maximale abélienne de $\mathfrak{A}$ et est un facteur qui est de type II s'il existe une mesure μ sur $\boldsymbol{Z}$, σ-finie invariante par $\mathscr{G}$ et équivalente à $\boldsymbol{m}$ (étant de type II_1, si μ peut être bornée et II_∞ si non) et est de type III dans le cas contraire.

Nous noterons dans ce qui suit par $\beta(x, Sx)$, $x \in \boldsymbol{Z}$ et $S \in \mathscr{G}$ la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure $S^{-1}\boldsymbol{m}$ par rapport à $\boldsymbol{m}$ au point x, i.e.

$$d\boldsymbol{m}(Sx) = \beta(x, Sx) \, d\boldsymbol{m}(x). \tag{1.8}$$

Cette fonction vérifie, $\forall S, T \in \mathscr{G}$ les relations

$$\beta(x, TSx) = \beta(x, Sx)\, \beta(Sx, TSx) \quad \text{pour p. } \forall x \in \boldsymbol{Z} \tag{1.9}$$

et

$$\beta(x, Sx)\, \beta(Sx, x) = 1 \quad \text{pour p. } \forall x \in \boldsymbol{Z} . \tag{1.10}$$

La fonction caractéristique d'un sous-ensemble mesurable $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{Z}$ sera notee $\chi_{\boldsymbol{A}}$.

Nous disons qu'un sous-ensemble mesurable $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{Z}$ bicommute avec la mesure $\boldsymbol{m}$ si quel que soit $T \in \mathscr{G}$ qui laisse $\boldsymbol{m}$ invariante, on a:

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{E} \Delta T(\boldsymbol{E})) = 0 \tag{1.11}$$

où Δ désigne la différence symétrique et $T(\boldsymbol{E}) = \{x \in \boldsymbol{Z}, T^{-1}x \in \boldsymbol{E}\}$.

II. Les résultats

Lemme 1. *L'application φ de $\mathfrak{A}^+$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par*

$$\varphi(a) = \int^{*} \langle e_x, a_x e_x \rangle \, d\boldsymbol{m}(x) \tag{2.1}$$

où $\int^{*}$ désigne l'intégrale supérieure, $a \in \mathfrak{A}^+$ et

$$a = \int^{\oplus} a_x \, d\boldsymbol{m}(x) \tag{2.2}$$

est un poids normal, fidèle, semi-fini sur $\mathfrak{A}$ qui est fini si et seulement si la mesure $\boldsymbol{m}$ est bornée.

Démonstration. φ est, clairement, un poids qui est fini si et seulement si $\boldsymbol{m}$ est bornée.

Si $\boldsymbol{m}$ n'est pas bornée, soit $\boldsymbol{E}_n$ une suite croissante de sous-ensembles mesurables de $\boldsymbol{Z}$, chaqun ayant une mesure finie et telle que l'union des $\boldsymbol{E}_n$ soit $\boldsymbol{Z}$. Soit ξ_n le champ (de carré intégrable) de $\mathfrak{H}$ défini par:

$$x \mapsto \chi_{\boldsymbol{E}_n}(x) e_x \in \mathfrak{H}_x \quad \text{pour p. } \forall x \in \boldsymbol{Z} . \tag{2.3}$$

Alors

$$\varphi = \sup_n \omega_{\xi_n} \tag{2.4}$$

où ω_ξ désigne le poids vectoriel associé à $\xi \in \mathfrak{H}$.

Ceci montre que φ est normal. Par ailleurs φ est fidèle car

$$\varphi(b^* b) = 0 \Rightarrow b_x e_x = 0 \quad \text{pour p. } \forall x \in \boldsymbol{Z} \tag{2.5}$$

où $b \in \mathfrak{A}$ est défini par

$$b = \int^{\oplus} b_x \, d\boldsymbol{m}(x) . \tag{2.6}$$

Il en résulte, d'après (1.7) et la dénombrabilité de $\mathscr{G}$, que $b=0$. Pour démontrer que φ est semi-fini nous remarquons que la suite définie plus haut tend fortement vers l'identité, en utilisant, par exemple le vecteur séparateur de $\mathfrak{H}$ défini par:

$$x \mapsto f(x) e_x \in \mathfrak{H}_x \tag{2.7}$$

où $f \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{m})$ et $f(x) > 0$, pour p. $\forall x \in \boldsymbol{Z}$. La semi-finitude résulte alors de [4] (1.4, Proposition 4).

Le poids ainsi défini munit l'algèbre

$$\mathfrak{B} = \{a \in \mathfrak{A}, \varphi(a a^*) < +\infty \quad \text{et} \quad \varphi(a^* a) < +\infty\} \tag{2.8}$$

d'une structure d'algèbre hilbertienne à gauche, cf. [5]. Cette algèbre hilbertienne est achevée.

Nous notons alors J_φ, Δ_φ et σ_t^φ l'involution isométrique, l'opérateur modulaire et le groupe d'automorphismes modulaires introduit dans [5].

Nous avons alors le resultat suivant:

Lemme 2. *Les éléments de* $\mathfrak{A}$ *de la forme* $\hat{a}\hat{S}$, $S \in \mathcal{G}$, $\hat{a} \in \mathfrak{A}_0$, *les fonctions a et a. S s'annulant en dehors d'un ensemble de mesure finie, forment un ensemble total dans* $\mathfrak{B}$ *pour le produit scalaire*

$$(a, b) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \mapsto \langle a, b \rangle_{\#} = \varphi(a^* b) + \varphi(b^* a^*). \tag{2.9}$$

Démonstration. Il est clair que $\hat{a}\hat{S} \in \mathfrak{B}$. Soit alors $b \in \mathfrak{A}$ tel que

$$0 = \varphi(b\hat{a}\hat{S}) + \varphi(\hat{a}\hat{S}b) \tag{2.10}$$

où $\hat{a}\hat{S}$ parcourt l'ensemble décrit dans l'énoncé. Alors

$$0 = \int (1 + \beta(x, S^{-1}x))\, a(x) \langle e_{S^{-1}x}, b_x e_x \rangle \, d\boldsymbol{m}(x)$$

où l'on a utilisé (1.7) dans les conditions de l'énoncé. Il en résulte que:

$$\forall S \in \mathcal{G} \; \langle e_{S^{-1}x}, b_x e_x \rangle = 0 \quad \text{pour p. } \forall x \in \boldsymbol{Z}.$$

Le résultat final est alors une conséquence de la dénombrabilité de $\mathcal{G}$ en utilisant à nouveau (1.7). □

Lemme 3. *Les applications* $\sigma_t^\varphi (t \in \mathbb{R})$ *définies dans* $\mathfrak{A}$ *par:*

1) $\sigma_t^\varphi(a)$ *est décomposable.*

2) $\langle e_y, (\sigma_t^\varphi(a))_x e_z \rangle = \beta(z, y)^{it} \langle e_y, a_x e_z \rangle \quad \forall y, z \in \mathcal{G}x$

forment un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathfrak{A}$.

σ_t^φ *laisse* $\mathfrak{B}$ *invariant et satisfait à la condition K.M.S. pour le poids* φ. *Par conséquent l'opérateur modulaire* Δ_φ *vérifie*

$$\langle e_y, (\Delta_\varphi(a))_x e_z \rangle = \beta(z, y) \langle e_y, a_x e_z \rangle \qquad \forall y, z \in \mathcal{G}x.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\sigma_t(a) = U_t a U_t^{-1}$ où U_t est l'opérateur décomposable, dépendant fortement continument de t, défini par:

$$\langle (U_t v)_x, e_y \rangle = \beta(x, y)^{it} \langle v_x, e_y \rangle \quad \text{pour p. } \forall x \in \boldsymbol{Z},\; y \in \mathcal{G}x.$$

σ_t^φ laisse évidemment stable $\mathfrak{B}$ et, pour vérifier la condition K.M.S., il suffit, d'après le Lemme 2, de voir que $\varphi(\hat{S}\hat{a}\Delta(b)) = \varphi(b\hat{S}\hat{a})$, ce qui fait l'objet du calcul suivant:

$$\begin{aligned}
\varphi(\hat{S}\hat{a}\Delta(b)) &= \int \langle e_x, \hat{S}_x \hat{a}_x \Delta(b)_x e_x \rangle \, d\boldsymbol{m}(x) \\
&= \int \langle e_x, \hat{S}_x \hat{a}_x e_{S^{-1}x} \rangle \langle e_{S^{-1}x}, \Delta(b)_x e_x \rangle \, d\boldsymbol{m}(x) \\
&= \int a(S^{-1}x)\, \beta(x, S^{-1}x) \langle e_{S^{-1}x}, b_x e_x \rangle \, d\boldsymbol{m}(x) \\
&= \int a(S^{-1}x)\, \beta(x, S^{-1}x) \langle e_{S^{-1}x}, b_{S^{-1}x} e_{SS^{-1}x} \rangle \, d\boldsymbol{m}(x) \\
&= \int a(x) \langle e_x, b_x e_{Sx} \rangle \, d\boldsymbol{m}(x) \\
&= \varphi(b\hat{S}\hat{a}).
\end{aligned}$$

Le résultat suivant est alors immédiat:

Lemme 4. *Supposons m bornée de masse totale 1. La représentation de Gelfand-Naimark-Segal déduite de l'état normal fidèle φ est décrite comme suit: $\mathfrak{H}_\varphi = \mathfrak{H}$, $\Pi_\varphi(a) = a$, $\forall a \in \mathfrak{A}$, $\xi_\varphi \in \mathfrak{H}$ est le champ de vecteurs de carré intégrable défini par $\xi_\varphi : x \mapsto e_x \in \mathfrak{H}_x$. L'opérateur modulaire et l'involution isométrique sont alors l'opérateur décomposable Δ_φ tel que:*

$$\langle (\Delta_\varphi v)_x, e_y \rangle_{\mathfrak{H}_x} = \beta(x, y) \langle v_x, e_y \rangle_{\mathfrak{H}_x}$$

et l'opérateur J_φ tel que

$$\langle (J_\varphi v)_x, e_y \rangle_{\mathfrak{H}_x} = \beta(x, y)^{1/2} \langle e_x, v_y \rangle_{\mathfrak{H}_y}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal qui généralise le Théorème 4 de [3].

Théorème 5. *Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre de von Neumann construite à partir de $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{m}$, $\mathscr{G}$ comme dans l'introduction.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $\lambda \in \boldsymbol{S}(\mathfrak{A})$ *cf.* [1].

2) [*resp.* 3]: *$\forall \boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{E}$ mesurable non négligeable (resp. $\boldsymbol{E}$ mesurable non négligeable et bicommutant avec $\boldsymbol{m}$) et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\boldsymbol{S} \in \mathscr{G}$ tel que l'ensemble*

$$\{x \in \boldsymbol{E} \cap S(\boldsymbol{E}) \quad et \quad |\beta(x, Sx) - \lambda| < \varepsilon\}$$

soit non négligeable.

4) $\lambda \in \mathrm{r}(\mathscr{G})$ [6].

Démonstration. (2)$\Leftrightarrow$(4) est clair. Il en résulte que, pour montrer (1)$\Rightarrow$(2), on peut remplacer la mesure $\boldsymbol{m}$ par une mesure équivalente que nous supposerons bornée et de masse totale 1. D'après [3], λ appartient à $\boldsymbol{S}(\mathfrak{A})$ si et seulement si λ appartient aux spectres des opérateurs $eJ_\varphi eJ_\varphi \Delta_\varphi$ lorsque e parcourt un ensemble de projecteurs non nuls contenant ceux du centre C_φ de l'algèbre $\mathfrak{A}_\varphi$ des éléments invariants par l'automorphisme modulaire σ_t^φ. D'après le Lemme 3, on a $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_\varphi$ et en outre $C_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi \cap \mathfrak{A}'_\varphi \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0$. L'ensemble des éléments de la forme $e = \hat{\chi}_{\boldsymbol{E}}$, où $\boldsymbol{E}$ est un ensemble mesurable non négligeable contient donc tous les projecteurs de C_φ. Par suite $\lambda \in Sp(\hat{\chi}_{\boldsymbol{E}} J_\varphi \hat{\chi}_{\boldsymbol{E}} J_\varphi \Delta_\varphi) \forall \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}$ mesurable non négligeable. Mais, d'après le Lemme 4, les $\hat{\chi}_{\boldsymbol{E}} J_\varphi \hat{\chi}_{\boldsymbol{E}} J_\varphi \Delta_\varphi$ sont les opérateurs décomposables pour lesquels on a:

$$\langle (\hat{\chi}_{\boldsymbol{E}} J_\varphi \hat{\chi}_{\boldsymbol{E}} J_\varphi \Delta_\varphi v)_x, e_y \rangle = \beta(x, y)\, \chi_{\boldsymbol{E}}(x)\, \chi_{\boldsymbol{E}}(y) \langle v_x, e_y \rangle$$

ce qui prouve (1)$\Rightarrow$(2).

Comme (2)$\Rightarrow$(3), il suffit maintenant de montrer que (3)$\Rightarrow$(1). Soit e un projecteur de C_φ. D'après ce qui précède, e est de la forme $\hat{\chi}_{\boldsymbol{E}}$,

$\boldsymbol{E}$ mesurable non négligeable. Soit $T \in \mathscr{G}$ tel que $T\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}$. D'après le Lemme 3, on a $\hat{T} \in \mathfrak{A}_\varphi$ et donc $\boldsymbol{E}$ bicommute avec $\boldsymbol{m}$. Considérons l'ensemble $\boldsymbol{I}_n = \{x \in \boldsymbol{E} \cap S(\boldsymbol{E})$ et $|\beta(x, Sx) - \lambda| < \varepsilon\}$ que l'on suppose non négligeable d'après (3). On a alors:

$$e J_\varphi e J_\varphi \Delta_\varphi(\hat{S}\hat{\chi}_{\boldsymbol{I}_n}) = \Delta_\varphi(\hat{S}\hat{\chi}_{\boldsymbol{I}_n})$$

d'où

$$\|e J_\varphi e J_\varphi \Delta_\varphi(\hat{S}\hat{\chi}_{\boldsymbol{I}_n}) - \lambda \hat{S}\hat{\chi}_{\boldsymbol{I}_n}\| \leqq \varepsilon \|\hat{S}\hat{\chi}_{\boldsymbol{I}_n}\|$$

où la norme est prise au sens du produit scalaire $(a, b) \mapsto \varphi(a^* b)$. □

Remarque. Dans la démonstration précédente nous avons aussi montré que les projecteurs de C_φ ont la propriété d'être des $\hat{\chi}_{\boldsymbol{E}}$, où $\boldsymbol{E}$ bicommute avec $\boldsymbol{m}$.

Corollaire 1. *Si le stabilisateur $\mathscr{G}_0$ de $\boldsymbol{m}$ dans $\mathscr{G}$ agit ergodiquement dans $\boldsymbol{Z}$, alors le spectre de Δ_φ est $\boldsymbol{S}(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. D'après la remarque précédente et l'ergodicité de $\mathscr{G}_0$ les seuls projecteurs de C_φ sont 0 et 1. Le résultat est alors une conséquence de [7].

Corollaire 2. *Si, aux conditions du corollaire précédent, on ajoute que $\mathscr{G}_0$ est un sous-groupe distingué de $\mathscr{G}$, alors*

(i) $\forall S \in \mathscr{G},\ \exists \lambda_S \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\lambda_S = \beta(x, Sx)$ *pour p.* $\forall x \in \boldsymbol{Z}$.

(ii) $\boldsymbol{S}(\mathfrak{A}) = \overline{\{\lambda_S, S \in \mathscr{G}\}}$.

Démonstration. Remarquons que

$$\forall T \in \mathscr{G}_0,\ \forall S \in \mathscr{G} \quad \text{on a, pour p.}\ \forall x \in \boldsymbol{Z},$$

$$\begin{aligned}\beta(Tx, STx) &= \beta(x, STx) = \beta(x, T'Sx) = \beta(x, Sx), \beta(Sx, T'Sx)\\ &= \beta(x, Sx)\end{aligned}$$

où $T' = STS^{-1} \in \mathscr{G}_0$ et où nous avons utilisé (1.9). (i) résulte alors de l'ergodicité de $\mathscr{G}_0$. (ii) résulte du (2) du Théorème 5 et du fait que $\boldsymbol{S}(\mathfrak{A})$ est fermé. □

Remerciements. Nous remercions Alain Connes pour nous avoir communiqué, avant parution, ses notes concernant la référence 7 et O. de Pazzis pour de nombreux éclaircissements.

References

1. Connes, A.: Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann. C.R. Acad. Sc. Paris **273**, série A, p. 900 (1971)
2. Krieger, W.: Journal of Functional Analysis **6**, 97 (1970)
3. Connes, A.: Une classification des facteurs de type III. C.R. Acad. Sc. Paris **275**, série A, p. 523 (1972)

4. Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Gauthier-Villars 1969
5. Takesaki, M.: Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. Lecture notes in Mathematics **128**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
6. Krieger, W.: On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space. Contributions to ergodic theory and probability. Lecture notes in Mathematics **160**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
7. Connes, A.: Notes manuscriptes (à paraître)

P. Ghez
R. Lima
D. Testard
Centre de Physique Théorique
31, Chemin J. Aiguier
F-13274 Marseille Cedex 2
France