Commun. math. Phys. 20, 111—122 (1971)

Ein Existenzbeweis für Lösungen des klassischen Zweielektronenproblems

R. FLUME

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

Eingegangen am 8. Mai 1970

Abstract. A method due to Hale and Stokes [3] proving the existence of solutions of the classical relativistic equation of motion of an electron in a given electromagnetic field is extended to the two-electron problem. A lower bound of the impact parameter assures the applicability of the method.

Einleitung

Klassische Bewegungsgleichungen für ein System punktförmiger geladener Teilchen sind zuerst von Dirac [1] angegeben worden. Speziell für das Zweielektronenproblem lauten diese Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_a^\mu &= eF_{r,b}^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu,a} + \tfrac{2}{3}e^2(\dddot{x}_a^\mu - (\ddot{x})^2\dot{x}_a^\mu) \\ m\ddot{x}_b^\mu &= \cdots\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Teilchen werden durch die Indizes a, b gekennzeichnet. Punkte bedeuten Ableitungen nach der Eigenzeit. Die Metrik ist festgelegt auf $\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu = -1$; $(\ddot{x})^2 = \ddot{x}^\mu\ddot{x}_\mu$; es ist $c \equiv 1$ gesetzt.

e und m sind die Elektronenladung bzw. -masse. $F_{r,b}^{\mu\nu}$ ist das aus den Liénard-Wichertschen Potentialen abgeleitete, vom Teilchen b erzeugte retardierte Feld. Um die für die Bewegungsgleichungen möglicherweise vorhandenen sog. run-away-Lösungen, d. h. Lösungen, die keine Grenzwerte für die Impulse der auslaufenden Teilchen liefern, auszuschließen, werden die folgenden asymptotischen Bedingungen an die Lösungen $x_{a,b}^\mu(\tau)$ gestellt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu(\tau) &\to 0 \\ |\tau| &\to 0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &\to \dot{x}_{\text{in}}^\mu, & \dot{x}^\mu &\to \dot{x}_{\text{out}}^\mu \\ \tau &\to -\infty & \tau &\to \infty\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Auf Grund dieser asymptotischen Bedingungen können die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des integrierenden Faktors $\exp(-\tau/\tau_0)$ in Integrodifferentialgleichungen umgeschrieben werden (siehe Rohrlich [2]).

$$\tau_0 = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{m}}$$

$$\dot{x}_a^\mu(\tau) = \int_\tau^\infty \exp\left(\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}\right)\left\{F_{r.b}^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu,a}\cdot\frac{3}{2e} - (\ddot{x})_a^2\dot{x}_a^\mu\right\}d\tau' \tag{4}$$

$$\dot{x}_b^\mu(\tau) = \int_\tau^\infty \cdots d\tau',$$

$$\dot{x}_a^\mu(\tau) = \dot{x}_{a,\mathrm{in}}^\mu + \int_{-\infty}^\tau d\tau' \exp(\tau'/\tau_0)\int_{\tau'}^\infty \exp(-\tau''/\tau_0)$$

$$\cdot\left\{F_{r.b}^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu,a}\cdot\frac{3}{2e} - (\ddot{x})_a^2\dot{x}_a^\mu\right\}d\tau'', \tag{5}$$

$$\dot{x}_b^\mu(\tau) = \dot{x}_{b,\mathrm{in}}^\mu + \int_{-\infty}^\tau \cdots .$$

Die Existenz der Integrale in (4) und (5) ist äquivalent den asymptotischen Forderungen (3), (4).

Für eine Klasse von Einteilchenproblemen lieferten Hale u. Stokes einen Existenzbeweis für Lösungen der den Gl. (4), (5) entsprechenden Einteilchenintegrodifferentialgleichungen. Es wird versucht, die Methode des Existenzbeweises von Hale u. Stokes auf das Zweikörperproblem auszudehnen.

Reduktion des Problems

Im folgenden wird unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen die Existenz einer Lösung von (4), (5) bewiesen, die speziell im Schwerpunktsystem die Symmetrie aufweist:

$$\boldsymbol{x}_a(\tau) = -\boldsymbol{x}_b(\tau), \qquad x_a^4(\tau) = x_b^4(\tau), \qquad x^\mu = (\boldsymbol{x}, x^4). \tag{6}$$

Für die Notwendigkeit dieser Symmetrie kann, ohne daß irgendwelche Erhaltungssätze bemüht werden, folgendes Eindeutigkeitsargument gemacht werden: Wegen der Raumspiegelungsinvarianz der Bewegungsgleichungen sind die raumgespiegelten Bahnen einer Lösung wieder Lösungen der Bewegungsgleichungen. Unter einer Raumspiegelung speziell im Schwerpunktsystem und gleichzeitiger Vertauschung der Indizes a, b ändern sich die Anfangsbedingungen nicht. Wird Eindeutigkeit der Lösungen bei vorgegebenen Stoßparametern und Impulsen der einlaufenden Teilchen vorausgesetzt, muß also die Lösung unter Raumspiegelung im Schwerpunktsystem und Vertauschung der Teilchenindizes in sich übergehen, mithin die Bahnen der Teilchen die besagte Symmetrie besitzen.

Mit Hilfe dieser Symmetrie können die in $F^{\mu\nu}_{r,b}$ vorkommenden Bewegungsgrößen des Teilchens b durch die des Teilchens a ausgedrückt werden. Wird für die Gleichung

$$\ddot{x}^{\mu}_{a}(\tau)=\int_{\tau}^{\infty}\exp\left(\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}\right)\left\{\frac{3}{2e}F^{\mu\nu}_{r,b}\dot{x}_{\nu,a}-(\ddot{x})^2_a\,\dot{x}^{\mu}_{a}\right\}d\tau' \tag{7}$$

die Existenz einer Lösung gezeigt, so ist wegen der Raumspiegelungsinvarianz

$$\boldsymbol{x}_a(\tau)=-\boldsymbol{x}_b(\tau),\qquad x^4_a(\tau)=x^4_b(\tau)$$

Lösung des Gesamtsystems.

Die Fixpunktmethode

a) Allgemeine Beschreibung der Methode

Im folgenden wird eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (7) gesucht, die in einer noch zu definierenden Menge M_1 stetiger Vektorfunktionen $\ddot{f}^{\mu}(\tau)$ liegt. Wenn zu den „Beschleunigungen" $\ddot{f}^{\mu}(\tau)$ die „Geschwindigkeiten" $\dot{f}^{\mu}(\tau)=\int\ddot{f}^{\mu}\,d\tau$ und „Ortskoordinaten" $f^{\mu}(\tau)=\int\dot{f}^{\mu}\,d\tau'$ konstruiert werden, kann auf M_1 eine der Lorentzkraft entsprechende Operation F erklärt werden:

$$(F\ddot{f})^{\mu}=\frac{3}{2e}F^{\mu\nu}\dot{f}_{\nu}\,,$$

$$F^{\mu\nu}=F^{\mu\nu}(\ddot{f}^{\lambda},\dot{f}^{\lambda},f^{\lambda})\,.$$

Auf der Produktmenge $(M_1\times FM_1)$ wird die der Gl. (7) entsprechende Integraloperation J erklärt:

$$(J(\ddot{x}^{\lambda},\ddot{y}^{\lambda}))^{\mu}(\tau)=\int_{\tau}^{\infty}\exp\left(\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}\right)\{\ddot{y}^{\mu}-(\ddot{x})^2\,\dot{x}^{\mu}\}\,d\tau'$$

$$(\ddot{x}^{\mu},\ddot{y}^{\mu})\in(M_1\times(FM_1))\,.$$

Es wird gezeigt werden, daß die Abbildung $J(M_1\times F(M_1))$ den Bedingungen eines Fixpunktsatzes genügt, sofern die Inklusion $J(M_1\times F(M_1))\subset M_1$ gewährleistet ist. Ein Fixpunkt der Abbildung stellt eine Lösung der Gl. (7) dar.

b) Mathematische Grundlagen

Bezüglich des Funktionenraumes $C = \{\ddot{f}^\mu(\tau); \ddot{f}: R^1 \to R^4 \text{ stetig}\}$ werden einige Definitionen eingeführt. C wird mit der kompakt-offenen Topologie J versehen. Eine Subbasis von J stellen die Mengen dar:

$$V_{U,W} =: \{\ddot{f}^\mu; \ddot{f}^\mu \in C, \ddot{f}^\mu(U) \subset W,\ U \subset R^1,\ U \text{ kompakt},\ W \subset R^4, W \text{ offen}\}.$$

In C wird eine Familie von Halbnormen eingeführt:

$$x^\mu(\tau) \in C, \qquad p_n(x^\mu) = \sup_{-n \leqq \tau \leqq n} \|x^\mu(\tau)\|, \qquad n = 1, 2 \ldots .$$

$\|\ \|$ sei eine Vektornorm in R^4. Folgende Mengen $V_{n,\varepsilon}$ bilden eine Subbasis des Umgebungssystems der Einheit in C, d. h. der Funktion 0:

$$V_{n,\varepsilon} = \{\ddot{x}^\mu, \ddot{x}^\mu \subset C, p_n(x^\mu) \leqq \varepsilon\}, \qquad n = 1, 2 \ldots, \varepsilon > 0 .$$

Es läßt sich in C eine Metrik angeben, welche die kompakt-offene Topologie erzeugt. C ist bezüglich dieser Metrik vollständig. Hale u. Stokes [3] geben folgenden Fixpunktsatz an:

Satz 1. *Seien $M_1, M_2 \subset C, J, F$ Operatoren derart, daß 1. M_1 abgeschlossen und konvex 2. $J: (M_1 \times M_2) \to M_1$ stetig und $\overline{J(M_1 \times M_2)}$ kompakt (der Strich bedeute den topologischen Abschluß bezüglich der kompakt-offenen Topologie), $J(M_1 \times M_2) \subset M_1$, 3. $F: M_1 \to M_2$ stetig, dann gibt es ein Element $(h, s) \in (M_1 \times M_2)$, so daß gilt:*

$$J(h, s) = h, \qquad F(h) = s .$$

c) Anwendung des Fixpunktsatzes

Definition von M_1 und M_2:

$$f_1^i(\tau) = \frac{\kappa_i}{(\alpha_i + |\tau|)^2},$$

$$f_2^i(\tau) = \frac{\kappa_i}{(\alpha_i + |\tau|)^{2 + \frac{1}{2}\Theta(-\tau)}}, \qquad i = 1, 2 .$$

κ_i, α_i seien (später zu spezifierende) positive Konstanten; Θ ist die Heaviside-Sprungfunktion,

$$M_1 = \{\ddot{x}^\mu(\tau); \ddot{x}^\mu \in C, |\ddot{x}^1| \leqq f_1^1, |\ddot{x}^2| \leqq f_2^1, \ddot{x}^3 = 0\}, \tag{8}$$

$$M_2 = \{\ddot{y}^\mu(\tau); \ddot{y}^\mu \in C, |\ddot{y}^1| \leqq f_1^2, |\ddot{y}^2| \leqq f_2^2, \ddot{y}^3 = 0\}. \tag{9}$$

M_1, M_2 sind im Sinne der kompakt-offenen Topologie abgeschlossen und konvex.

Definition des Operators J:

$$\dot{x}^1 = v_- + \int_{-\infty}^{\tau} \ddot{x}^1 \, d\tau', \qquad \dot{x}^2 = \int_{-\infty}^{\tau} \ddot{x}^2 \, d\tau', \qquad \dot{x}^3 = 0\,, \tag{10}$$

$$(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \exp(\tau - \tau')\,(\ddot{y}^\lambda - (\dot{x})^2 \dot{x}^\lambda)\,d\tau'\,, \tag{11}$$

$$(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu) \in M_1 \times M_2{}^{1}.$$

Satz 2. *J ist stetig auf $M_1 \times M_2$ und $\overline{J(M_1 \times M_2)}$ ist kompakt.*

Beweis. a) Seien $\varepsilon > 0$, n (natürlich) vorgegeben. Es ist zu zeigen, daß es geeignete $\delta > 0$ und m (natürlich) gibt, derart, daß für

$$\ddot{x}_a^\mu, \ddot{x}_b^\mu \in M_1, \qquad \ddot{y}_a^\mu, \ddot{y}_b^\mu \in M_2\,,$$

$$(\ddot{x}_a^\mu - \ddot{x}_b^\mu) \in V_{\delta,m}, \qquad (\ddot{y}_a^\mu - \ddot{y}_b^\mu) \in V_{\delta,m}$$

gilt:

$$(J(\ddot{x}_a^\mu, \ddot{y}_a^\mu) - J(\ddot{x}_b^\mu, \ddot{y}_b^\mu)) \in V_{n,\varepsilon}\,.$$

Da die Abbildung $\ddot{x}^\mu \to \dot{x}$ im Sinne der kompakt-offenen Topologie auf M_1 stetig ist, wird die Stetigkeit von J aus der folgenden Majorisierung ersichtlich:

$$\begin{aligned}
&|\{J(\ddot{x}_a^\mu, \ddot{y}_a^\mu)^\lambda - J(\ddot{x}_b^\mu, \ddot{y}_b^\mu)^\lambda\}(\tau)| \\
&\qquad \leqq \int_{\tau}^{m} \exp(\tau - \tau')\,\{|\ddot{y}_a^\lambda - \ddot{y}_b^\lambda| + |\dot{x}_b^\lambda|\,|(\dot{x})_a^2 - (\dot{x})_b^2| + |(\dot{x})_a^2|\,|\dot{x}_a^\lambda - \dot{x}_b^\lambda|\}\,d\tau' \\
&\qquad + \int_{m}^{\infty} \exp(\tau - \tau')\,|\ddot{y}_a^\lambda - \ddot{y}_b^\lambda - (\dot{x})_a^2 \dot{x}_a^\lambda + (\dot{x})_b^2 \dot{x}_b^\lambda|\,d\tau'\,.
\end{aligned}$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Kompaktheit einer Menge M stetiger Funktionen (die einen regulären, lokal-kompakten Hausdorff-Raum X in einen uniformen Hausdorff-Raum Y abbilden – diese topologischen Eigenschaften liegen im Fall $R^1 \to R^4$ vor) gibt der Satz von Ascoli (Kelley, General Topology (1967), p. 235):

1. $\underline{M}$ ist abgeschlossen bezüglich der kompakt-offenen Topologie.
2. $\overline{M(x)}$ ist kompakt $\forall x \in X$ (der Strich über M bedeute hier die Abschlußoperation bezüglich der uniformen Topologie in Y)

$$M(x) = \{y;\, y \in Y, \exists\, f \in M, \text{mit}\, f(x) = y\}\,.$$

3. M ist gleichgradig stetig auf jeder kompakten Untermenge von X.

[1] Hier und im folgenden ist $\tau_0 \equiv 1$ gesetzt.

(1.) ist für $\overline{J(M_1 \times M_2)}$ per definitionem erfüllt. (2.) ist im vorliegenden Fall erfüllt, da $|(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^2|$ gleichmäßig beschränkt ist.

$$((\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu) \in M_1 \times M_2).$$

Die gleichgradige Stetigkeit ergibt sich aus der Abschätzung:

$$|(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda(\tau) - (J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda(\tau+\delta)|$$

$$= \left| \int_\tau^\infty \exp(\tau - \tau') \{\ddot{y}^\lambda - (\ddot{x})^2 \dot{x}^\lambda\} d\tau' - \int_{\tau+\delta}^\infty \exp(\tau + \delta - \tau') \{\ddot{y}^\lambda - (\ddot{x})^2 \dot{x}^\lambda\} d\tau' \right|$$

$$\leqq |(\exp\tau - \exp(\tau+\delta))| \int_\tau^\infty \exp(-\tau') |\ldots| d\tau' + \exp(\tau+\delta)$$

$$\cdot \int_\tau^{\tau+\delta} \exp(-\tau') |\ldots| d\tau',$$

wenn beachtet wird, daß die in den Integranden neben den Exponentialfunktionen vorkommenden, nicht ausgeschriebenen Faktoren gleichmäßig beschränkt sind.

Es werden die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} x^1(\tau) &= \int_0^\tau \dot{x}^1(\tau') d\tau', \\ x^2(\tau) &= \int_{-\infty}^\tau \dot{x}^2(\tau') d\tau' + b, \qquad x^3 \equiv 0, \end{aligned} \tag{12}$$

b ist der Stoßparameter.

(Die Bedingung $x^1(0) = 0$ bedeutet insofern eine Einschränkung, als der Stoßparameter so groß sein muß, daß die Teilchen tatsächlich durch $x_1 = 0$ gehen. Die Größe des Stoßparameters wird später noch eine entscheidende Rolle spielen.)

Definition des Operators F:

$$\begin{aligned} (F\ddot{x}^\lambda)^\mu = \frac{3}{2e} F^{\mu\nu}_{r,b} \dot{x}_{\nu,a} = \frac{3}{2} \Bigg\{ & \frac{1}{\varrho^2} (\dot{x}^\mu_b u^\nu - \dot{x}^\nu_b u^\mu) \\ & + \frac{1}{\varrho} (\ddot{x}^\mu_b \dot{x}^\nu_b - \ddot{x}^\nu_b \dot{x}^\mu_b + u^\nu \langle \dot{x}^\mu_b (\ddot{x}_{\lambda,b}, u^\lambda) + \ddot{x}^\mu_b \rangle) \\ & - \frac{1}{\varrho} u^\mu \langle \dot{x}^\nu_b (\ddot{x}_{\lambda,b}, u^\lambda) + \ddot{x}^\nu_b \rangle \Bigg\} \dot{x}_{\nu,a}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\varrho = -(\dot{x}^\mu_b, x_{\mu,a} - x_{\mu,b}), \qquad u^\mu = \frac{x^\mu_a - x^\mu_b}{\varrho} - \dot{x}^\mu_b.$$

x_b^μ soll die zu $x_a^\mu(\tau)$ retardierte Position des Elektrons b darstellen

$$x_b^\mu = x_b^\mu(\tau - \Delta), \qquad \dot{x}_b^\mu = \dot{x}_b^\mu(\tau - \Delta), \qquad \ddot{x}_b^\mu = \ddot{x}_b^\mu(\tau - \Delta),$$
$$(x_a^\mu(\tau) - x_b^\mu(\tau - \Delta))^2 = 0,$$
$$x_a^4(\tau) - x_b^4(\tau - \Delta) > 0.$$

Wegen der Raumspiegelungssymmetrie läßt sich die Bedingung umschreiben:

$$\begin{aligned} x_b^\mu &= (-\boldsymbol{x}_a(\tau - \Delta), x_a^4(\tau - \Delta)), \\ (\boldsymbol{x}_a(\tau) + \boldsymbol{x}_a(\tau - \Delta))^2 &- (x_a^4(\tau) - x_a^4(\tau - \Delta))^2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$ [2]

Satz 3. *F ist auf M_1 stetig.*

Die in F vorkommenden Größen $x^\mu(\tau)$, $\dot{x}^\mu(\tau)$, $x^\mu(\tau - \Delta)$, $\dot{x}^\mu(\tau - \Delta)$, $\ddot{x}^\mu(\tau - \Delta)$[3]. hängen im Sinne der kompakt-offenen Topologie stetig von $\ddot{x}^\mu$ ab. Der Ausdruck $F_{r,b}^{\mu\nu} x_\nu$ ist stetig in allen diesen Größen – und damit ist F eine stetige Operation bezüglich der kompakt-offenen Topologie – wenn gewährleistet ist, daß ϱ größer als eine positive Konstante ist.

$$\begin{aligned} \varrho &= \dot{x}^4(\tau - \Delta)\,(x^4(\tau) - x^4(\tau - \Delta)) + \dot{\boldsymbol{x}}(\tau - \Delta)\,(\boldsymbol{x}(\tau) + \boldsymbol{x}(\tau - \Delta)) \\ &\geqq (-|\dot{\boldsymbol{x}}| + \dot{x}^4)_{\tau - \Delta} \cdot \Delta t, \qquad \Delta t = x^4(\tau) - x^4(\tau - \Delta). \end{aligned}$$

Es werden die Größen v, γ definiert[3a].

$$v^2 := \left(v_-^2 - \frac{2\kappa}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa}{\alpha}\right)^2, \quad \gamma^2 := 1 + v^2, \quad \kappa = \kappa_1, \quad \alpha = \alpha_1. \tag{15}$$

Aus der Definition von M_1 ergibt sich:

$$v^2 \geqq \max_{-\infty \leqq \tau \leqq \infty,\, \ddot{x}^\mu \in M_1} (|\dot{x}^1|^2 + |\dot{x}^2|^2) \Rightarrow \varrho \geqq ((1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v)\Delta t \geqq \frac{1}{2\gamma}\Delta t, \tag{16}$$

$$\Delta t = |\boldsymbol{x}(\tau) + \boldsymbol{x}(\tau - \Delta)| = |\boldsymbol{x}(\tau) + \boldsymbol{x}(\tau) + \boldsymbol{w}\Delta t| \geqq 2|\boldsymbol{x}(\tau)| - \Delta t$$

($\boldsymbol{w}$ sei eine geeignete mittlere Geschwindigkeit),

$$\Delta t \geqq |\boldsymbol{x}(\tau)|. \tag{17}$$

Aus (16), (17) folgt:

$$\varrho > \frac{1}{2\gamma}|\boldsymbol{x}(\tau)|. \tag{18}$$

---

[2] Alle nicht kovarianten Ausdrücke beziehen sich auf das Schwerpunktsystem.

[3] Teilchenindizes werden von nun an im allgemeinen fortgelassen, da es sich nur noch um Größen des Teilchens a handelt.

[3a] κ, α seien so gewählt, daß $v_- > \dfrac{2\kappa}{\alpha}$.

$|\boldsymbol{x}(\tau)|$ wird nach unten abgeschätzt:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}(\tau)|^2 &= \left(\int_0^\tau \dot{x}^1\, d\tau'\right)^2 + \left(b + \int_{-\infty}^{\tau} \dot{x}^2\, d\tau'\right)^2 \\
&\geqq \left(\min_{\dot{x}^\mu \in M_1,\, -\infty \leqq \tau \leqq \infty} |\dot{x}^1|\right)^2 \tau^2 + \left(\max\left\{0, b - \int_{\infty}^{\tau} \max_{\dot{x}^\mu \in M_1} |\dot{x}^2|\, d\tau'\right\}\right)^2 \\
&\geqq \left(v_- - \frac{2\kappa}{\alpha}\right)^2 \tau^2 + \left(\max\left\{0, b - \frac{4}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right.\right. \qquad (19) \\
&\quad \left.\left. + \Theta(\tau)\left(\kappa \ln \frac{\alpha+\tau}{\alpha} - \left(\frac{2}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa}{\alpha}\right)\tau\right)\right\}\right)^2 \\
&\geqq \left(v_- - \frac{2\kappa}{\alpha}\right)^2 \tau^2 + \left(\max\left\{0, b - \frac{4}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}} - \Theta(\tau)\,\tau\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{2}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}\right)^2 \\
&=: r^2(\tau)\,.
\end{aligned}
$$

κ und α werden so gewählt, daß $\frac{4}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}} < b$. Dann ist $r(\tau)$ und damit auch $\varrho(\tau)$ stets größer als eine positive Konstante.

Aus dem Folgenden wird hervorgehoben, daß die Konstanten κ_2, α_2 so gewählt werden können, daß $F(M_1) = M_2^+ \subset M_2$ gilt[4]. Wenn noch gezeigt wird, daß durch geeignete Festlegung der Konstanten κ, α die Inklusion $J(M_1 \times M_2^+) \subset M_1$ gewährleistet ist, gibt es gemäß den Sätzen 1–3 einen Fixpunkt:

$$F(\dot{x}^\mu) = \dot{y}^\mu, \qquad J(\dot{x}^\mu, \dot{y}^\mu) = \dot{x}^\mu, \qquad (\dot{x}^\mu, \dot{y}^\mu) \in M_1 \times M_2^+,$$

was die Lösung des Zweielektronenproblems bedeutet.

Um $|(F\dot{x}^\mu)|$ abzuschätzen, werden zunächst einzelne in $F^{\mu\nu}\dot{x}_\nu$ vorkommende Größen majorisiert:

$$\frac{1}{\varrho} < \frac{2\gamma}{r(\tau)} \qquad (\text{gemäß } (18), (19))\,, \tag{20}$$

$$\frac{|x_a^\mu(\tau) - x_b^\mu(\tau - \Delta)|}{\varrho} \leqq \frac{2\gamma |x_a^\mu(\tau) - x_b^\mu(\tau - \Delta)|}{x_a^4(\tau) - x_b^4(\tau - \Delta)} \leqq 2\gamma\,, \tag{21}$$

$$|(\dot{x}_b^\nu(\tau - \Delta), \dot{x}_{\nu,a}(\tau))| \leqq 3\gamma^2 \tag{22}$$

Die Größe Δ ist durch (14) implizit definiert. Eine Dreiecksabschätzung mit Hilfe einer mittleren Geschwindigkeit und eine anschließende

[4] Siehe Gl. (28)–(30).

Majorisierung durch die Größe v führt zu der Ungleichung:

$$\Delta(0) \leqq \frac{2b + \frac{8}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{v}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}} =: \Delta_0 . \tag{23}$$

Aus (14) folgt:

$$\frac{d\Delta}{d\tau} \leqq 1 - \frac{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} + 1} =: 1 - \sigma \tag{24}$$

$$\Rightarrow |\tau - \Delta| > \max(0, \sigma\tau - \Delta_0) \quad \text{für} \quad \tau \geqq 0 \tag{25}$$

$$|\ddot{x}^1(\tau)| < \frac{\kappa}{(\alpha + |\tau|)^2}, \quad |\ddot{x}^2(\tau)| < \frac{\kappa}{(\alpha + |\tau|)^{2+\frac{1}{2}\Theta(-\tau)}} . \tag{8}$$

Es wird $\alpha > 1$ verlangt. Damit kann $|\ddot{x}^4|$ abgeschätzt werden durch:

$$|\ddot{x}^4| < \frac{2\kappa}{(\alpha + |\tau|)^2} . \tag{26}$$

Aus (25) und (8) folgt für $\tau \geqq 0$:

$$|\ddot{x}^\mu(\tau - \Delta)| < \begin{cases} \dfrac{\kappa}{(\alpha + \max(0, \sigma\tau - \Delta_0))^2} & \mu = 1, 2 \\[2ex] \dfrac{2\kappa}{(\alpha + \max(0, \sigma\tau - \Delta_0))^2} & \mu = 4 . \end{cases} \tag{27}$$

Die Majorisierungen (20)–(27) werden zur Abschätzung von $|(F(\ddot{x}^\mu))^\lambda|$ benutzt:

1. $\tau \geqq 0$

$$|(F(\ddot{x}^\mu))^\lambda| \leqq \frac{72\gamma^5}{r^2} + \frac{\kappa(288\gamma^5 + 42\gamma^3)}{r(\alpha + \max(0, \sigma\tau - \Delta_0))^2} =: G(\tau) \qquad \lambda = 1, 2 , \tag{28}$$

2. $\tau < 0$ $\quad |(F(\ddot{x}^\mu))^1| \leqq \dfrac{72\gamma^5}{r^2} + \dfrac{\kappa(288\gamma^5 + 42\gamma^3)}{r(\alpha + |\tau|)^2} =: G^1(\tau)$ (29)

$$\begin{aligned} |(F(\ddot{x}^\mu))^2| \leqq \frac{24\gamma^4\kappa}{r^2(\alpha + |\tau|)^{\frac{3}{2}}} &+ \frac{36\gamma^5\left(2b + \frac{8}{3}\frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)}{r^3} \\ &+ \frac{\kappa(288\gamma^5 + 12\gamma^3)}{(\alpha + |\tau|)^2 r} =: G^2(\tau) . \end{aligned} \tag{30}$$

$r(\tau)$ geht für ein positives τ' durch ein Minimum:

$$\frac{d}{d\tau} r(\tau') = 0 ,$$

$$\tau' = \frac{\left(b - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\right)}{\left(v_- - \frac{2\kappa}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\right)^2} . \tag{31}$$

Das Verhältnis κ/α ist später so klein zu wählen, daß

$$b - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{\alpha^{\frac{1}{2}}} - \tau' \left(\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \tag{32}$$

gilt. Für die linken Seiten von (28)–(30) kann die gleiche obere Schranke angegeben werden:

$$\begin{aligned} &|(F(\dot{x}^\mu))^\lambda| \leqq \frac{72\gamma^5}{r^2(\tau')} + \frac{\kappa(288\gamma^5 + 42\gamma^3)}{r(\tau')\alpha^2} =: \Gamma , \\ &\dot{x}^\mu \in M_1, \qquad \lambda = 1, 2, \qquad -\infty \leqq \tau \leqq \infty . \end{aligned} \tag{33}$$

Der im Integranden von J neben der Lorentzkraft vorkommende Term $(\ddot{x})^2 \dot{x}^\mu$ kann auf ähnliche Weise wie die Terme der Lorentzkraft abgeschätzt werden:

$$|(\ddot{x})^2 \dot{x}^\mu| < \frac{6\kappa^2 v}{(\alpha + |\tau|)^4}, \qquad -\infty \leqq \tau \leqq \infty, \qquad \mu = 1, 2 . \tag{34}$$

Die Inklusion $J(M_1 \times M_2^+) \subset M_1$ ist gemäß der Definition von M_1 äquivalent mit den Ungleichungen:

$$|(J(\dot{x}^\mu, \dot{y}^\mu))^\lambda(\tau)| \leqq \begin{cases} \dfrac{\kappa}{(\alpha + |\tau|)^2}, & \lambda = 1 \\ \dfrac{\kappa}{(\alpha + |\tau|)^{2 + \frac{1}{2}\Theta(-\tau)}}, & \lambda = 2 . \end{cases} \tag{35}$$

Im folgenden wird gezeigt, daß sich eine von der Anfangsgeschwindigkeit v_- abhängige Schranke für den Stoßparameter angeben läßt, oberhalb derer die Ungleichungen (34) erfüllt werden. Es wird keinesfalls die kleinste mögliche Schranke angegeben.

Die Konstanten κ, α werden festgelegt:

$$b = \kappa \cdot n = \alpha .$$

Die bisher an κ, α gestellten Forderungen werden durch b und n ausgedrückt:

$$b>1, \quad \frac{2}{n}<v_-, \tag{36a}$$

$$b-\frac{4}{3n}b^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{3}\frac{1}{nb^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\left(b-\frac{4}{3}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{3nb^{\frac{1}{2}}}\right)}{\left(v_--\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{3nb^{\frac{1}{2}}}\right)^2}>0, \tag{36b}$$

$$b-\frac{4}{3n}b^{\frac{1}{2}}>0.$$

n kann unabhängig von b so gewählt werden, daß

$$\frac{2}{n}\ll v_-, \qquad v_--\frac{2}{n}\gg\frac{1}{n}$$

und für $b>1$ (36b) jedenfalls erfüllt ist.

$|(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda|$ wird nach oben abgeschätzt, indem das Integral über die Summe der Majoranten der einzelnen Terme genommen wird und dieses Integral unter Ausnutzung von Eigenschaften der Majoranten noch einmal abgeschätzt wird. Die so erzielten Majoranten sollen in M_1 liegen!

1. $\tau<0$:

$$\begin{aligned}
|(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda| \underset{\lambda=1,2}{\leqq} & \int_\tau^{\tau/2} \exp(\tau-\tau')\left(G^\lambda(\tau')+\frac{6b^2v}{n^2(b+|\tau|)^4}\right)d\tau' \\
& +\int_{\tau/2}^{\infty} \exp(\tau-\tau')\left(\Gamma+\frac{6b^2v}{n^2b^4}\right)d\tau' \\
& \leqq\left(\exp\left(\frac{\tau}{2}\right)-\exp(\tau)\right)\left(G^\lambda\left(\frac{\tau}{2}\right)+\frac{6b^2v}{n^2(b+|\frac{\tau}{2}|)^4}\right) \\
& +\exp\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\Gamma+\frac{6v}{n^2b^2}\right)\overset{!}{\leqq}\begin{cases}\dfrac{b}{(b+|\tau|)^2}, & \lambda=1\\[2ex] \dfrac{b}{(b+|\tau|)^{\frac{3}{2}}}, & \lambda=2;\end{cases}
\end{aligned}\tag{37}$$

2. $0\leqq\tau\leqq\tau'$:

$$|(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda(\tau)| \underset{\lambda=1,2}{\leqq} \Gamma+\frac{6v}{n^2b^2}\overset{!}{\leqq}\frac{b}{n(b+\tau')^2}. \tag{38}$$

3. $\tau'<\tau$:

$$|(J(\ddot{x}^\mu, \ddot{y}^\mu))^\lambda(\tau)|\leqq G(\tau)+\frac{6b^2}{n(b+\tau)^4}\overset{!}{\leqq}\frac{b}{n(b+\tau)^2}. \tag{39}$$

Die einzelnen Summanden der linken Seiten der Ungleichungen (37)–(39) werden gegen Bruchteile der rechten Seiten abgeschätzt. Damit ergeben sich hinreichende Bedingungen für die Gleichgültigkeit von (37)–(39). Da die Größen v, σ, γ bei wachsendem b beschränkt bleiben (da $\kappa/\alpha = 1/n$ = konstant festgelegt worden ist), Δ_0 im wesentlichen linear mit b wächst, ist einzusehen, daß jede dieser Bedingungen für genügend großes b erfüllt ist, da Potenzen von τ – soweit es sich nicht um den exponentiell abfallenden Term in (37) handelt – auf den linken Seiten höchstens von der gleichen Größe wie auf den rechten Seiten auftauchen und in allen Termen der Minoranten kleinere Potenzen von b als in den Majoranten erscheinen.

Jede der als hinreichende Bedingungen anerkannten Ungleichungen liefert eine untere Schranke für den Stoßparameter, oberhalb derer sie erfüllt ist. Die größte der unteren Schranken für den Stoßparameter ist eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Ungleichung (35) und damit für die Existenz einer Lösung des Zweielektronenproblems. In den vorangegangenen Rechnungen wurden alle Größen ihrem Absolutbetrag nach abgeschätzt. Daher gilt der Existenzbeweis ebenso für das Elektron-Positronproblem. Durch die Begrenzung des Stoßparameters nach unten ist Einfang ausgeschlossen.

Herrn H. Lehmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

Literatur

1. Dirac, P. A. M.: Proc. Roy. Soc. (Lond.) A **167**, 148 (1938).
2. Rohrlich, F.: Classical charged particles. Reading/Mass.: Addison-Wesley 1965.
3. Hale, J. K., Stokes, A. P.: J. Math. Phys. **3**, 70 (1962).

R. Flume
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität
D-2000 Hamburg 50
Luruper Chaussee 149