Commun. math. Phys. 5, 262—287 (1967)

Produits tensoriels continus d'espaces et d'algèbres de Banach

A. Guichardet
Université de Poitiers, Faculté des Sciences

Reçu le 1er Mars, 1967

Abstract. The notion of tensor product of a family $(A_i)_{i \in I}$ of Banach algebras is generalized to the case when I is a topological space; in this case $\hat{\otimes}\, A_i$ is generated by some elements $\otimes\, x_i$, the family (x_i) being subjected to certain conditions: for instance the function $i \to \|x_i\|$ must be continuous. This notion is applied to Quantum Field Theory in the following sense: certain algebras of observables can be considered as continuous tensor products of simpler ones, namely of algebras of observables with one degree of freedom.

Table des matières

Introduction

De même que le produit tensoriel $E_1 \hat{\otimes} E_2$ de deux espaces de Banach est engendré par certains éléments $x_1 \otimes x_2$, le produit tensoriel d'une «famille continue» d'espaces de Banach $(E_i)_{i \in I}$ est engendré par certains éléments notés $\otimes\, x_i$; mais ici la famille (x_i) n'est pas un élément quelconque de $\Pi\, E_i$, elle est soumise à certaines conditions dites de «continuité», autrement dit elle doit appartenir à un certain sous-ensemble Γ de $\Pi\, E_i$ qu'on définit axiomatiquement (§ 5), d'une façon assez analogue à ce qui se fait pour définir les champs mesurables et surtout les champs continus d'espaces de Banach (cf. [2]). L'espace $\hat{\otimes}\, E_i$, produit tensoriel continu des E_i, est alors construit, tout comme dans le cas de deux espaces, comme quotient d'un espace L^1 (§ 5). Dans le cas de deux espaces, les éléments $x_1 \otimes x_2$ jouissent de deux propriétés remarquables: *d'* une part $\lambda_1 x_1 \otimes \lambda_2 x_2 = \lambda_1 \lambda_2 x_1 \otimes x_2$ (λ_1 et λ_2 scalaires), et d'autre part la distributivité par rapport à l'addition; on parvient à généraliser la première propriété en définissant au préalable (§ 4) le produit $\widehat{\Pi}\, \lambda_i$ d'une famille continue de nombres complexes: pour cela on se donne une mesure positive μ sur I et on pose $\widehat{\Pi}\, \lambda_i = \exp(\int \log \lambda_i \, d\mu(i))$, ce qui ne peut se faire qu'en imposant des conditions très restrictives à I et μ. Par contre, malheureusement, on ne voit pas comment généraliser la distributivité: $\otimes\, (x_i + y_i) = \cdots$. Le produit tensoriel continu jouit d'un certain nombre de propriétés attendues: citons par exemple la relation $\|\otimes\, x_i\| = \widehat{\Pi}\, \|x_i\|$ (prop. 7), deux propriétés d'associativité (prop. 8 et 9), une propriété de «permutabilité» avec les quotients (prop. 11), le fait que certains produits tensoriels continus d'espaces L^1 sont encore des espaces L^1 (prop. 12); par contre un phénomène assez inattendu apparaît lorsque l'on définit les produits tensoriels continus $\hat{\otimes}\, T_i$ d'applications linéaires continues: $\hat{\otimes}\, T_i$ peut être nul sans qu'aucun T_i le soit (remarque 5).

La définition des produits tensoriels continus d'algèbres de Banach unitaires ne présente aucune difficulté (§ 10); quant aux C^*-algèbres, on définit formellement la C^*-algèbre produit tensoriel continu comme C^*-algèbre enveloppante de $\hat{\otimes}\, A_i$ (§ 12), mais on n'en connaît que peu de propriétés, faute de savoir définir en toute généralité les produits tensoriels continus d'espaces hilbertiens (§ 11); on espère malgré tout que, convenablement améliorée, la théorie des produits tensoriels continus de C^*-algèbres pourra être utile à la théorie quantique des champs, par exemple pour construire un modèle de l'axiomatique de Haag-Kastler, ou encore pour traiter les représentations des relations de commutation correspondant à une famille continue d'indices (cf. fin du § 12), de la même façon que les produits tensoriels infinis sont utiles pour les représentations des relations de commutation ou d'anticommutation correspondant à une famille discrète d'indices (cf. [3]).

§ 1. Rappels sur les produits tensoriels finis d'espaces de Banach

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie d'espaces de Banach complexes; notons ν la mesure positive atomique sur $\Pi\, E_i$ attribuant à tout point $x = (x_i)$ de $\Pi\, E_i$ la masse $\nu(x) = \Pi\, \|x_i\|$; notons $\mathscr{K}(\Pi\, E_i)$ l'ensemble des fonctions complexes F sur $\Pi\, E_i$ telles que $F(x) = 0$ sauf pour un nombre fini de x; on notera en particulier δ_x la fonction égale à 1 en x et à 0 ailleurs; on définit sur $\mathscr{K}(\Pi E_i)$ une semi-norme par

$$\|F\| = \sum_{x \in \Pi E_i} |F(x)|\, \nu(x)\,;$$

l'espace séparé-complété de $\mathscr{K}(\Pi E_i)$ pour cette semi-norme est $L^1(\Pi E_i, \nu)$. Soit M le sous-espace vectoriel de $\mathscr{K}(\Pi E_i)$ engendré par les éléments de la forme $\delta_{(\lambda_i x_i)} - \Pi \lambda_i \cdot \delta_{(x_i)}$ où $x_i \in E_i$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$; ou de la forme $|\delta_{(x_i)} + \delta_{(y_i)} - \delta_{(z_i)}$ où $x_i = y_i = z_i$ sauf pour un indice i_0 et $z_{i_0} = x_{i_0} + y_{i_0}$; soit $\overline{M}$ l'adhérence de son image canonique dans $L^1(\Pi E_i, \nu)$. L'espace quotient $L^1(\Pi E_i, \nu)/\overline{M}$ est le *produit tensoriel projectif* de la famille (E_i); nous le noterons ici $\widehat{\bigotimes\limits_{i \in I}} E_i$ ou plus simplement $\hat{\otimes} E_i$; on note $\otimes x_i$ l'image canonique de $\delta_{(x_i)}$ et on montre que $\|\otimes x_i\| = \Pi \|x_i\|$. On peut encore définir $\hat{\otimes} E_i$ comme le complété de $\mathscr{K}(\Pi E_i)/M$ pour la semi-norme quotient, qui est en fait une norme.

Le produit tensoriel $\hat{\otimes} E_i$ et l'application multilinéaire canonique u: $\Pi E_i \to \hat{\otimes} E_i$ jouissent de la propriété universelle suivante: si E est un espace de Banach, en associant a toute application linéaire continue v de $\hat{\otimes} E_i$ dans E l'application multilinéaire $v \cdot u$, on obtient un isomorphisme isométrique del'espace de Banach $\mathscr{L}(\hat{\otimes} E_i, E)$ sur l'espace de Banach des applications multilinéaires continues $\Pi E_i \to E$.

Signalons encore les propriétés suivantes, dont la première justifie le nom de produit tensoriel *projectif*: soit, pour tout i, F_i un sous-espace vectoriel de E_i et soit F le sous-espace vectoriel de $\hat{\otimes} E_i$ engendré par les éléments $\otimes x_i$ où $x_i \in F_i$ pour au moins un indice i; alors il existe un isomorphisme isométrique de $\hat{\otimes} E_i/\overline{F}$ sur $\hat{\otimes}(E_i/\overline{F}_i)$ transformant $\dot{\widehat{\otimes x_i}}$ en $\otimes \dot{x}_i$ pour tout $(x_i) \in \Pi E_i$. Propriété d'associativité: pour toute partition $I = \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$, il existe un isomorphisme isométrique de $\widehat{\bigotimes\limits_{i \in I}} E_i$ sur $\widehat{\bigotimes\limits_{\alpha \in A}} \Big(\widehat{\bigotimes\limits_{i \in I_\alpha}} E_i\Big)$ transformant tout élément $\bigotimes\limits_{i \in I} x_i$ en $\bigotimes\limits_{\alpha \in A} \Big(\bigotimes\limits_{i \in I_\alpha} x_i\Big)$.

§ 2. Produits tensoriels infinis d'espaces de Banach

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Banach complexes et soit, pour tout i, ξ_i un élément de norme 1 de E_i. Soit Γ le sous-ensemble de ΠE_i formé des familles (x_i) telles que $x_i = \xi_i$ pour presque tout i (i. e. sauf pour un nombre fini de i); soit ν la mesure positive atomique sur Γ attribuant à tout élément $x = (x_i)$ de Γ la masse $\nu(x) = \Pi \|x_i\|$; on définit $\mathscr{K}(\Gamma)$ et $L^1(\Gamma, \nu)$ comme au § 1; même chose pour M, où l'on suppose en outre $\lambda_i = 1$ pour presque tout i, puis pour $\overline{M}$; l'espace quotient $L^1(\Gamma, \nu)/\overline{M}$ sera noté $\widehat{\bigotimes\limits_{i \in I}}^{(\xi_i)} E_i$ ou plus simplement $\hat{\otimes}^\xi E_i$; pour tout $(x_i) \in \Gamma$ on note encore $\otimes x_i$ l'image canonique de $\delta_{(x_i)}$ dans $\hat{\otimes}^\xi E_i$; on voit donc que les éléments $\otimes x_i$ forment une *partie totale* de $\hat{\otimes}^\xi E_i$.

Mais on peut aussi définir $\hat{\otimes}^{\xi} E_i$ comme limite inductive des produits tensoriels finis; plus précisément, en utilisant la propriété d'associativité du § 1, on voit facilement que les produits tensoriels finis $\hat{\bigotimes}_{i \in J} E_i$ (J partie finie de I) forment un systeme inductif avec des morphismes isométriques:

$$\hat{\bigotimes}_{i \in J} E_i \to \hat{\bigotimes}_{i \in K} E_i \qquad (J \subset K)$$

$$\bigotimes_{i \in J} x_i \to \bigotimes_{i \in K} y_i$$

où $y_i = x_i$ ou ξ_i suivant que $i \in J$ ou $i \in K - J$. D'autre part $\overline{L^1(\Gamma, \nu)}$ apparaît comme la limite inductive des $L^1\big(\prod_{i \in J} E_i, \nu_J\big)$ et $\overline{M}$ comme celle des $\overline{M}_J$; il en résulte que

Proposition 1. *Il existe un isomorphisme isométrique de la limite inductive du système inductif des produits tensoriels finis* $\hat{\bigotimes}_{i \in J} E_i$ *sur le produit tensoriel infini* $\hat{\bigotimes}^{\xi}_{i \in I} E_i$ *transformant, pour tout élément* $\bigotimes_{i \in J} x_i$, *son image canonique dans* $\varinjlim \hat{\bigotimes}_{i \in J} E_i$ *en l'élément* $\bigotimes_{i \in I} y_i$ *où* $y_i = x_i$ *pour* $i \in J$ *et* $y_i = \xi_i$ *pour* $i \in I - J$.

Corollaire 1. Pour tout $(x_i) \in \Gamma$ on a $\|\otimes x_i\| = \Pi \|x_i\|$.

Proposition 2. *Soit, pour tout* $i \in I$, F_i *un sous-espace vectoriel de* E_i; *on note* $\dot{x}_i$ *l'image canonique dans* $E_i/\overline{F}_i$ *d'un élément quelconque* x_i *de* E_i *et on suppose* $\|\dot{\xi}_i\| = 1$; *soit* F *le sous-espace vectoriel des* $\hat{\otimes}^{\xi} E_i$ *engendré par les éléments* $\otimes x_i$ *où* $x_i \in F_i$ *pour au moins un* i; *alors il existe un isomorphisme isométrique de* $(\hat{\otimes}^{(\xi_i)} E_i)/\overline{F}$ *sur* $\hat{\otimes}^{(\dot{\xi}_i)}(E_i/\overline{F}_i)$ *transformant* $\dot{\overbrace{\otimes x_i}}$ *en* $\otimes \dot{x}_i$ *pour tout* $(x_i) \in \Gamma$.

Notons Γ^0 et ν^0 les éléments associés à $(E_i/\overline{F}_i)$ et $(\dot{\xi}_i)$ comme Γ et ν sont associés à (E_i) et (ξ_i); l'application multilinéaire continue $(x_i) \to \otimes \dot{x}_i$ de Γ dans $\hat{\otimes}^{(\dot{\xi}_i)}(E_i/\overline{F}_i)$ définit une application linéaire continue de $\hat{\otimes}^{(\xi_i)} E_i$ dans $\hat{\otimes}^{(\dot{\xi}_i)}(E_i/\overline{F}_i)$, nulle sur F, d'où une application linéaire continue

$$u : (\hat{\otimes}^{(\xi_i)} E_i)/\overline{F} \to \hat{\otimes}^{(\dot{\xi}_i)}(E_i/\overline{F}_i)$$

transformant tout élément $\dot{\overbrace{\otimes x_i}}$ en $\otimes \dot{x}_i$. D'autre part l'application $(x_i) \to \dot{\overbrace{\otimes x_i}}$ de Γ dans $(\hat{\otimes}^{(x_i)} E_i)/\overline{F}$ définit une application multilinéaire continue $(\dot{x}_i) \to \dot{\overbrace{\otimes x_i}}$ de Γ^0 dans $(\hat{\otimes}^{(\xi_i)} E_i)/\overline{F}$, d'où une application linéaire continue

$$v : \hat{\otimes}^{(\dot{\xi}_i)}(E_i/\overline{F}_i) \to (\hat{\otimes}^{(\xi_i)} E_i)/\overline{F};$$

enfin il est facile de voir que u et v sont isométriques et réciproques.

Proposition 3. *Soient, pour tout* $i \in I$, X_i *un ensemble,* ν_i *une mesure positive atomique sur* X_i *attribuant à chaque point* $\chi_i \in X_i$ *une masse* $\nu_i(\chi_i)$, ω_i *un point de* X_i *de masse* 1; *soient* X *le sous-ensemble de* ΠX_i *formé des familles* $\chi = (\chi_i)$ *telles que* $\chi_i = \omega_i$ *pour presque tout* i *et* ν *la mesure positive sur* X *attribuant à tout point* χ *la masse* $\Pi \nu_i(\chi_i)$. *Il existe un isomorphisme isométrique de* $\hat{\otimes}^{(\delta_{\omega_i})} L^1(X_i, \nu_i)$ *sur* $L^1(X, \nu)$ *transformant tout élément* $\otimes f_i$ *en la fonction* $\chi \to \Pi f_i(\chi_i)$.

La démonstration, à l'aide des limites inductives et du résultat (classique) dans le cas des produits finis, est facile et laissée au lecteur.

Remarque 1. On reprend les notations du début du §; soit, pour tout i, φ_i une forme linéaire continue sur E_i de façon que $\varphi_i(\xi_i) = 1$ pour presque tout i et que le produit $\Pi \|\varphi_i\|$ soit convergent; pour tout $x = (x_i) \in \Gamma$ le produit $\Pi \varphi_i(x_i)$ a un sens puisque pour presque tout i on a $\varphi_i(x_i) = \varphi_i(\xi_i) = 1$; pour tout $F \in L^1(\Gamma, \nu)$ on a

$$\sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot |\Pi \varphi_i(x_i)| \leqq \Pi \|\varphi_i\| \cdot \sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot \Pi \|x_i\| ;$$

on peut donc définir par $F \to \sum_{x \in \Gamma} F(x). \Pi \varphi_i(x_i)$ une forme linéaire continue sur $L^1(\Gamma, \nu)$, de norme $\leqq \Pi \|\varphi_i\|$; d'où, par passage au quotient, une forme linéaire continue, notée $\hat{\otimes} \varphi_i$, sur $\hat{\otimes} E_i$, caractérisée par

$$(\hat{\otimes} \varphi_i)(\otimes x_i) = \Pi \varphi_i(x_i) ;$$

et il est facile de voir que $\|\hat{\otimes} \varphi_i\| = \Pi \|\varphi_i\|$.

§ 3. Produits tensoriels infinis d'algèbres de Banach unitaires

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres de Banach, chaque A_i admettant un élément unité e_i; définissons Γ et ν comme au § 2 en prenant $\xi_i = e_i$; pour F et $G \in L^1(\Gamma, \nu)$ posons

$$(F\, G)(x) = \sum F(y)\, G(z)$$

où la somme est étendue aux couples $y \in \Gamma$, $z \in \Gamma$ vérifiant $y_i z_i = x_i$ pour tout i; nous obtenons ainsi un élément FG de $L^1(\Gamma, \nu)$ vérifiant $\|FG\| \leqq \|F\| \cdot \|G\|$; $L^1(\Gamma, \nu)$ devient ainsi une algèbre de Banach; il est immédiat que $\overline{M}$ est un idéal bilatère.

Définition. On notera $\hat{\bigotimes}_{i \in I} A_i$ ou $\hat{\otimes} A_i$ l'algèbre de Banach $L^1(\Gamma, \nu)/\overline{M}$; la multiplication y est caractérisée par

$$(\otimes x_i)(\otimes y_i) = \otimes x_i y_i \quad \forall (x_i), (y_i) \in \Gamma .$$

L'algèbre $\hat{\otimes} A_i$ et les morphismes canoniques $\varphi_i : A_i \to \hat{\otimes} A_i$ jouissent de la propriété universelle suivante: étant donnée une algèbre de Banach unitaire B, en associant à tout morphisme continu unitaire $u : \hat{\otimes} A_i \to B$ la famille $(u \cdot \varphi_i)$, on obtient une bijection de l'ensemble des morphismes continus unitaires $\hat{\otimes} A_i \to B$ sur l'ensemble des familles de morphismes continus unitaires $u_i : A_i \to B$ deux à deux permutables. (c'est-à-dire dont les images sont deux à deux permutables).

Supposons que les A_i soient en outre involutives; on définit alors une involution sur $L^1(\Gamma, \nu)$ en posant $F^*((x_i)) = F((x_i^*))$; $\overline{M}$ étant autoadjoint, il en résulte une involution sur $\otimes A_i$ caractérisée par

$$(\otimes x_i)^* = \otimes x_i^* \quad \forall (x_i) \in \Gamma .$$

Dans ce qui suit on note $C^*(A)$ la C^*-algèbre enveloppante d'une algèbre de Banach involutive unitaire A; pour la définition du produit tensoriel $\check{\otimes}$ d'une famille de C^*-algèbres, on renvoie à [3].

Proposition 4. *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille d'algèbres de Banach involutives unitaires; il existe un isomorphisme de $C^*(\hat{\otimes} A_i)$ sur $\check{\otimes}\, C^*(A_i)$ transformant, pour tout $(x_i) \in \Gamma$, l'image canonique de $\otimes x_i$ dans $C^*(\hat{\otimes} A_i)$ en $\otimes y_i$ où y_i est l'image canonique de x_i dans $C^*(A_i)$.*

En effet les morphismes composés $A_i \to C^*(A_i) \to \check{\otimes}\, C^*(A_i)$ sont deux à deux permutables et par suite définissent un morphisme $\hat{\otimes} A_i \to \check{\otimes}\, C^*(A_i)$, qui entraîne à son tour un morphisme $u : C^*(\hat{\otimes} A_i) \to \check{\otimes}\, C^*(A_i)$. D'autre part les morphismes composés $A_i \to \hat{\otimes} A_i \to C^*(\hat{\otimes} A_i)$ définissent des morphismes $C^*(A_i) \to C^*(\hat{\otimes} A_i)$ qui sont deux à deux permutables, d'où un morphisme $v : \check{\otimes}\, C^*(A_i) \to C^*(\hat{\otimes} A_i)$; enfin il est facile de vérifier que u et v sont réciproques.

§ 4. Produits continus de nombres complexes

On désigne par I un espace topologique localement compact dont chaque composante connexe est ouverte et fermée, et a un compactifié d'Alexandrov connexe par arcs et simplement connexe; par μ une mesure positive sur I telle que toute composante connexe compacte de I ait une mesure entière, positive ou nulle. On notera $\mathscr{K}(I) + 1$ l'ensemble des fonctions complexes continues sur I, égales à 1 en dehors d'un compact. Une fonction sur I sera souvent notée $i \to \lambda_i$ ou encore (λ_i).

Soit (λ_i) une fonction appartenant à $\mathscr{K}(I) + 1$; on définit le *produit continu* $\widehat{\prod}_{i \in I} \lambda_i$ de cette fonction de la façon suivante: si on a $\lambda_i = 0$ pour au moins un $i \in I$, on pose $\widehat{\prod} \lambda_i = 0$; dans le cas contraire on définit d'abord $\log \lambda_i$ en choisissant, dans toute composante connexe non compacte de I, la détermination égale à 0 a l'infini, et dans toute composante connexe compacte une détermination quelconque; et on pose

$$\widehat{\prod_{i \in I}} \lambda_i = \exp(\textstyle\int \log \lambda_i \cdot \mathrm{d}\mu(i))$$

ce qui a un sens puisque $(\log \lambda_i) \in \mathscr{K}(I)$ et que d'autre part, si l'on change la détermination de $\log \lambda_i$ sur une composante connexe C où λ_i ne prend pas la valeur 1, C est compacte et l'on ne change pas la valeur de $\exp(\int_C \log \lambda_i \cdot d\mu(i))$.

Il est clair que si I est fini et si μ a une masse 1 en chaque point, on retrouve la notion ordinaire de produit $\prod \lambda_i$.

Proposition 5. *Le produit continu* $\widehat{\Pi}\,\lambda_i$ *jouit des propriétés suivantes:*

(i) *si* λ_i *est réel pour tout* i, $\widehat{\Pi}\,\lambda_i$ *est réel;*

(ii) *si* λ_i *est strictement positif pour tout* i, $\widehat{\Pi}\,\lambda_i$ *l'est aussi;*

(iii) *si* $0 < \lambda_i \leqq \lambda'_i$ *pour tout* i, *on a* $\widehat{\Pi}\,\lambda_i \leqq \widehat{\Pi}\,\lambda'_i$;

(iv) $|\widehat{\Pi}\,\lambda_i| = \widehat{\Pi}\,|\lambda_i|$;

(v) $\widehat{\Pi}\,\bar{\lambda}_i = \overline{\widehat{\Pi}\,\lambda_i}$;

(vi) $\widehat{\Pi}\,\lambda_i\,\lambda'_i = \widehat{\Pi}\,\lambda_i \cdot \widehat{\Pi}\,\lambda'_i$;

(vii) *si* I *est réunion d'ouverts* $(I_a)_{a\in A}$ *deux à deux disjoints, on a* $\widehat{\Pi}_{i\in I}\,\lambda_i = \Pi_{a\in A}\left(\widehat{\Pi}_{i\in I_a}\,\lambda_i\right)$ *où* $\widehat{\Pi}_{i\in I_a}\,\lambda_i$ *est égal à* 1 *pour presque tout* a.

La démonstration est facile; indiquons à titre d'exemple celle de (i): on peut supposer $\lambda_i \neq 0$ pour tout i; si C est une composante connexe où $\lambda_i > 0$, on peut choisir $\log\lambda_i$ réel, alors $\exp(\int_C \log\lambda_i \cdot d\mu(i))$ est réel; si C est une composante connexe où $\lambda_i < 0$, on peut choisir $\log\lambda_i = \log|\lambda_i| + \sqrt{-1}\,\pi$; C est compacte et on a

$$\exp(\textstyle\int_C \log\lambda_i \cdot d\mu(i)) = \exp(\int_C \log|\lambda_i| \cdot d\mu(i)) \cdot \exp(\sqrt{-1}\,\pi\,\mu(C))$$

où $\mu(C)$ est entier, d'où l'assertion. CQFD

Nous poserons aussi $\widehat{\Pi}\,\lambda_i = \exp(\int \log\lambda_i \cdot d\mu(i))$ pour toute fonction (λ_i) strictement positive telle que $(\log\lambda_i)$ soit intégrable.

§ 5. Définition des produits tensoriels continus d'espaces de Banach

On désigne par I un espace topologique localement compact, réunion dénombrable de compacts, dont chaque composante connexe est ouverte et fermée, et a un compactifié d'Alexandrov connexe par arcs et simplement connexe; par μ une mesure positive sur I telle que toute composante connexe compacte ait une mesure entière, positive ou nulle.

Nous appellerons *famille continue d'espaces de Banach sur* I (notion différente de celle de champ continu de [2]) tout triplet $((E_i)_{i\in I}, (\xi_i)_{i\in I}, \Gamma)$ où $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces de Banach complexes, ξ_i un vecteur normé de E_i, et Γ une partie de $\prod_{i\in I} E_i$ soumise aux conditions suivantes:

(i) la famille $\xi = (\xi_i)$ appartient à Γ;

(ii) si $x = (x_i) \in \Gamma$ on a $x_i = \xi_i$ en dehors d'un compact;

(iii) si $x = (x_i) \in \Gamma$ la fonction $i \to \|x_i\|$ est continue (et appartient alors à $\mathscr{K}(I) + 1$);

(iv) si $x = (x_i) \in \Gamma$ et si $\lambda = (\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$, la famille $\lambda x = (\lambda_i x_i)$ appartient à Γ;

(v) pour tout $x = (x_i) \in \Gamma$ vérifiant $x_i \neq 0\ \forall\, i$ et toute fonction semi-continue inférieurement $i \to \varepsilon_i > 1$, il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ où φ_i est une forme linéaire continue sur E_i, vérifiant les conditions suivantes:

a) $\varphi_i(x_i) = \|x_i\|$ pour tout i;
b) pour tout $y = (y_i) \in \Gamma$ la fonction $i \to \varphi_i(y_i)$ est continue;
c) $\|\varphi_i\| \leqq \varepsilon_i$ pour tout i;
d) la fonction $i \to \log\|\varphi_i\|$ (positive) est μ-mesurable.

Exemple. Soit E un espace de Banach; nous appellerons *famille continue constante associée à E* toute famille continue obtenue en prenant $E_i = E$, pour (ξ_i) une application continue de I dans E vérifiant $\|\xi_i\| = 1$ et par ailleurs arbitraire, et pour Γ l'ensemble des applications continues $i \to x_i$ de I dans E vérifiant $x_i = \xi_i$ en dehors d'un compact. Les axiomes (i) à (iv) sont trivialement vérifiés; pour vérifier (v) notons A_i l'ensemble des formes $\varphi \in E'$ telles que $\varphi(x_i) = \|x_i\|$; A_i est convexe et fermé dans E' muni de la topologie forte; montrons que l'application $i \to A_i$ est semi-continue inférieurement, autrement dit que pour tout ouvert $\Omega \subset E'$ l'ensemble des i tels que $A_i \cap \Omega \neq \emptyset$ est ouvert; en effet soient i_0 tel que $A_{i_0} \cap \Omega \neq \emptyset$ et $\varphi_0 \in A_{i_0} \cap \Omega$; soit $\eta > 0$ tel que $\|\varphi - \varphi_0\| < \eta \Rightarrow \varphi \in \Omega$; il existe un voisinage V de i_0 tel que

$$i \in V \Rightarrow \varphi_0(x_i) \neq 0 \quad \text{et} \quad |\,\|x_i\|/\varphi_0(x_i) - 1| \cdot \|\varphi_0\| < \eta\,;$$

si alors $i \in V$ on vérifie immédiatement que la forme $\varphi_0 \cdot \|x_i\|/\varphi_0(x_i)$ appartient à $A_i \cap \Omega$, qui est donc non vide. D'après le lemme ci-dessous il existe une application continue $i \to \varphi_i$ de I dans E' telle que $\varphi_i \in A_i$ et $\|\varphi_i\| \leqq \varepsilon_i$; elle vérifie évidemment les conditions a) à d).

Lemme 1. (cf. [5], lemme 7.1). *Soient I un espace topologique paracompact, F un espace de Banach, $i \to A_i$ une application semi-continue inférieurement de I dans l'ensemble des parties convexes fermées de F; $i \to \varepsilon_i$ une fonction semi-continue inférieurement vérifiant $\varepsilon_i > \inf_{y \in A_i} \|y\|$. Alors il existe une application continue $i \to y_i$ de I dans F telle que $y_i \in A_i$ et $\|y_i\| \leqq \varepsilon_i$ pour tout i.*

Dans le cas présent on a $\inf_{y \in A_i} \|y\| = 1$ en vertu du théorème de Hahn-Banach.

Remarque 2. L'axiome (v) n'est pas conséquence des autres, comme le montre l'exemple suivant: $I = [-1, +1]$, $E_i = \mathbb{C}$, $\xi_i = -1$ pour $i < 0$ et $+1$ pour $i \geqq 0$, $\Gamma =$ ensemble des fonctions $i \to \lambda_i$ et $i \to \lambda_i\, \xi_i$ où $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I)$. D'ailleurs toute famille continue $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ où les E_i sont de dimension 1 est «équivalente» à une famille constante au sens suivant: soit (φ_i) une famille de formes linéaires telle que $\varphi_i(\xi_i) = \|\varphi_i\| = 1$ et que $(\varphi_i(x_i))$ soit continue pour tout $(x_i) \in \Gamma$; pour tout $(x_i) \in \Gamma$ on peut écrire $x_i = \lambda_i\, \xi_i$ où $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$ puisque $\varphi_i(x_i) = \lambda_i$; et il est facile de voir que l'on obtient ainsi un isomorphisme de Γ sur $\mathscr{K}(I) + 1$.

Construction du produit tensoriel continu

Notons $\mathscr{K}(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions complexes F sur Γ telles que $F(x) = 0$ sauf pour un nombre fini de x; notons ν la mesure positive atomique sur Γ attribuant à tout point $x = (x_i)$ la masse $\nu(x) = \widehat{\Pi} \|x_i\|$; $L^1(\Gamma, \nu)$ est le séparé-complété de $\mathscr{K}(\Gamma)$ pour la semi-norme

$$\|F\| = \sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot \nu(x);$$

on notera δ_x la fonction égale à 1 en x et à 0 ailleurs. Soit M le sous-espace vectoriel de $\mathscr{K}(\Gamma)$ engendré par les éléments de la forme

a) $\delta_{(\lambda_i x_i)} - \widehat{\Pi} \lambda_i \cdot \delta_{(x_i)}$ où $(x_i) \in \Gamma$ et $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$;

b) $\delta_{(x_i)} + \delta_{(y_i)} - \delta_{(z_i)}$ où (x_i), (y_i), $(z_i) \in \Gamma$, $x_i = y_i = z_i$ sauf en un point *isolé* i_0 et $z_{i_0} = x_{i_0} + y_{i_0}$;

soit $\overline{M}$ l'adhérence de l'image canonique de M dans $L^1(\Gamma, \nu)$.

Définition. Nous appellerons *produit tensoriel continu* de la famille continue $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ et noterons $\widehat{\bigotimes_{i \in I}}^{(\xi_i)\,\Gamma} E_i$ ou plus simplement $\hat{\otimes}^{\xi \Gamma} E_i$ ou même $\hat{\otimes} E_i$ l'espace de Banach quotient $L^1(\Gamma, \nu)/\overline{M}$.

Si I est discret, si μ a la masse $+1$ en chaque point et si on prend pour Γ l'ensemble des (x_i) telles que $x_i = \xi_i$ sauf pour un nombre fini de i, on retrouve la notion de produit tensoriel infini exposée au § 2.

On notera $\dot{F}$ l'image canonique dans $\hat{\otimes} E_i$ d'un élément F de $L^1(\Gamma, \nu)$ et $\otimes x_i$ celle d'un élément δ_x où $x = (x_i) \in \Gamma$; les éléments $\otimes x_i$ forment une partie totale de $\hat{\otimes} E_i$; on a évidemment $\otimes \lambda_i x_i = \widehat{\Pi} \lambda_i \cdot \otimes x_i$ pour $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$.

Donnons-nous pour tout $i \in I$ une forme linéaire continue φ_i non nulle sur E_i de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

a) pour tout $(x_i) \in \Gamma$ la fonction $i \to \varphi_i(x_i)$ appartient à $\mathscr{K}(I) + 1$;

b) la fonction $i \to \log\|\varphi_i\|$ est μ-intégrable;

pour tout $F \in L^1(\Gamma, \nu)$ la famille $(F(x) \cdot \widehat{\Pi} \varphi_i(x_i))_{x \in \Gamma}$ est sommable puisque

$$\sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot |\widehat{\Pi} \varphi_i(x_i)| \leqq \sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot \widehat{\Pi} \|\varphi_i\| \cdot \|x_i\| = \widehat{\Pi} \|\varphi_i\| \cdot \|F\|;$$

on peut donc définir une forme linéaire continue $\bar{\varphi}$ sur $L^1(\Gamma, \nu)$, de norme $\leqq \widehat{\Pi} \|\varphi_i\|$, en posant

$$\bar{\varphi}(F) = \sum_{x \in \Gamma} F(x) \cdot \widehat{\Pi} \varphi_i(x_i);$$

la forme $\bar{\varphi}$ est visiblement nulle sur $\overline{M}$ et définit par passage au quotient une forme linéaire continue, notée $\hat{\otimes} \varphi_i$, sur $\hat{\otimes} E_i$; d'où

Proposition 6. *Pour toute famille (φ_i) de formes linéaires continues vérifiant les conditions* a) *et* b) *ci-dessus, il existe une forme linéaire continue unique $\hat{\otimes} \varphi_i$ sur $\hat{\otimes}^{\xi \Gamma} E_i$ telle que $(\hat{\otimes} \varphi_i)(\otimes x_i) = \widehat{\Pi} \varphi_i(x_i)$ pour tout $(x_i) \in \Gamma$; on a $\|\hat{\otimes} \varphi_i\| \leqq \widehat{\Pi} \|\varphi_i\|$.*

Proposition 7. *Pour tout $(x_i) \in \Gamma$ on a $\|\otimes x_i\| = \widehat{\Pi} \|x_i\|$.*

L'assertion étant triviale si $x_i = 0$ pour au moins un i, supposons désormais $x_i \neq 0$ pour tout i; on a évidemment $\|\otimes x_i\| \leqq \|\delta_x\| = \widehat{\Pi} \|x_i\|$;

pour prouver l'inégalité inverse prenons $\varepsilon > 1$; I étant dénombrable à l'infini il existe une fonction semi-continue inférieurement $i \to \varepsilon_i > 1$ telle que $\int \log \varepsilon_i \cdot d\mu(i) \leqq \log \varepsilon$; choisissons une famille (φ_i) vérifiant les conditions de l'axiome (v); alors la fonction $i \to \|\varphi_i\|$ est μ-intégrable et on a

$$\|\hat{\otimes}\, \varphi_i\| \leqq \widehat{\Pi}\, \|\varphi_i\| = \exp(\int \log\|\varphi_i\| \cdot d\mu(i)) \leqq$$

$$\leqq \exp(\int \log \varepsilon_i \cdot d\mu(i)) \leqq \varepsilon\,;$$

d'autre part on a

$$\widehat{\Pi}\, \|x_i\| = \widehat{\Pi}\, \varphi_i(x_i) = (\hat{\otimes}\, \varphi_i)\,(\otimes\, x_i) \leqq \varepsilon \|\otimes\, x_i\|$$

ce qui, vu l'arbitraire de ε, démontre notre assertion.

Corollaire 2. On a $\otimes\, x_i = 0$ si et seulement si $x_i = 0$ pour au moins un i.

Remarque 3. Si tous les E_i sont de dimension 1 il en est de même de $\hat{\otimes}^{\xi\Gamma} E_i$; en effet, d'après la remarque 1, on peut supposer la famille constante et associée à $\mathbb{C}$; si (x_i) et $(y_i) \in \Gamma$ avec $\otimes\, x_i \neq 0$, on a $x_i \neq 0$ pour tout i et $\otimes\, y_i = \widehat{\Pi}\, y_i/x_i \cdot \otimes\, x_i$.

Remarque 4. Soient I^0 une partie ouverte de I vérifiant les conditions imposées à I au début du §, ξ^0 la restriction de la famille (ξ_i) à I^0, Γ^0 l'ensemble des restrictions à I^0 des familles $(x_i) \in \Gamma$ telles que $x_i = \xi_i$ en dehors d'un compact contenu dans I^0; il est facile de voir que $((E_i)_{i\in I^0}, (\xi_i)_{i\in I^0}, \Gamma^0)$ est une famille continue d'espaces de Banach et de construire une application linéaire continue T de $\widehat{\bigotimes\limits_{i\in I^0}}^{\xi^0\Gamma^0} E_i$ dans $\widehat{\bigotimes\limits_{i\in I}}^{\xi\Gamma} E_i$ transformant tout élément $\otimes\, y_i$ $((y_i) \in \Gamma^0)$ en $\otimes x_i$ où $x_i = y_i$ pour $i \in I^0$ et ξ_i pour $i \notin I^0$; on ignore si cette application T est isométrique. Supposons maintenant I^0 ouverte et fermée et posons $I^1 = I - I^0$; supposons de plus que quelles que soient les familles (x_i), $(y_i) \in \Gamma$ il existe une famille $(z_i) \in \Gamma$ telle que $z_i = x_i$ pour $i \in I^0$ et $z_i = y_i$ pour $i \in I^1$; Γ^0 est alors l'ensemble des restrictions à I^0 des familles $(x_i) \in \Gamma$; en outre T est isométrique, comme on le verra à la proposition 8.

§ 6. Associativité du produit tensoriel continu

On pourrait espérer un théorème général du type suivant: soient I et J deux espaces localement compacts, T une application continue de I sur J, μ et ν des mesures positives sur I et J, $\mu = \int \mu_j\, d\nu(j)$ une désintégration de μ relative à T et ν; alors $\widehat{\bigotimes\limits_{i\in I}} E_i = \widehat{\bigotimes\limits_{i\in I}} \Big(\widehat{\bigotimes\limits_{Ti=j}} E_i\Big)$. Mais un tel résultat semble impossible à cause de l'exemple suivant: $I = [0, 1] \times [0, 1]$, $J = [0, 1]$, $T =$ première projection, μ, ν, $\mu_j =$ mesures de Lebesgue; notons (j, k) un élément quelconque de I; supposons que l'on ait un champ de vecteurs (x_{jk}) tel que

$$\|x_{jk}\| = \begin{cases} \exp\left(-(j+k)^{-\frac{1}{2}}\right) & \text{si } j \text{ ou } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } j = k = 0\,; \end{cases}$$

alors $\widehat{\prod\limits_{K\in[0,1]}} \|x_{jk}\|$ est égal à $\exp(-2(\sqrt{j+1} - \sqrt{j}\,))$ pour $j \neq 0$ et à 0 pour $j = 0$, donc ne dépend pas continûment de j.

Nous allons établir deux résultats partiels d'associativité, l'un en supposant J discret, et l'autre en supposant que I est le produit de J par un espace discret.

Proposition 8. *Soit $((E_i)_{i\in I}, (\xi_i)_{i\in I}, \Gamma)$ une famille continue d'espaces de Banach, I étant réunion d'une famille $(I^a)_{a\in A}$ d'ouverts deux à deux disjoints; pour tout $a \in A$ on note ξ^a la restriction à I^a de la famille $\xi = (\xi_i)$ et, plus généralement, x^a la restriction à I^a d'une famille quelconque $x = (x_i) \in \Gamma$; Γ^a l'ensemble des x^a où $(x_i) \in \Gamma$; on suppose réalisée la condition suivante:*

(C) *pour toute famille $(y_a) \in \prod\limits_{a\in A} \Gamma^a$ telle que $y_a = \xi^a$ pour presque tout a il existe $(x_i) \in \Gamma$ tel que $y_a = x^a$ pour tout a.*

Alors on peut considérer les produits tensoriels continus $\widehat{\bigotimes\limits_{i\in I^a}}^{\xi^a \Gamma^a} E_i$ et il existe un isomorphisme isométrique unique de $\widehat{\bigotimes\limits_{i\in I}}^{\xi\Gamma} E_i$ sur $\widehat{\bigotimes\limits_{a\in A}}^{(\eta_a)}\left(\widehat{\bigotimes\limits_{i\in I^a}}^{\xi^a\Gamma^a} E_i\right)$ transformant, pour toute famille $(x_i) \in \Gamma$, $\bigotimes\limits_{i\in I} x_i$ en $\bigotimes\limits_{a\in A}\left(\bigotimes\limits_{i\in I^a} x_i\right)$. (On a posé $\eta_a = \bigotimes\limits_{j\in I^a} \xi_i$.)

Il est immédiat que pour tout $a \in A$, $((E_i)_{i\in I^a}, (\xi_i)_{i\in I^a}, \Gamma^a)$ est une famille continue d'espaces de Banach; soient ν^a la mesure sur Γ^a définie de la même facon que la mesure ν sur Γ; M^a le sous-espace vectoriel de $\mathscr{K}(\Gamma^a)$ défini de la même façon que M pour $\mathscr{K}(\Gamma)$; en associant à tout $(x_i) \in \Gamma$ la famille $(x^a) \in \prod \Gamma^a$ on obtient une application bijective de Γ sur le sous-ensemble de $\prod \Gamma^a$ formé des familles (y_a) telles que $y_a = \xi^a$ pour presque tout a; cette application transforme ν en la mesure produit des ν^a d'après la prop. 5 (vii); d'après la prop. 3 il existe un isomorphisme isométrique U de $L^1(\Gamma, \nu)$ sur $\widehat{\bigotimes\limits_{a\in A}}^{(\delta_{\xi^a})} L^1(\Gamma^a, \nu^a)$ transformant, pour tout $x \in \Gamma$, δ_x en $\otimes\, \delta_{x^a}$. On va maintenant appliquer la prop. 2 aux sous-espaces $\overline{M}^a \subset L^1(\Gamma^a, \nu^a)$; pour cela on doit montrer que $U(\overline{M})$ est engendré par les éléments $\otimes\, F^a$ où $F^a \in L^1(\Gamma^a, \nu^a)$, $F^a = \delta_{\xi^a}$ pour presque tout a et $F^a \in \overline{M}^a$ pour au moins un a; pour montrer qu'un tel $\otimes\, F^a$ appartient à $U(\overline{M})$ on peut supposer que $F^a \in M^a$ pour un indice a_0 et que pour $a \neq a_0$, F^a est de la forme δ_{x^a} où $x \in \Gamma$, et la verification est alors triviale; pour montrer que ces éléments $\otimes\, F^a$ engendrent $U(\overline{M})$, on vérifie aisément que les éléments $U(\delta_{\lambda_x} - \widehat{\prod}\, \lambda_i\, \delta_x)$ et $U(\delta_x + \delta_y - \delta_z)$ sont des combinaisons de tels éléments $\otimes F^a$. La prop. 2 fournit alors un isomorphisme isométrique de $L^1(\Gamma, \nu)/\overline{M}$ sur $\otimes^{(\eta_a)} L^1(\Gamma^a, \nu^a)/\overline{M}^a)$, qui n'est autre que l'isomorphisme annoncé.

Proposition 9. *Soient J et μ_0 un espace topologique et une mesure vérifiant les conditions indiquées en tête du § 5; K un espace discret dénombrable, μ_1 la mesure sur K ayant la masse 1 en chaque point; $I = J \times K$ et $\mu = \mu_0 \otimes \mu_1$ vérifient les conditions requises; soit $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ une famille continue d'espaces de Banach sur I; posons $i = (j, k)$; pour tout $j \in J$ posons $\xi_j = \bigotimes_{k \in K} \xi_{j\,k} \in \hat{\bigotimes}_{k \in K} E_{j\,k}$. Soit Γ' le sous-ensemble de $\prod_{j \in J} \left(\hat{\bigotimes}_{k \in K} E_{j\,k}\right)$ formé des familles $j \to \bigotimes_{k \in K} x_{j\,k}$ où $x \in \Gamma$; alors $\left(\left(\hat{\bigotimes}_{k \in K} E_{j\,k}\right), (\xi_j), \Gamma'\right)$ est une famille continue d'espaces de Banach sur J et il existe un isomorphisme isométrique unique de $\hat{\bigotimes}^{\xi \Gamma}_{i \in I} E_i$ sur $\hat{\bigotimes}^{(\xi_j)\,\Gamma'}_{j \in J} \left(\hat{\bigotimes}_{k \in K} E_{j\,k}\right)$ transformant, pour tout $x \in \Gamma$, $\bigotimes_{i \in I} x_i$ en $\bigotimes_{j \in J} \left(\bigotimes_{k \in K} x_{j\,k}\right)$.*

Posons $E_j = \hat{\bigotimes}_{k \in K} E_{j\,k}$ et, pour tout $x \in \Gamma$, $x_j = \bigotimes_{k \in K} x_{j\,k}$. Démontrons d'abord que $((E_j), (\xi_j), \Gamma')$ est une famille continue; soit $x \in \Gamma$; on a $x_{j\,k} = \xi_{j\,k}$ si (j, k) n'appartient pas à un compact $J_0 \times K_0$ où J_0 est compact et K_0 fini; d'où l'axiome (ii); puis $\|x_j\| = \prod_{k \in K_0} \|x_{j\,k}\|$, d'où (iii); soit $(\lambda_j) \in \mathscr{K}(J) + 1$; choisissons $k_0 \in K$; on peut écrire $\lambda_j\, x_j = \bigotimes_{k \in K} y_{j\,k}$ où $y_{j\,k}$ est égal à $\lambda_j\, x_{j k_0}$ pour $k = k_0$ et à $x_{j\,k}$ pour $k \neq k_0$; on a $y \in \Gamma$, donc $(\lambda_j\, x_j) \in \Gamma'$; d'où (iv). Pour vérifier l'axiome (v) donnons-nous une fonction semi-continue inférieurement $j \to \varepsilon_j > 1$; soit $(\alpha_k)_{k \in K}$ une famille de nombres réels strictement positifs tels que $\sum \alpha_k = 1$; en vertu de l'axiome (v) appliqué à la famille $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ il existe une famille $(\varphi_{j\,k})$, $\varphi_{j\,k} \in E'_{j\,k}$, vérifiant

a) $\varphi_{j\,k}(x_{j\,k}) = \|x_{j\,k}\|$ quels que soient j et k;

b) pour tout $y \in \Gamma$, la fonction $(j, k) \to \varphi_{j\,k}(y_{j\,k})$ est continue;

c) $\|\varphi_{j\,k}\| \leqq \varepsilon_j^{\alpha_k}$;

d) la fonction $(j, k) \to \|\varphi_{j\,k}\|$ est mesurable;

posons $\varphi_j = \hat{\bigotimes}_{k \in k} \varphi_{j\,k}$ (cf. remarque 1); on a $\varphi_j(x_j) = \prod_{k \in K} \varphi_{j\,k}(x_{j\,k}) = \prod_{k \in K} \|x_{j\,k}\| = \|x_j\|$; si $y \in \Gamma$, $y_{j\,k} = x_{j\,k} = \xi_{j\,k}$ si (j, k) n'appartient pas à un compact $J_1 \times K_1$; alors $\varphi_j(y_j) = \prod_{k \in K} \varphi_{j\,k}(y_{j\,k}) = \prod_{k \in K_1} \varphi_{j\,k}(y_{j\,k})$ dépend continûment de j; puis $\|\varphi_j\| = \prod_{k \in K} \|\varphi_{j\,k}\| \leqq \prod_{k \in K} \varepsilon_j^{\alpha_k} = \varepsilon_j$; enfin la fonction $j \to \|\varphi_j\|$ est mesurable comme produit d'une suite de fonctions mesurables.

On peut donc considérer $E' = \hat{\bigotimes}_{j \in J}^{(\xi_j) \Gamma'} E_j = L^1(\Gamma', \nu')/\overline{M}'$; posons $E = \bigotimes_{i \in I}^{\xi \Gamma} E_i$; pour tout $F \in L^1(\Gamma, \nu)$ on a

$$\sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot \| \bigotimes_{j \in J} x_j \| = \sum_{x \in \Gamma} |F(x)| \cdot \widehat{\prod_{jk}} \|x_{jk}\| = \|F\| ;$$

on peut donc définir une application linéaire continue $\overline{\Phi}$ de norme $\leqq 1$ de $L^1(\Gamma, \nu)$ dans E' par

$$\overline{\Phi}(F) = \sum_{x \in \Gamma} F(x) \cdot \bigotimes_{j \in J} x_j ;$$

$\overline{\Phi}$ est nulle sur M (vérification facile) et définit par passage au quotient une application linéaire continue de norme $\leqq 1 : \Phi : E \to E'$, telle que

$$\Phi(\bigotimes_{i \in I} x_i) = \bigotimes_{j \in J} x_j = \bigotimes_{j \in J} (\bigotimes_{k \in K} x_{jk}) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma .$$

Pour construire une application Ψ réciproque de Φ, on doit d'abord prouver que $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$, $\bigotimes_k x_{jk} = \bigotimes_k y_{jk}$ $\forall j$ impliquent $\bigotimes_i x_i = \bigotimes_i y_i$; ceci étant évident si $x_i = 0$ pour au moins un i, supposons désormais $x_i \neq 0$ pour tout i; pour tout $j \in J$ on peut écrire $y_{jk} = \lambda_{jk} x_{jk}$ avec $\lambda_{jk} \in \mathbb{C}$, $\lambda_{jk} = 1$ pour presque tout k et $\prod_k \lambda_{jk} = 1$; ou encore $y_i = \lambda_i x_i$; choisissant $\varphi_i \in E'_i$ de façon que $\varphi_i(x_i) = \|x_i\|$ et que $i \to \varphi_i(y_i)$ soit continue, on voit que $i \to \lambda_i = \varphi_i(y_i)/\|x_i\|$ appartient à $\mathscr{K}(I) + 1$; comme $\prod \lambda_i = 1$ ceci entraîne $\bigotimes_i x_i = \bigotimes_i y_i$.

Ceci établi on peut considérer l'application $\overline{\Psi}$ de Γ' dans E telle que $\overline{\Psi}((x_j)_{j \in J}) = \bigotimes_i x_i$ pour tout $x \in \Gamma$; puis la prolonger en une application $\overline{\overline{\Psi}} : L^1(\Gamma', \nu') \to E$ définie par

$$\overline{\overline{\Psi}}(G) = \sum_{(x_j) \in \Gamma'} G((x_j)) \cdot \overline{\Psi}((x_j)) ,$$

et on voit que $\overline{\overline{\Psi}}$ est linéaire de norme $\leqq 1$; montrons que $\overline{\overline{\Psi}}$ est nulle sur M': soient d'abord $(x_j) \in \Gamma'$ et $(\lambda_j) \in \mathscr{K}(J) + 1$; choisissons $k_0 \in K$ et posons

$$\lambda_i = \lambda_{jk} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } k = k_0 \\ 1 & \text{sinon} ; \end{cases}$$

alors $\overline{\overline{\Psi}}(\delta_{(\lambda_j x_j)} - \widehat{\prod} \lambda_j \cdot \delta_{(x_j)}) = \otimes \lambda_i x_i - \widehat{\prod} \lambda_i \cdot \otimes x_i = 0$.

Soient maintenant (x_j), (y_j), $(z_j) \in \Gamma'$ tels que $x_j = y_j = z_j$ sauf en un point isolé j_0 et que $z_{j_0} = x_{j_0} + y_{j_0}$; pour montrer que $\overline{\overline{\Psi}}(\delta_{(x_j)} + \delta_{(y_j)} - \delta_{(z_j)})$ est nul, distinguons trois cas:

1) $x_{j_0} = y_{j_0} = z_{j_0} = 0$: trivial;

2) un seul de ces trois éléments est nul, par exemple x_{j_0}: on peut écrire $z_{j_0 k} = \lambda_k y_{j_0 k}$ où $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k = 1$ pour presque tout k et $\prod \lambda_k = 1$; alors $\otimes z_i = \otimes y_i$, d'où l'assertion;

3) ces trois éléments sont non nuls: alors il existe un indice k_0 et des scalaires a_k, b_k, c_k vérifiant

$$\begin{cases} a_k = b_k = c_k = 1 \quad \text{pour presque tout } k \\ \Pi\, a_k = \Pi\, b_k = \Pi\, c_k = 1 \\ a_k\, x_{j_0 k} = b_k\, y_{j_0 k} = c_k\, z_{j_0 k} \quad \text{pour tout } k \neq k_0 \\ a_{k_0}\, x_{j_0 k_0} + b_{k_0}\, y_{j_0 k_0} = c_{k_0}\, z_{j_0 k_0}\, ; \end{cases}$$

posant $x'_{j_0 k} = a_k\, x_{j_0 k}$ et $x'_{jk} = x_{jk}$ pour $j \neq j_0$ et les définitions analogues pour y'_{jk} et z'_{jk}, on a

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Psi}}(\delta_{(x_j)} + \delta_{(y_j)} - \delta_{(z_j)}) &= \overline{\overline{\Psi}}(\delta_{(x'_j)} + \delta_{(y'_j)} - \delta_{(z'_j)}) \\ &= \otimes\, x'_i + \otimes\, y'_i - \otimes\, z'_i = 0\,. \end{aligned}$$

L'application $\overline{\overline{\Psi}}$, étant nulle sur M', définit une application linéaire de norme $\leqq 1$: $\Psi : E' \to E$ telle que pour tout $x \in \Gamma$:

$$\Psi\big(\bigotimes_j x_j\big) = \bigotimes_i x_i\, ;$$

enfin on constate aisément que Φ et Ψ sont mutuellement réciproques.

Corollaire 3. *Soient J un ensemble et, pour tout $j \in J$, $((E_{ij}), (\xi_{ij}), \Gamma_j)$ une famille continue d'espaces de Banach sur un espace I; soit Γ' le sous-ensemble de $\prod_{i \in I} \hat{\bigotimes}_{j \in J} E_{ij}$ formé des familles $i \to \bigotimes_{j \in J} x_{ij}$ où pour tout j la famille $i \to x_{ij}$ appartient à Γ_j; posons $\xi_i = \bigotimes_{j \in J} \xi_{ij}$; alors $\big((\hat{\bigotimes}_{j \in J} E_{ij})_{i \in I}, (\xi_i)_{i \in I}, \Gamma'\big)$ est une famille continue d'espaces de Banach et il existe un isomorphisme isométrique de $\hat{\bigotimes}^{\xi\,\Gamma'}_{i \in I}\big(\hat{\bigotimes}_{j \in J} E_{ij}\big)$ sur $\hat{\bigotimes}_{j \in J}\big(\hat{\bigotimes}^{\xi\,\Gamma_j}_{i \in I} E_{ij}\big)$ transformant, pour toute famille $j \to (x_{ij})_{i \in J} \in \Gamma_j$, l'élément $\bigotimes_{i \in I}\big(\bigotimes_{j \in J} x_{ij}\big)$ en $\bigotimes_{\in J}\big(\bigotimes_{i \in I} x_{ij}\big)$.*

Considérons la famille continue $((E_{ij}), (\xi_{ij}), \Gamma)$ sur $I \times J$ où Γ est l'ensemble des familles $(x_{ij})_{ij}$ telles que pour tout j la famille $i \to x_{ij}$ appartienne à Γ_j; les prop. 8 et 9 donnent respectivement des isomorphismes de $\hat{\bigotimes}_{ij} E_{ij}$ sur $\hat{\bigotimes}_j\big(\hat{\bigotimes}_i E_{ij}\big)$ et sur $\hat{\bigotimes}_i\big(\hat{\bigotimes}_j E_{ij}\big)$, et il suffit de les composer.

§ 7. Produits tensoriels continus d'applications linéaires continues

On définit I et μ comme au début du § 5.

Proposition 10. *Soient $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ et $((E'_i), (\xi'_i), \Gamma')$ deux familles continues d'espaces de Banach sur I; soit pour tout i, T_i une application linéaire continue non nulle de E_i dans E'_i; on suppose que*

a) *pour tout $x = (x_i) \in \Gamma$ la famille $(T_i\, x_i)$ appartient à Γ';*

b) *la fonction* $i \to \log \|T_i\|$ *est* μ*-intégrable (noter qu'elle est automatiquement semi-continue inférieurement si pour tout* i *les éléments* x_i *où* $x \in \Gamma$ *sont partout dense dans* E_i*);*
dans ces conditions il existe une application linéaire continue unique $\hat{\otimes}\, T_i$ *de* $\hat{\otimes}^{\xi \Gamma} E_i$ *dans* $\hat{\otimes}^{\xi' \Gamma'} E'_i$ *transformant* $\otimes\, x_i$ *en* $\otimes\, T_i\, x_i$ *pour tout* $x \in \Gamma$*; sa norme est au plus égale à* $\widehat{\Pi} \|T_i\|$*; elle lui est égale si l'on suppose que:*

c) *pour toute fonction continue* $i \to k_i < 1$ *il existe* $(x_i) \in \Gamma$ *tel que* $\|x_i\| = 1$ *et* $\|T_i\, x_i\| \geqq k_i \|T_i\|$.

Pour tout $x \in \Gamma$ on a

$$\begin{aligned}\|\otimes\, T_i\, x_i\| = \widehat{\Pi} \|T_i\, x_i\| &\leqq \exp(\textstyle\int \log \|T_i\| \cdot d\mu(i)) \cdot \exp(\int \log \|x_i\|\, d\mu(j) \\ &= \widehat{\Pi} \|T_i\| \cdot \widehat{\Pi} \|x_i\|\,;\end{aligned}$$

on peut donc définir une application $\overline{T}$ de $L^1(\Gamma, \nu)$ dans $\hat{\otimes}\, E'_i$ par

$$\overline{T}(F) = \sum_{x \in \Gamma} F(x) \cdot \otimes\, T_i\, x_i\,;$$

$\overline{T}$ est linéaire, continue et de norme $\leqq \widehat{\Pi} \|T_i\|$; elle est nulle sur M (vérification immédiate), donc définit une application de $\hat{\otimes}\, E_i$ dans $\hat{\otimes}\, E'_i$ ayant les propriétés annoncées. CQFD

Si T_i est nul pour au moins un i on pose $\hat{\otimes}\, T_i = 0$. Les propriétés suivantes sont faciles a établir:

(i) pour toute fonction $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$ on a $\hat{\otimes}\, \lambda_i\, T_i = \widehat{\Pi}\, \lambda_i \cdot \hat{\otimes}\, T_i$;

(ii) soient (S_i) et (R_i) deux autres familles d'applications linéaires continues $E_i \to E'_i$ vérifiant a) et b); supposons que $T_i = S_i = R_i$ sauf en un point isolé i_0 et que $T_{i_0} = S_{i_0} + R_{i_0}$; alors $\hat{\otimes}\, T_i = \hat{\otimes}\, S_i + \hat{\otimes}\, R_i$.

(iii) on suppose que pour tout i les éléments x_i où $x \in \Gamma$ sont partout denses dans E_i; soient $((E''_i), (\xi''_i), \Gamma'')$ une troisième famille continue d'espaces de Baanch et $S_i : E'_i \to E''_i$ des applications linéaires continues vérifiant les conditions analogues à a) et b); alors les applications $S_i \circ T_i$ vérifient aussi ces conditions et on a $\hat{\otimes}(S_i \circ T_i) = (\hat{\otimes}\, S_i) \circ (\hat{\otimes}\, T_i)$.

(iv) si les T_i sont des isomorphismes isométriques et si pour tout $x' \in \Gamma'$ on a $(T_i^{-1} x'_i) \in \Gamma$, alors $\hat{\otimes}\, T_i$ est un isomorphisme isométrique.

Remarque 5. La condition c) de la prop. 10 n'est pas toujours réalisée, on peut même avoir $\|T_i\| = 1$ pour tout i et $\hat{\otimes}\, T_i = 0$, même si $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ est une famille constante associée à un espace hilbertien E et si $i \to T_i$ est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ muni de la topologie de la norme, comme le montre l'exemple suivant dû à A. DOUADY: prenons $E = \mathbb{C}^2$, $I =$ boule unité de $\mathbb{C}^2 =$ ensemble des $i = (i_1, i_2)$ tels que $|i|^2 = |i_1|^2 + |i_2|^2 \leqq 1$, $\Gamma =$ ensemble des applications continues de I dans E; pour tout $i \in I$ notons T'_i l'opérateur dans E de projection orthogonale sur la droite contenant i, et posons $T_i = (1 - |i|) \cdot id + |i|\, T'_i$ on a $\|T_i\| = 1$, mais on va voirque pour toute application continue $i \to x_i$ de I dans E on a $T_i\, x_i = 0$ pour au moins un i, ce qui prouvera que $\otimes\, T_i = 0$; supposons le contraire: alors $(i \mid x_i) \neq 0$ pour tout i; $i \cdot |(i \mid x_i)|/(i \mid x_i)$, pour $|i| = 1$, ne dépend que de l'image canonique de i dans S^2

et on en déduit une section continue de l'application canonique $S^3 \to S^2$; or il n'existe pas de telle section.

La proposition suivante montre que, en un certain sens, les produits tensoriels continus "permutent" aux quotients.

Proposition 11. *Soit* $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ *une famille continue d'espaces de Banach sur* I*; pour tout* i *soient* F_i *un sous-espace vectoriel fermé de* E_i *et* T_i *l'application canonique* $E_i \to E_i/F_i$*; on suppose réalisées les conditions suivantes:*

a) $\|T_i\, \xi_i\| = 1$ *pour tout* i;

b) *pour tout* $x = (x_i) \in \Gamma$, *la fonction* $i \to d(x_i, F_i)$ *est continue* ($d(x, F)$ *désigne la distance d'un point* x *à une partie* F);

c) *pour tout* $x = (x_i) \in \Gamma$ *tel que* $T_i\, x_i \neq 0$ *pour tout* i *et toute fonction semi-continue inférieurement* $i \to \varepsilon_i > 1$ *il existe une famille* (φ_i) *où* φ_i *est une forme linéaire continue sur* E_i, *nulle sur* F_i, *telle que* $\varphi_i(x_i) = d(x_i, F_i)$, $\|\varphi_i\| \leqq \varepsilon_i$, *que* $i \to \varphi_i(y_i)$ *soit continue pour tout* $y \in \Gamma$ *et que* $i \to \|\varphi_i\|$ *soit mesurable*;

d) *pour tout* $x \in \Gamma$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $y \in \Gamma$ *tel que* $y_i - x_i \in F_i$ *et* $\widehat{\Pi}\|y_i\| \leqq \widehat{\Pi}\|T_i\, x_i\| + \varepsilon$.

Soit Γ' *le sous-ensemble de* $\Pi\,(E_i/F_i)$ *formé des familles* $(T_i\, x_i)$ *où* $(x_i) \in \Gamma$*; soit* K *le sous-espace vectoriel fermé de* $\hat{\otimes}^{\xi\Gamma} E_i$ *engendré par les éléments de la forme* $\otimes\, x_i$ *où* $x_i \in F_i$ *pour au moins un* i *ou de la forme* $\otimes\, x_i - \otimes\, y_i$ *où* $x_i - y_i \in F_i$ *pour tout* i. *Alors l'application* $\hat{\otimes}\, T_i$ (*cf.* prop. 10) *de* $\hat{\otimes}^{\xi\Gamma} E_i$ *dans* $\hat{\otimes}^{(T_i\xi_i)\Gamma'}(E_i/F_i)$ *passe au quotient en un isomorphisme isométrique de* $(\hat{\otimes}^{\xi\Gamma} E_i)/K$ *sur* $\hat{\otimes}^{(T_i\xi_i)\Gamma}(E_i/F_i)$.

Démontrons d'abord que $((E_i/F_i), (T_i\, \xi_i), \Gamma')$ est une famille continue: les axiomes (i), (ii) et (iv) sont trivialement vérifiés; (iii) l'est à cause de la condition b) et (v) à cause de c). Ensuite on peut considérer $T = \hat{\otimes}\, T_i$ puisque les conditions a) et b) de la prop. 10 sont vérifiées; T étant visiblement nulle sur K passe au quotient en une application linéaire continue S de norme $\leqq 1$ de $(\hat{\otimes}\, E_i)/K$ dans $\hat{\otimes}\,(E_i/F_i)$ qui transforme $\omega(\otimes\, x_i)$ et $\otimes\, T_i\, x_i$ pour tout $x \in \Gamma$ (on note ω l'application canonique $\hat{\otimes}\, E_i \to (\hat{\otimes}\, E_i)/K$). D'autre part pour $x = (x_i) \in \Gamma$, $\omega(\otimes\, x_i)$ ne dépend que de $(T_i\, x_i)$ puisque si $T_i\, x_i = T_i\, y_i$ pour tout i, $\otimes\, x_i - \otimes\, y_i \in K$; d'où une application $\overline{R}: \Gamma' \to (\hat{\otimes}\, E_i)/K$ transformant toute famille $(T_i\, x_i)$ en $\omega(\otimes\, x_i)$. Soient maintenant F un élément de $L^1(\Gamma', \nu')$ et ε un nombre >0; pour tout $x' \in \Gamma'$ tel que $F(x') \neq 0$ choisissons $\varepsilon_{x'} > 0$ de façon que $\sum_{x' \in \Gamma'} |F(x')|\, \varepsilon_{x'} \leqq \varepsilon$, puis en utilisant la condition d), $x \in \Gamma$ tel que $T_i\, x_i = x'_i$ et $\widehat{\Pi}\, \|x_i\| \leqq \widehat{\Pi}\, \|x'_i\| + \varepsilon_{x'}$; on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{x' \in \Gamma'} |F(x')| \cdot \|\overline{R}(x')\| &= \sum_{x' \in \Gamma'} |F(x')| \cdot \|\omega(\otimes\, x_i)\| \leqq \\ &\leqq \sum |F(x')| \cdot \widehat{\Pi}\, \|x_i\| \leqq \\ &\leqq \sum |F(x')| \cdot (\widehat{\Pi}\, \|x'_i\| + \varepsilon_{x'}) \leqq \\ &\leqq \|F\| + \varepsilon\,;\end{aligned}$$

ceci prouve que $\sum\limits_{x' \in \Gamma'} F(x')\, \overline{R}(x')$ appartient à $(\hat{\otimes}\, E_i)/K$ et a une norme $\leqq \|F\|$; ceci définit une application linéaire continue $\overline{\overline{R}}$ de norme $\leqq 1$ de $L^1(\Gamma', \nu')$ dans $(\hat{\otimes}\, E_i)/K$:

$$\overline{\overline{R}}(F) = \sum_{x' \in \Gamma'} F(x')\, \overline{R}(x') = \sum_{x' \in \Gamma'} F(x')\, \omega(\otimes\, x_i)$$

où $(x_i) \in \Gamma$ et $T_i\, x_i = x'_i$; $\overline{\overline{R}}$ est nulle sur M' donc définit une application linéaire continue R de norme $\leqq 1$ de $\hat{\otimes}\, (E_i/F_i)$ dans $(\hat{\otimes}\, E_i)/K$ qui transforme $\otimes\, T_i\, x_i$ en $\omega(\otimes\, x_i)$ pour tout $(x_i) \in \Gamma$. Il est alors immédiat que S et R sont mutuellement réciproques.

Exemple. Prenons pour $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ une famille constante associée à un espace de Banach E (cf. § 5, exemple) et pour F_i un sous-espace vectoriel fermé fixe F de E tel que l'image canonique $T\xi_i$ de ξ_i dans E/F soit de norme 1 pour tout i. Alors les conditions a) et b) de la prop. 11 sont trivialement vérifiées; c) se vérifie en posant $\varphi_i = \psi_i \circ T$ où $i \to \psi_i$ est une application continue de I dans $(E/F)'$ muni de la topologie forte vérifiant $\psi_i(T\, x_i) = \|T\, x_i\|$ et $\|\psi_i\| \leqq \varepsilon_i$ (cf. § 5, exemple); vérifions d): soit U l'ensemble ouvert relativement compact des i pour lesquels $x_i \neq \xi_i$; soit $i \to \varepsilon_i$ une fonction semi-continue inférieurement strictement positive telle que $\left(\exp(\int \varepsilon_i \cdot d\mu(i) - 1\right) \cdot \widehat{\Pi}\, \|T\, x_i\| \leqq \varepsilon$; posons

$$A_i = \begin{cases} \{y \in E : T\, y = T\, x_i\} & \text{pour} \quad i \in U \\ \{\xi_i\} & \text{pour} \quad i \in U\,; \end{cases}$$

on voit facilement que l'application $i \to A_i$ est semi-continue inférieurement; d'après le lemme 1 il existe une application continue $i \to y_i$ de I dans E telle que $y_i \in A_i$ et $\|y_i\| \leqq e^{\varepsilon_i} \|T\, x_i\|$ pour tout i; alors $(y_i) \in \Gamma$ et en outre

$$\widehat{\Pi}\, \|y_i\| = \exp(\textstyle\int \log \|y_i\| \cdot d\mu(i)) \leqq \exp(\int \varepsilon_i \cdot d\mu(i)) \cdot \widehat{\Pi}\, \|T\, x_i\| \leqq \widehat{\Pi}\, \|T\, x_i\| + \varepsilon.$$

Le raisonnement fait pour établir d) prouve aussi que Γ' est l'ensemble des applications continues $i \to z_i$ de I dans E/F telles que $z_i = T\, \xi_i$ en dehors d'un compact, c'est-à-dire que $((E/F), (T\, \xi_i), \Gamma')$ est une famille constante.

§ 8. Produits tensoriels continus d'espaces L^1

La proposition suivante généralise la prop. 3 au cas des produits continus:

Proposition 12. *Définissons I et μ comme au début du § 5; soient, pour tout i, X_i un ensemble, σ_i une mesure positive atomique sur X_i, ω_i un point de X_i de masse 1; soit X une partie de $\Pi\, X_i$ vérifiant:*

a) $\omega = (\omega_i) \in X$;

b) *si $\chi = (\chi_i) \in X$, on a $\chi_i = \omega_i$ en dehors d'un compact et la fonction $i \to \sigma_i(\chi_i)$ appartient à $\mathscr{K}(I) + 1$;*

soit Γ *le sous-ensemble de* $\Pi\, L^1(X_i, \sigma_i)$ *formé des familles* $(\lambda_i\, \delta_{\chi_i})$ *où* $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$ *et* $(\chi_i) \in X$*; soit* σ *la mesure positive atomique sur* X *définie par* $\sigma(\chi) = \widehat{\Pi}\, \sigma_i(\chi_i)$*; soit enfin* $\xi_i = \delta_{\omega_i} \in L^1(X_i, \sigma_i)$*. Alors* $((L^1(X_i, \sigma_i), (\xi_i), \Gamma)$ *est une famille continue et il existe un isomorphisme isométrique unique de* $\hat{\otimes}^{\xi\Gamma} L^1(X_i, \sigma_i)$ *sur* $L^1(X, \sigma)$ *transformant tout élément* $\otimes\, \delta_{\chi_i}$ *où* $\chi = (\chi_i) \in X$ *en* δ_χ.

On posera $E_i = L^1(X_i, \sigma_i)$. Démontrons d'abord que $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ est une famille continue: les axiomes (i) à (iv) sont trivialement vérifiés; pour (v) il suffit de prendre la forme φ_i sur E_i définie par la fonction constante $|\lambda_i|/\lambda_i \in L^\infty(X_i, \sigma_i)$, c'est-à-dire

$$\varphi_i(f) = |\lambda_i|/\lambda_i \cdot \sum_{\chi_i \in x_i} f(\chi_i) \cdot \sigma_i(\chi_i) \quad \text{pour} \quad f \in E_i\,.$$

L'unicité de l'isomorphisme résulte du fait que les éléments $\otimes\, \delta_{\chi_i}$ forment un sous-ensemble total de $\hat{\otimes}\, E_i$.

Pour prouver l'existence partons d'abord d'un élément F de $L^1(\Gamma, \nu)$; on remarquera que la donnée de $(\lambda_i\, \delta_{\chi_i})$ détermine entièrement les λ_i et $\chi = (\chi_i)$; on a

$$\sum_{(\lambda_i \delta_{\chi_i}) \in \Gamma} |F((\lambda_i\, \delta_{\chi_i}))| \cdot \widehat{\Pi}\, |\lambda_i| \cdot \sigma(\chi) = \sum |F((\lambda_i\, \delta_{\chi_i}))| \cdot \nu((\lambda_i\, \delta_{\chi_i})) = \|F\|\,;$$

on peut donc définir une application linéaire continue $\bar{S}$ de norme $\leqq 1$ de $L^1(\Gamma, \nu)$ dans $L^1(X, \sigma)$ par

$$\bar{S}(F) = \sum_{(\lambda_i \delta_{\chi_i}) \in \Gamma} F((\lambda_i\, \delta_{\chi_i})) \cdot \widehat{\Pi}\, \lambda_i \cdot \delta_\chi\,;$$

$\bar{S}$ est nulle sur M (vérification facile), donc définit une application linéaire continue S de norme $\leqq 1$ de $\hat{\otimes}\, E_i$ dans $L^1(X, \sigma)$ qui transforme tout élément $\otimes\, \delta_{\chi_i}$ en δ_χ.

Inversement pour tout élément f de $L^1(X, \sigma)$ on a

$$\sum_{\chi \in x} |f(\chi)| \cdot \|\otimes\, \delta_{\chi_i}\| = \sum_{\chi \in x} |f(\chi)| \cdot \widehat{\Pi}\, \sigma_i(\chi_i) = \|f\|$$

et on peut définir une application linéaire continue T de norme $\leqq 1$ de $L^1(X, \sigma)$ dans $\hat{\otimes}\, E_i$ par

$$T(f) = \sum_{\chi \in x} f(\chi) \cdot \otimes\, \delta_{\chi_i}\,;$$

enfin il est immédiat que S et T sont mutuellement réciproques.

Exemple. On peut réaliser les conditions de la prop. 12 en prenant pour X_i un ensemble fixé X_0 muni d'une topologie, pour σ_i une mesure atomique fixée σ_0 sur X_0 telle que la fonction sur X_0: $\chi \to \sigma_0(\{\chi\})$ soit continue; pour ω_i un élément de X_0 de masse 1 et dépendant continûment de i; et pour X l'ensemble des applications continues $i \to \chi_i$ de I dans X_0 telles que $\chi_i = \omega_i$ en dehors d'un compact.

§ 9. Produit tensoriel inductif d'une famille continue constante d'espaces de Banach

Définissons I et μ comme au début du § 5; considérons la famille $((E_i), (\xi_i), \Gamma)$ continue constante associée à un espace de Banach E et à une application continue $i \to \xi_i$ (cf. § 5, exemple); notons Φ l'ensemble des applications continues $i \to \varphi_i$ de I dans E' muni de la topologie forte telles que $\varphi_i \neq 0$ pour tout i, que $\varphi_i(\xi_i) = 1$ en dehors d'un compact et que la fonction $i \to \log \|\varphi_i\|$ soit μ-intégrable. Rappelons (§ 5) que l'on peut associer à toute $(\varphi_i) \in \Phi$ une forme linéaire continue $\bar{\varphi}$ sur $L^1(\Gamma, \nu)$ telle que

$$\bar{\varphi}(F) = \sum_{(x_i) \in \Gamma} F((x_i)) \cdot \widehat{\Pi}\, \varphi_i(x_i) .$$

Définition. On notera $\hat{\hat{\otimes}}^{\xi \Gamma} E_i$ ou $\hat{\hat{\otimes}}\, E_i$ l'espace de Banach séparé-complété de $L^1(\Gamma, \nu)$ pour la semi-norme q définie par

$$q(F) = \sup_{(\varphi_i) \in \Phi} |\bar{\varphi}(F)| / \widehat{\Pi}\, \|\varphi_i\| .$$

On a évidemment $q(F) \leqq \|F\|$; d'autre part q est nulle sur M et on peut aussi définir $\hat{\hat{\otimes}}\, E_i$ comme le séparé-complété de $\hat{\otimes}\, E_i$ pour la semi-norme $x \to \sup_{(\varphi_i) \in \Phi} (\hat{\otimes}\, \varphi_i)(x) / \widehat{\Pi}\, \|\varphi_i\|$. On notera encore $\otimes\, x_i$ l'image canonique de $\delta_{(x_i)}$ dans $\hat{\hat{\otimes}}\, E_i$ pour toute famille $(x_i) \in \Gamma$; et on a $q(\otimes\, x_i) = \widehat{\Pi}\, \|x_i\|$ d'après la démonstration de la prop. 7.

Proposition 13. *Si F est un sous-espace de Banach de E contenant tous les ξ_i, le produit tensoriel $\hat{\hat{\otimes}}\, F_i$ de la famille constante correspondant à F et à $i \to \xi_i$ s'identifie isométriquement à un sous-espace de Banach de $\hat{\hat{\otimes}}\, E_i$.*

Définissons Δ, σ et Ψ à partir de F comme Γ, ν et Φ sont définis à partir de E; Δ est un sous-ensemble de Γ et σ est la restriction de ν à Δ; $\hat{\hat{\otimes}}\, F_i$ est le séparé-complété de $L^1(\Delta, \sigma)$, sous-espace de $L^1(\Gamma, \nu)$, pour la semi-norme $r(F) = \sup_{(\psi) \in \Psi} |\bar{\psi}(F)| / \Gamma\, \|\psi_i\|$; il suffit donc de prouver que $q(F) = r(F)$ pour toute $F \in L^1(\Delta, \sigma)$. On a évidemment $q(F) \leqq r(F)$; pour établir l'inégalité inverse prenons $\varepsilon > 0$ et $(\psi_i) \in \Psi$ telle que $|\bar{\psi}(F)| / \widehat{\Pi}\, \|\psi_i\| \geqq r(F)\, e^{-\varepsilon/2}$; soit $i \to \varepsilon_i > 0$ une fonction semi-continue inférieurement telle que $\int \varepsilon_i \, d\mu(i) \leqq \varepsilon/2$; en vertu du lemme 1 il existe une application continue $i \to \varphi_i$ de I dans E' telle que $\varphi_i \mid F = \psi_i$ et $\|\varphi_i\| \leqq e^{\varepsilon_i} \|\psi_i\|$ pour tout i; alors $(\varphi_i) \in \Phi$ et on a

$$q(F) \geqq |\bar{\varphi}(F)| / \widehat{\Pi}\, \|\varphi_i\| = |\bar{\psi}(F)| \widehat{\Pi}\, \|\varphi_i\| \geqq$$

$$\geqq |\bar{\psi}(F)| / e^{\varepsilon/2}\, \widehat{\Pi}\, \|\psi_i\| \geqq r(F)\, e^{-\varepsilon}$$

d'où $q(F) \geqq r(F)$.

§ 10. Produits tensoriels continus d'algèbres de Banach unitaires

Nous appellerons *famille continue d'algèbres de Banach* toute famille continue $((A_i)_{i \in I}, (e_i)_{i \in I}, \Gamma)$ où les A_i sont des algèbres de Banach, e_i l'élément unité de A_i, et où $(x_i) \in \Gamma$ et $(y_i) \in \Gamma$ impliquent $(x_i\, y_i) \in \Gamma$.

Proposition 14. *Si $((A_i), (e_i), \Gamma)$ est une famille continue d'algèbres de Banach il existe sur $\hat{\otimes}\, A_i$ une structure d'algèbre de Banach et une seule telle que $\otimes\, x_i \cdot \otimes\, y_i = \otimes\, x_i\, y_i$ pour (x_i) et $(y_i) \in \Gamma$. Si les A_i sont involutives et si $(x_i^*) \in \Gamma$ dès que $(x_i) \in \Gamma$, il existe sur $\hat{\otimes}\, A_i$ une involution et une seule telle que $(\otimes\, x_i)^* = \otimes\, x_i^*$.*

D'abord Γ est un monoïde semi-normé pour l'opération $x\, y = (x_i\, y_i)$ et la semi-norme ν; par un procédé standard on peut munir $L^1(\Gamma, \nu)$ d'une structure d'algèbre de Banach en posant $(F\, G)\,(x) = \sum\limits_{y z = x} F(y)\, G(z)$; on a alors $\delta_x\, \delta_y = \delta_{x y}$. On va voir que $\overline{M}$ est un idéal bilatère de cette algèbre; pour cela il suffit de montrer que, avec les notations du § 5, tout élément de la forme $\delta_{(u_i)} \cdot (\delta_{(\lambda_i x_i)} - \widehat{\Pi}\, \lambda_i \cdot \delta_{(x_i)})$, $(\delta_{(\lambda_i x_i)} - \widehat{\Pi}\, \lambda_i \times \delta_{(x_i)}) \cdot \delta_{(u_i)}$, $\delta_u \cdot (\delta_x + \delta_y - \delta_z)$, $(\delta_x + \delta_y - \delta_z) \cdot \delta_u$ appartient à M, ce qui ne présente aucune difficulté. La structure d'algèbre cherchée sur $\hat{\otimes}\, A_i$ est alors la structure quotient; son unicité résulte de la totalité des éléments $\otimes\, x_i$. Supposons maintenant les A_i involutives et $(x_i^*) \in \Gamma$ dès que $(x_i) \in \Gamma$; $L^1(\Gamma, \nu)$ est une algèbre de Banach involutive si l'on pose $F^*((x_i)) = \overline{F((x_i^*))}$; et l'involution passe au quotient puisque, comme on le voit immédiatement, l'idéal $\overline{M}$ est autoadjoint.

Proposition 15. *Soient $((A_i), (e_i), \Gamma)$ une famille continue d'algèbres de Banach, $((E_i), (\xi_i), \Delta)$ une famille continue d'espaces de Banach, et, pour tout i, π_i une représentation continue de A_i dans E_i; on suppose que*

a) *pour tout i les éléments x_i où $(x_i) \in \Delta$ sont partout denses dans E_i;*

b) *la fonction $i \to \log\|\pi_i\|$ est μ-intégrable;*

c) *pour tout $(a_i) \in \Gamma$ et tout $(x_i) \in \Delta$ on a $(\pi_i(a_i) \cdot x_i) \in \Delta$;*

dans ces conditions il existe une représentation continue unique $\hat{\otimes}\, \pi_i$ de $\hat{\otimes}\, A_i$ dans $\hat{\otimes}\, E_i$ telle que $(\hat{\otimes}\, \pi_i)\,(\otimes\, a_i)\,(\otimes\, x_i) = \otimes\,(\pi_i(a_i) \cdot x_i)$ pour $(a_i) \in \Gamma$ et $(x_i) \in \Delta$; sa norme est au plus égale à $\widehat{\Pi}\, \|\pi_i\|$.

Pour tout $(a_i) \in \Gamma$ la famille des opérateurs $\pi_i(a_i)$ vérifie les hypothèses de la prop. 10 et on a même $\log\|\pi_i(a_i)\| \leqq \log\|\pi_i\| + \log\|a_i\|$; on peut donc considérer $\hat{\otimes}\, \pi_i(a_i) \in \mathscr{L}(\hat{\otimes}\, E_i)$, opérateur de norme au plus égale à $\widehat{\Pi}\, \|\pi_i\| \cdot \widehat{\Pi}\, \|a_i\|$; pour tout $F \in L^1(\Gamma, \nu)$ on a

$$\sum_{a \in \Gamma} |F(a)| \cdot \|\hat{\otimes}\, \pi_i(a_i)\| \leqq \widehat{\Pi}\, \|\pi_i\| \cdot \|F\|$$

ce qui permet de définir une application linéaire continue $\bar{\pi}$ de norme $\leqq \widehat{\Pi}\, \|\pi_i\|$ de $L^1(\Gamma, \nu)$ dans $\mathscr{L}(\hat{\otimes}\, E_i)$ par $\bar{\pi}(F) = \sum\limits_{a \in \Gamma} F(a) \cdot \hat{\otimes}\, \pi_i(a_i)$;

$\bar{\pi}$ est un morphisme d'algèbres: en effet pour F et $G \in L^1(\Gamma, \nu)$ on a

$$\bar{\pi}(F\,G) = \sum_{a \in \Gamma} \sum_{bc = a} F(b)\, G(c) \cdot \hat{\otimes}\, \pi_i(b_i)\, \pi_i(c_i)$$

$$\hat{\otimes}\, \pi_i(b_i)\, \pi_i(c_i) = \hat{\otimes}\, \pi_i(b_i) \cdot \hat{\otimes}\, \pi_i(c_i)$$

d'après la propriété (iii) du § 7; donc

$$\bar{\pi}(F\,G) = \sum_{b,c} F(b) \cdot \hat{\otimes}\, \pi_i(b_i) \cdot G(c) \cdot \hat{\otimes}\, \pi_i(c_i) = \bar{\pi}(F)\, \bar{\pi}(G)\,;$$

$\bar{\pi}$ est nulle sur les éléments $\delta_{(\lambda_i a_i)} - \widehat{\Pi}\, \lambda_i\, \delta_{(a_i)}$ et $\delta_a + \delta_b - \delta_c$ en vertu des propriétés (i) et (ii) du § 7, donc nulle sur $\bar{M}$; d'où le résultat.

Relation entre produits tensoriels continus et produits croisés

Rappelons la définition des produits croisés (cf. [7]): soient A une algèbre de Banach, d'unité e, et G un groupe, d'élément neutre ε, opérant dans A par automorphismes isométriques notés $x \to s \cdot x$ ($x \in A$, $s \in G$); le produit croisé de A par G est l'algèbre de Banach $L^1(G, A)$ des applications F de G dans A, intégrables pour la mesure attribuant la masse 1 à chaque point de G, munie de la multiplication suivante:

$$(F\,F')\,(s) = \sum_{t \in G} F(t)\, t \cdot F'(t^{-1}\, s)\,;$$

on notera U et V les applications de G et de A dans $L^1(G, A)$ définies respectivement par

$$(U(s))\,(t) = \begin{cases} e \text{ si } t = s \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(V(x))\,(t) = \begin{cases} x \text{ si } t = \varepsilon \\ 0 \text{ sinon}\,; \end{cases}$$

les éléments $U(s)$ et $V(x)$ engendrent $L^1(G, A)$ puisque tout élément F s'écrit $F = \sum_{s \in G} V(F(s))\, U(s)$; notons aussi l'identité fondamentale

$$U(s)\, V(x) = V(s \cdot x)\, U(s)\,. \tag{1}$$

Soient maintenant $((A_i), (e_i), \Gamma)$ une famille continue d'algèbres de Banach et A son produit tensoriel; pour tout i soit G_i un groupe d'élément neutre ε_i, opérant dans A_i par automorphismes isométriques; notons U_i et V_i les applications correspondantes de G_i et A_i dans $L^1(G_i, A_i)$; soit G le sous-ensemble de $\Pi\, G_i$ formé des familles $s = (s_i)$ telles que $s_i = \varepsilon_i$ en dehors d'un compact et que l'on ait $(s_i \cdot x_i)$ et $(s_i^{-1} \cdot x_i) \in \Gamma$ dès que $(x_i) \in \Gamma$; G est un sous-groupe de $\Pi\, G_i$ et opère dans A par automorphismes isométriques tels que $s \cdot \otimes\, x_i = \otimes\, (s_i \cdot x_i)$ (cf. prop. 10 et propriétés suivantes). Soit Θ le sous-ensemble de $\Pi\, L^1(G_i, A_i)$ formé des familles $i \to V_i(x_i)\, U_i(s_i)$ où $(s_i) \in G$ et $(x_i) \in \Gamma$; on notera 1_i l'élément unité $U_i(\varepsilon_i) = V_i(e_i)$ de $L^1(G_i, A_i)$.

Proposition 16. *La famille d'algèbres de Banach* $\big((L^1(G_i, A_i)), (1_i), \Theta\big)$ *est continue et il existe un isomorphisme d'algèbres de Banach unique de* $L^1(G, A)$ *sur* $\hat{\otimes}^{(1_i)\Theta} L^1(G_i, A_i)$ *transformant* $U(s)$ *en* $\otimes\, U_i(s_i)$ *pour tout* $s = (s_i) \in G$ *et* $V(\otimes\, x_i)$ *en* $\otimes\, V_i(x_i)$ *pour tout* $(x_i) \in \Gamma$.

Soit Δ le sous-ensemble de $\Pi\, L^1(G_i)$ formé des familles $(\lambda_i\, \delta_{s_i})$ où $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$ et $(s_i) \in G$; d'après la prop. 12, $\big((L^1(G_i), \delta_{\varepsilon_i}), \Delta\big)$ est une famille continue. On sait qu'il existe pour tout i un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^1(G_i, A_i)$ sur $L^1(G_i) \hat{\otimes} A_i$ transformant tout élément $V_i(x_i)\, U_i(s_i)$ en $\delta_{s_i} \otimes x_i$; on peut donc identifier $\big((L^1(G_i, A_i), (1_i), \Theta\big)$ à $\big((L^1(G_i) \hat{\otimes} A_i, (\delta_{\varepsilon_i} \hat{\otimes} e_i), \Gamma'\big)$ où Γ' est le sous-ensemble de $\Pi\, (L^1(G_i) \hat{\otimes} A_i)$ formé des familles $(\delta_{s_i} \otimes x_i)$; le corollaire 3 montre alors que ces familles sont continues, puis qu'il existe un isomorphisme isométrique de $\hat{\otimes}\, L^1(G_i, A_i)$ sur $\hat{\otimes}\, L^1(G_i) \hat{\otimes} A$ transformant $\otimes\, V_i(x_i)\, U_i(s_i)$ en $(\otimes\, \delta_{s_i}) \otimes (\otimes\, x_i)$; d'après la prop. 12 il existe un isomorphisme isométrique de $\hat{\otimes}\, L^1(G_i)$ sur $L^1(G)$ transformant $\otimes\, \delta_{s_i}$ en δ_s; enfin on a un isomorphisme isométrique de $L^1(G) \hat{\otimes} A$ sur $L^1(G, A)$ transformant $\delta_s \otimes (\otimes\, x_i)$ en $V(\otimes\, x_i)\, U(s)$; en composant ces isomorphismes on obtient un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $\hat{\otimes}\, L^1(G_i, A_i)$ sur $L^1(G, A)$ transformant $\otimes\, V_i(x_i)\, U_i(s_i)$ en $V(\otimes\, x_i)\, U(s)$; pour montrer que cet isomorphisme respecte les produits il suffit de montrer qu'il transforme $\otimes\, V_i(x_i)\, U_i(s_i) \cdot \otimes\, V_i(x_i')\, U_i(s_i')$ en $V(\otimes\, x_i)\, U(s)\, V(\otimes\, x_i')\, U(s')$, ce qui est facile en tenant compte de (1).

§ 11. Produits tensoriels continus de certaines familles d'espaces hilbertiens

Ce paragraphe s'inspire de [1]. Pour tout espace hilbertien complexe H on notera $S^n H$ le sous-espace vectoriel fermé de l'espace hilbertien $H \otimes \cdots \otimes H$ (n fois) formé des éléments symétriques; $S^n H$ est aussi engendré par les éléments de la forme $x \otimes x \otimes \cdots x$ où $x \in H$ (cf. [1], § 5) que nous noterons simplement x^n; on notera $S\,H$ la somme hilbertienne des $S^n H$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, $S^0 H$ étant l'espace $\mathbb{C}$; notons ε l'élément $(1, 0, 0, \ldots)$. Pour tout $x \in H$ on note $\exp x$ l'élément de $S\,H$ ayant pour composantes 1 dans $S^0 H$ et $x^n/\sqrt{n!}$ dans $S^n H$; on a

$$(\exp x \mid \exp y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n \mid y^n)/n! = \sum_{n=0}^{\infty} (x \mid y)^n/n! = e^{(x|y)};$$

les éléments $\exp x$ ($x \in H$) forment un sous-ensemble total de $S\,H$ ([1], lemme 5.1); l'application $x \to \exp x$ est continue car si une suite x_q tend vers un élément x on a

$$\|\exp x_q - \exp x\|^2 = e^{\|x_q\|^2} + e^{\|x\|^2} - 2\,\mathrm{Re}\, e^{(x_q|x)}$$

qui tend vers 0.

Proposition 17. *Définissons* I *et* μ *comme au début du* § 5; *soient* $(H_i)_{i \in I}$ *une famille d'espaces hilbertiens et* Δ *un sous-espace vectoriel de* $\Pi\, H_i$ *tel que pour tout* (x_i) *et tout* $(y_i) \in \Delta$ *la fonction* $i \to (x_i \mid y_i)$ *soit continue* *et à support compact; soit H l'espace hilbertien séparé-complété de Δ pour le produit scalaire $((x_i)|(y_i)) = \int (x_i \mid y_i)\, d\mu(i)$; soit Γ le sous-ensemble de $\Pi\, S\, H_i$ formé des familles $(\lambda_i \exp x_i)$ où $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$ et $x = (x_i) \in \Delta$; la formule $(F \mid G) = \sum_{a,b \in \Gamma} F(a)\, \overline{G(b)}\, \widehat{\Pi}(a_i \mid b_i)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{K}(\Gamma)$. Il existe un isomorphisme isométrique unique de l'espace hilbertien séparé-complété de $\mathscr{K}(\Gamma)$ sur $S\, H$ transformant, pour tout $(x_i) \in \Delta$, l'image canonique de l'élément $\delta_{(\exp x_i)}$ de $\mathscr{K}(\Gamma)$ en l'exponentielle de l'image canonique de l'élément (x_i) de Δ.*

Remarquons d'abord que la donnée d'une famille $(\lambda_i \exp x_i)$ détermine entièrement les λ_i et les x_i; on notera encore (x_i) l'image canonique de cet élément dans H. Soit T l'application linéaire de $\mathscr{K}(\Gamma)$ dans $S\, H$ définie par $T(F) = \sum_{(\lambda_i \exp x_i) \in \Gamma} F((\lambda_i \exp x_i)) \cdot \widehat{\Pi}\, \lambda_i \cdot \exp(x_i)$; pour F et $G \in \mathscr{K}(\Gamma)$ on a

$$\begin{aligned}
(T(F) \mid T(G)) &= \sum F((\lambda_i \exp x_i))\, \overline{G((\lambda_i' \exp x_i'))}\, \widehat{\Pi}\, \lambda_i\, \overline{\widehat{\Pi}\, \lambda_i'} (\exp(x_i) | (\exp(x_i'))\\
&= \sum F((\lambda_i \exp x_i))\, \overline{G((\lambda_i' \exp x_i'))}\, \widehat{\Pi}\, \lambda_i\, \overline{\widehat{\Pi}\, \lambda_i'} \exp(\textstyle\int (x_i \mid y_i)\, d\mu(i))\\
&= \sum F((\lambda_i \exp x_i))\, \overline{G((\lambda_i' \exp x_i'))} \exp(\textstyle\int \log(\lambda_i\, \overline{\lambda_i'}\, e^{(x_i|y_i)})\, d\mu(i))\\
&= \sum F((\lambda_i \exp x_i))\, \overline{G((\lambda_i' \exp x_i'))}\, \widehat{\Pi}\, (\lambda_i \exp x_i \mid \lambda_i' \exp x_i')\\
&= (F \mid G);
\end{aligned}$$

ceci prouve que la fonction $(F, G) \to (F \mid G)$ est une forme sesquilinèaire hermitienne positive sur $\mathscr{K}(\Gamma)$ et que T définit une application linéaire isométrique $\overline{T}$ du séparé-complété de $\mathscr{K}(\Gamma)$ dans $S\, H$; $\operatorname{Im} \overline{T}$ contient les éléments $\exp x$ où $x \in \Delta$; donc, par continuité, tous les éléments $\exp x$ où $x \in H$; et ceci montre que $\overline{T}$ est surjective.

§ 12. Produits tensoriels continus de C*-algèbres; applications à la théorie quantique des champs

Définissons I et μ comme au début du § 5; soit $((A_i), (e_i), \Gamma)$ une famille continue d'algèbres de Banach qui sont des C^*-algèbres, avec $(x_i^*) \in \Gamma$ dès que $(x_i) \in \Gamma$; la prop. 14 permet de considérer l'algèbre de Banach involutive $\hat{\otimes}\, A_i$ et la prop. 4 justifie la

Définition. Nous appellerons *C^*-algèbre produit tensoriel continu* de la famille $((A_i), (e_i), \Gamma)$ et noterons $\check{\otimes}^\Gamma A_i$ ou $\check{\otimes}\, A_i$ la C^*-algèbre enveloppante de $\hat{\otimes}\, A_i$. On notera encore $\otimes\, x_i$ l'image canonique de $\otimes\, x_i$ dans $\check{\otimes}\, A_i$ pour tout $(x_i) \in \Gamma$; on ignore la norme d'un tel élément et, à vrai dire, on ignore si $\check{\otimes}\, A_i$ n'est pas réduit à 0!.

Proposition 18. *La C^*-algèbre $\check{\otimes}\, A_i$ jouit des propriétés suivantes:*

(i) *les éléments $\otimes\, x_i$ où $(x_i) \in \Gamma$ forment une partie totale de $\check{\otimes}\, A_i$:*

(ii) *on a $\otimes\, \lambda_i\, x_i = \widehat{\Pi}\, \lambda_i \cdot \otimes\, x_i$ pour $(x_i) \in \Gamma$ et $(\lambda_i) \in \mathscr{K}(I) + 1$;*

(iii) *soient I^0 une partie ouverte de I vérifiant les conditions du § 5,*

Γ^0 l'ensemble des restrictions à I^0 des familles $(x_i) \in \Gamma$ telles que $x_i = e_i$ en dehors d'un compact inclu dans I^0; il existe un morphisme unique de $\check{\bigotimes}_{i\in I^0}^{\Gamma^0} A_i$ dans $\check{\bigotimes}_{i\in I}^{\Gamma} A_i$ transformant tout élément $\bigotimes_{i\in I^0} x_i$ où $(x_i) \in \Gamma^0$ en l'élément $\bigotimes_{i\in I} y_i$ où $y_i = x_i$ pour $i \in I^0$ et $y_i = e_i$ pour $i \in I^0$; l'image de ce morphisme est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les éléments $\otimes y_i$ où $(y_i) \in \Gamma$ et $y_i = e_i$ en dehors d'un compact inclu dans I^0;

(iv) *supposons que I soit réunion d'une famille $(I^a)_{a\in A}$ d'ouverts deux à deux disjoints; notons x^a la restriction à I^a d'une famille quelconque $x = (x_i) \in \Gamma$; Γ^a l'ensemble des x^a où $(x_i) \in \Gamma$; on suppose en outre que pour toute famille $(y_a) \in \Pi\, \Gamma^a$ telle que $y_a = e^a$ pour presque tout a il existe une famille $(x_i) \in \Gamma$ vérifiant $y_a = x^a$ pour tout a; alors il existe un isomorphisme unique de $\check{\bigotimes}_{i\in I}^{\Gamma} A_i$ sur $\check{\bigotimes}_{a\in A} \left(\check{\bigotimes}_{i\in I^a}^{\Gamma^a}\right) A_i$ transformant $\bigotimes_{i\in I} x_i$ en $\bigotimes_{a\in A}\left(\bigotimes_{i\in I^a} x_i\right)$ pour tout $(x_i) \in \Gamma$.*

Les assertions (i) et (ii) sont triviales; (iii) résulte de la remarque 4 et (iv) des prop. 4 et 8.

Application à la théorie quantique des champs

On va voir que la notion de produit tensoriel continu permet de construire une famille de C^*-algèbres $B \to \mathscr{A}(B)$ (B ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^4$) vérifiant trois des quatre axiomes posés dans [4] pour définir la famille des algèbres d'observables locales, à savoir:

a) si $B_1 \supset B_2$, $\mathscr{A}(B_1) \supset \mathscr{A}(B_2)$; on peut alors condsidérer les $\mathscr{A}(B)$ comme des sous-algèbres de leur limite inductive $\mathscr{A}$;

b) si B_1 et B_2 sont mutuellement de type espace [i. e. si $(x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$ est négatif pour tout $x \in B_1$ et tout $y \in B_2$] alors $\mathscr{A}(B_1)$ et $\mathscr{A}(B_2)$ commutent;

c) le groupe de Lorentz inhomogène $\mathscr{P}$ est représenté par des automorphismes α_L de $\mathscr{A}$, où $L \in \mathscr{P}$, de façon que $\alpha_L(\mathscr{A}(B)) = \mathscr{A}(L\,B)$.

On va pour cela se placer dans le cas d'un champ scalaire neutre; notons M l'espace-temps de Minkovski, ou »espace des x«; M^* l'espace dual, ou »espace des k«; m un nombre réel strictement positif; C_m l'hyperboloïde dans M^* défini par $k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = m^2$; C_m^+ sa nappe supérieure ($k_0 > 0$); μ une mesure positive sur C_m^+ invariante par le groupe de Lorentz homogène connexe G; ν la mesure sur C_m définie par $\nu = \mu - \check{\mu}$ ou $d\nu(k) = d\mu(k) - d\mu(-k)$; Δ la distribution sur M transformée de Fourier de ν, ce qui signifie que $\Delta(f) = \nu(\hat{f})$ avec $\hat{f}(k) = \int e^{-i\langle k,x\rangle} f(x)\, dx$; Δ est invariante par G et vérifie $\check{\Delta} = -\Delta$ (parce que ν a les mêmes propriétés), d'où résulte qu'elle est nulle en dehors du cône de lumière[1];

[1] c'est-a-dire dons le region de'finie par

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0$$

de plus pour deux fonctions f et g sur M on a

$$\int\int f(x)\, g(y)\, \Delta(x-y)\, dx\, dy = \int \hat{f}(-k)\, \hat{g}(k)\, d\nu(k)\,;$$

si en outre f et g sont *réelles* on a $\check{\hat{f}} = \overline{\hat{f}}$ et $\check{\hat{g}} = \overline{\hat{g}}$ d'où

$$\int\int f(x)\, g(y)\, \Delta(x-y)\, dx\, dy = \int \overline{\hat{f}}\hat{g}\, d\mu - \int \hat{f}\overline{\hat{g}}\, d\mu = -2i \operatorname{Im} \int \hat{f}\overline{\hat{g}}\, d\mu \quad (1)$$

et ceci est *nul* si les supports de f et g sont mutuellement de type espace.

Pour tout $k \in C_m^+$ notons E_k l'espace hilbertien $\mathbb{C}$, $\mathscr{A}_k$ son algèbre de Weyl (cf. [6]); autrement dit $\mathscr{A}_k$ est isomorphe à l'algèbre des opérateurs lineaires continus dans un espace hilbertien complexe de dimension infinie dénombrable et on a une application U_k de E_k dans l'ensemble des éléments unitaires de $\mathscr{A}_k$, fortement continue et vérifiant

$$U_k(u)\, U_k(v)\, U_k(u)^{-1}\, U_k(v)^{-1} = e^{-2i \operatorname{Im} u\bar{v}}\,;$$

de plus les $U_k(u)$ forment un ensemble irréductible dans $\mathscr{A}_k$.

Posons $\mathscr{A} = \check{\bigotimes}^{\Gamma}_{k \in C_m^+} \mathscr{A}_k$, produit tensoriel continu d'une famille constante de C^*-algèbres; en réalité on doit modifier légèrement la définition adoptée jusqu'à maintenant de façon à pouvoir considérer des éléments de $\mathscr{A}$ de la forme $\otimes\, U_k(\hat{f}(k))$ où $f \in \mathscr{D}(M)$; on peut prendre pour Γ l'ensemble des familles $k \to \varphi(k)\, U_k(\hat{f}(k))$ où $f \in \mathscr{D}(M)$ et où φ est une fonction continue tendant vers 1 suffisamment vite lorsque $k \to \infty$. Pour toute fonction réelle $f \in \mathscr{D}(M)$ posons $A(f) = \otimes\, U_k(\hat{f}(k)) \in \mathscr{A}$; on a alors

$$\begin{aligned} A(f)\, A(g)\, A(f)^{-1}\, A(g)^{-1} &= \otimes\, U_k(\hat{f}(k))\, U_k(\hat{g}(k))\, U_k(\hat{f}(k))^{-1}\, U_k(\hat{g}(k))^{-1} \\ &= \otimes \exp(-2i \operatorname{Im} \hat{f}(k)\, \overline{\hat{g}(k)}) \\ &= \exp(-2i \operatorname{Im} \int \hat{f}\, \overline{\hat{g}}\, d\mu) \end{aligned}$$

d'où, d'après (1):

$$A(f)\, A(g)\, A(f)^{-1}\, A(g)^{-1} = \exp(\int\int f(x)\, g(y)\, \Delta(x-y)\, dx\, dy)\,. \quad (2)$$

Associons à tout ouvert relativement compact B de M la sous-C^*-algèbre $\mathscr{A}(B)$ de $\mathscr{A}$ egendrée par les éléments $A(f)$ où $\operatorname{supp} f \subset B$; alors l'axiome a) est vérifié trivialement et b) l'est en vertu de (2); de plus, Γ étant choisi comme indiqué ci-dessus, $\mathscr{A}$ apparaît comme la limite inductive des $\mathscr{A}(B)$. Reste à vérifier la covariance vis à vis du groupe $\mathscr{P}$.

Soit d'abord Λ une transformation de M appartenant au groupe de Lorentz connexe homogène G; il en résulte une transformation Λ' de M^* telle que $\langle \Lambda' k, x\rangle = \langle k, \Lambda^{-1} x\rangle$; Λ' induit un homéomorphisme de C_m^+ conservant μ, d'où un automorphisme α_Λ de $\mathscr{A}$ transformant tout élément $\otimes\, b_k$ en $\otimes\, c_k$ où $c_k = b_{\Lambda'^{-1}k}$; pour toute $f \in \mathscr{D}(M)$ posons $(\Lambda f(x) = f(\Lambda^{-1} x)$; alors on vérifie aisément que

$$A(\Lambda f) = \alpha_\Lambda(A(f))\,. \quad (3)$$

Considérons maintenant une translation de M: $x \to x + a$; posons $(a f)(x) = f(x - a)$; pour tout $k \in C_m^+$ on a un automorphisme de E_k: $u \to e^{-i\langle k, a\rangle} \cdot u$; d'où un automorphisme $\alpha_{a,k}$ de $\mathscr{A}_k$ tel que $\alpha_{a,k}(U_k(u)) = U_k(e^{-i\langle k, a\rangle} \cdot u)$ pour tout $u \in E_k$; soit α_a l'automorphisme de $\mathscr{A}$, produit tensoriel des $\alpha_{a,k}$: $\alpha_a(\otimes b_k) = \otimes\, \alpha_{a,k}(b_k)$; alors on a facilement

$$A(a\, f) = \alpha_a(A(f))\,. \tag{4}$$

Il est facile de vérifier que $\alpha_\Lambda\, \alpha_a\, \alpha_\Lambda^{-1} = \alpha_{\Lambda a}$, ce qui permet de définir un morphisme $L \to \alpha_L$ du groupe $\mathscr{P}$ dans le groupe des automorphismes de $\mathscr{A}$; (3) et (4) montrent que $A(L\, f) = \alpha_L(A(f))$; d'où l'axiome c).

Enfin on doit pouvoir interpréter la représentation classique de Fok comme produit tensoriel continue des représentations de Schrödinger des diverses algèbres $\mathscr{A}_k$; indiquons le principe du raisonnement (qui en fait se heurte à un certain nombres de difficultés techniques non encore surmontées): chaque $\mathscr{A}_k$ admet une représentation irréductible π_k (qui en est d'ailleurs la seule représentation irréductible »normale«) dans l'espace $S\, E_k$ (cf. § 11), associée à un état φ_k de $\mathscr{A}_k$ tel que $\varphi_k(U_k(u)) = e^{-\frac{1}{2}|u|^2}$ pour tout $u \in E_k$; posons $\varphi = \otimes\, \varphi_k$ (en admettant que ce soit effectivement un état!); alors on aura

$$\varphi(A(f)) = \widehat{\Pi}\, e^{-\frac{1}{2}|\hat{f}(k)|^2} = e^{-\frac{1}{2}\int |\hat{f}|^2 d\mu}\,;$$

de plus on peut raisonnablement penser que la représentation de $\mathscr{A}$ associée à φ opère dans l'espace hilbertien $\otimes\, S\, E_k$, lequel, d'après la prop. 17, devrait être isomorphe à $S\big(\overset{\oplus}{\int} E_k\, d\mu(k)\big) = S(L^2(C_m^+, \mu))$-espace hilbertien dans lequel opère effectivement la représentation classique de Fok.

Ajoutons pour terminer que plusieurs conversations avec D. Kastler nous ont guidé dans la rédaction de ce dernier paragraphe.

Signalons aussi qu'on peut modifier la construction précédente pour faire opérer dans $\mathscr{A}$ le groupe de Lorentz complet; et qu'on peut faire une construction analogue dans le cas du champ de Maxwell.

Ajouté en épreuves. On a repris et un peu amélioré tout ce travail, mais surtout le dernier paragraphe, dans un cours fait à l'Université de Strasbourg à l'occasion de la R.C.P. n° 25, et qui sera publié ultérieurement.

Bibliographie

1. Araki, H., and E. J. Woods: Complete Boolean algebras of type I factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **2**, 157—242 (1966).
2. Dixmier, J., and A. Douady: Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres. Bull. Soc. Math. France **91**, 227—284 (1963).
3. Guichardet, A.: Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation. Ann. Sci. Ecole. Norm. Super. **83**, 1—52 (1966).
4. Haag, R., and D. Kastler: An algebraic approach to quantum field theory. J. Math. Phys. **5**, 848—861 (1964).
5. Michael, E.: Continuous selections; I. Ann. Math. **63**, 361—382 (1956).
6. Segal, I. E.: Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field. Illinois J. Math. **6**, 500—523 (1962).
7. Zeller-Meier, G.: Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes. C.R. Acad. Sci. Paris **263**, 20—23 (1966).