Commun. math. Phys. 4, 177—189 (1967)

Spin d'une Particule

PIERRE METZGER

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes — 75 Paris V — France

Reçu le 1 Juillet, 1966

Abstract. The purpose of this note is to study the spin of a free relativistic particle, using the language defined by Mr. LAURENT SCHWARTZ. In contradistinction with what has been done often, we work completely in the Hilbert space of the particle, whithout using (improper) pure states of energy-momentum. We first explain our formalism in a general basis-independant way and then perform the whole calculus on a particular example. The probabilities of spin orientation along a quantization axis depend on the observer.

L'objet de cette note est une étude du spin d'une particule relativiste libre utilisant le langage défini par M. LAURENT SCHWARTZ dans un cours qui sera notre référence 1.

Contrairement à ce qui a été fait couramment, nous opérons entièrement dans l'espace de Hilbert de la particule sans utiliser d'états purs (impropres) d'impulsion.

Espace d'Impulsion, Espace de Polarisation, Surface de masse et Groupe Structural (rappels et notations)

Nous désignons par $\mathbf{E}_4'$ l'espace d'impulsion, dual de l'espace vectoriel de Minkowski; nous notons p son point courant et p^2 la forme de Lorentz, de signature $(- + + +)$.

m étant la masse de la particule, nous désignons par Ω la nappe de l'hyperboloïde à deux nappes d'équation $p^2 = -m^2$ sur laquelle la composante de genre temps (composante d'énergie) est négative. A toute direction de genre temps de $\mathbf{E}_4'$ est associé biunivoquement un point de Ω.

Nous notons F l'espace de polarisation de la particule; c'est un espace vectoriel à un nombre fini de dimensions sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Le groupe structural G (Cf. Réf. 1, pp. 16 et 18) opère à la fois sur $\mathbf{E}_4'$ et sur F; en fait, il nous suffira de préciser l'action du groupe G/G_0, quotient de G par le sous-groupe invariant abélien G_0 qui agit sur E_4 (espace affine de Minkowski) comme les translations, sur $\mathbf{E}_4'$ et sur F comme l'identité (Cf. Réf. 1, p. 146).

Nous notons Γ l'élément générique de G/G_0. Il y a un homomorphisme de G/G_0 dans le groupe de Lorentz propre L de $\mathbf{E}_4'$; à $\Gamma \in G/G_0$ correspond un opérateur $\sigma \in L$. Il y a un homomorphisme de G/G_0 dans les opérateurs linéaires de F; à $\Gamma \in G/G_0$ correspond un opérateur $V \in \mathscr{L}(F, F)$. La représentation de G/G_0 ainsi définie sur le produit $\mathbf{E}_4' \otimes F$ est supposée fidèle (Cf. Réf. 1, p. 18).

A tout point p de Ω correspond un sous-espace vectoriel F_p de F muni d'une métrique hermitienne définie positive; le produit scalaire dans F_p sera noté $(,)_p$. Lorsque $\sigma \in L$ décrit le stabilisateur de p, l'opérateur correspondant $V \in \mathscr{L}(F, F)$ décrit un sous-groupe du groupe unitaire de F_p relatif à cette métrique et cette représentation unitaire d'un sous-groupe de G/G_0 par des opérateurs de $\mathscr{L}(F_p, F_p)$ est supposée irréductible (Cf. Réf. 1, pp. 150sq).

Enfin, étant donnés deux points p_1 et p_2 de Ω, on sait qu'il existe un et un seul élément $\sigma_{p_1 p_2}$ de L (transformation de Lorentz pure) caractérisé comme suit:

a) il transforme p_1 en p_2

b) il laisse le plan bidimensionnel de $\mathbf{E}_4'$ contenant p_1 et p_2 invariant globalement

c) il opère comme l'identité sur le plan orthogonal au précédent pour la métrique de Lorentz.

A $\sigma_{p_1 p_2}$ on sait associer un élément $V_{p_1 p_2}$ de $\mathscr{L}(F, F)$ tel que $\sigma_{p_1 p_2}$ et $V_{p_1 p_2}$ soient les images dans L et dans $\mathscr{L}(F, F)$ d'un même élément de G/G_0. $V_{p_1 p_2}$ définit une application unitaire de F_{p_1} sur F_{p_2}. On a

$$V_{p_1 p_2} = V_{p_2 p_1}^{-1}.$$

En général

$$V_{p_1 p_3} \neq V_{p_2 p_3} V_{p_1 p_2}$$

par contre si $f, g \in F_{p_1}$, on a:

$$\begin{aligned}(f, g)_{p_1} &= (V_{p_1 p_2} f, V_{p_1 p_2} g)_{p_2} = (V_{p_2 p_3} V_{p_1 p_2} f, V_{p_2 p_3} V_{p_1 p_2} g)_{p_3} \\ &= (V_{p_1 p_3} f, V_{p_1 p_3} g)_{p_3}.\end{aligned}$$

On reconnaît dans la caractérisation de $\sigma_{p_1 p_2}$ celle de $\sigma_{a, p}$ donnée dans notre réf. 1, p. 198, où l'on note $\sigma(a, p)$ ce que nous notons V_{ap} et où l'on définit un opérateur V_q qui correspond à notre V_{pa}.

Espace de Hilbert de la Particule (rappels et notations)

L'espace de Hilbert des mouvements de la particule en représentation d'impulsion est l'espace $\mathscr{F}\mathscr{H}$ de notre réf. 1(pp. 167 sq); c'est l'espace des mesures fμ sur $\mathbf{E}_4'$ à valeurs dans F où:

1. μ est la mesure de densité 1 répartie sur la surface de masse Ω.
2. f est une fonction mesurable sur Ω à valeurs dans F telle que, pour tout $p \in \Omega$, $f(p) \in F_p$ et $\|f(p)\|_p = \sqrt{(f(p), f(p))_p}$ est de carré μ-intégrable.

Le produit scalaire de deux éléments $f\mu$ et $g\mu$ de $\mathscr{F}\mathscr{H}$ est

$$(f\mu, g\mu)_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \int_{\Omega} (f(p), g(p))_p \, d\mu(p)$$

et on suppose toujours

$$\|f\mu\|_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \sqrt{(f\mu, f\mu)_{\mathscr{F}\mathscr{H}}} = 1 .$$

Dans la pratique, on utilise une autre expression de ce produit scalaire (Cf. Réf. 1, pp. 194 sq): on choisit un point a de Ω et on a

$$(f\mu, g\mu)_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \int_{\Omega} (V_{pa}f(p), V_{pa}g(p))_a \, d\mu(p) .$$

Physiquement, choisir un point de Ω (c'est-à-dire une direction de temps) revient à considérer un observateur particulier, que nous désignerons par la même lettre que le point correspondant de Ω.

Spin par rapport à un axe pour un observateur donné

Le stabilisateur dans le groupe de Lorentz propre L d'un point a de Ω, associé à un observateur a particulier, est un groupe de rotations dans un espace tridimensionnel euclidien. Soit D une direction de ce dernier (c'est une direction de genre espace dans $\mathbf{E}_4'$). Les rotations autour d'un axe de direction D forment un sous-groupe à un paramètre de L. On sait associer à ce sous-groupe à un paramètre de L un sous-groupe à un paramètre du groupe unitaire de F_a tel que les éléments de ces deux sous-groupes correspondant à une même valeur du paramètre soient les images dans L et dans $\mathscr{L}(F, F)$ (l'image dans $\mathscr{L}(F, F)$ étant plus précisément dans $\mathscr{L}(F_a, F_a)$) d'un même élément de G/G_0.

Nous appellerons spin autour de la direction D pour l'observateur a l'opérateur qui agit dans chaque F_p comme l'opérateur $S_{D,a}(p) = i\,V_{ap} S_D V_{pa}$. Au mouvement $f\mu \in \mathscr{F}\mathscr{H}$, cet opérateur fait correspondre $i(V_{ap} S_D V_{pa} f)\mu$ qui est encore un élément de $\mathscr{F}\mathscr{H}$, car

$f(p) \in F_p$ par définition de $\mathscr{F}\mathscr{H}$

V_{pa} est une application de F_p sur F_a

$S_D \in \mathscr{L}(F_a, F_a)$ (générateur infinitésimal du sous-groupe à un paramètre du groupe unitaire de F_a que nous considérons)

V_{ap} est une application de F_a sur F_p

et, les opérateurs mis en jeu agissant dans des espaces de dimension finie, $i\,V_{ap} S_D V_{pa} f(p)$ est de carré μ-intégrable parce que $f(p)$ l'est.

Quel que soit p, $S_{D,a}(p)$ a le même polynôme caractéristique que iS_D, donc le même système de valeurs propres. Soit λ une telle valeur propre et supposons qu'il lui corresponde dans chaque F_p une seule direction propre de $S_{D,a}(p)$ dont nous choisissons un vecteur unitaire $e_{\lambda a}(p)$. La probabilité pour l'observateur a d'observer la valeur λ du spin autour de la direction D dans le mouvement $f\mu$ est par définition

$$P^a_{\lambda,D} = \int_{\Omega} |(f(p), e_{\lambda a}(p))_p|^2 \, \mathrm{d}\mu(p) .$$

Elle est indépendante de l'arbitraire (un facteur complexe de module 1) qui intervient dans la définition de $e_{\lambda a}(p)$.

N.B. Au cas où le sous-espace propre de F_p correspondant à la valeur propre λ aurait $m > 1$ dimensions, on y choisirait une base orthonormale $\{e_{\lambda a i}(p);\, i = 1, \ldots, m\}$ et on aurait

$$P^a_{\lambda, D} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{i=m} |(f(p), e_{\lambda a i}(p))_p|^2 \, d\mu(p) .$$

Changement d'observateur

Soit un observateur b en mouvement rectiligne uniforme par rapport au précédent. Le point b de Ω se déduit du point a par la transformation de Lorentz pure σ_{ab}, F_b de F_a par l'opérateur unitaire V_{ab}.

Pour que l'on puisse définir pour l'observateur b le spin autour de la direction D, il faut que les rotations autour de cette direction appartiennent au stabilisateur de b dans L en même temps qu'à celui de a. C'est le cas si et seulement si D est la direction de la translation rectiligne uniforme σ_{ab}. En effet soient

ξ le vecteur unitaire de a dans $\mathbf{E}'_4$

η celui de b

ζ le vecteur unitaire de l'axe de la translation retiligne uniforme σ_{ab}

$\operatorname{th}\chi$ la vitesse de cette translation (la vitesse de la lumière est $c = 1$). On a $\eta = \xi \operatorname{ch}\chi + \zeta \operatorname{sh}\chi$.

Soit X le vecteur unitaire d'une direction de genre espace de $\mathbf{E}'_4$, $R_\times$ une rotation autour de cette direction supposée appartenir aux stabilisateurs de a (ou de ξ) et de b (ou de η); on a

$$R_\times(\xi) = \xi$$

$$R_\times(\eta) = \eta$$

mais aussi

$$R_\times(\eta) = R_\times(\xi) \operatorname{ch}\chi + R_\times(\zeta) \operatorname{sh}\chi$$

et par suite

$$R_\times(\eta) = \xi \operatorname{ch}\chi + R_\times(\zeta) \operatorname{sh}\chi$$

donc

$$\eta = \xi \operatorname{ch}\chi + \zeta \operatorname{sh}\chi = \xi \operatorname{ch}\chi + R_\times(\zeta) \operatorname{sh}\chi$$

d'où, comme $\chi \neq 0$:

$$R_\times(\zeta) = \zeta$$

ce qui, ζ étant une direction de genre espace réelle, équivaut à $X = \zeta$.

Si D est la direction de σ_{ab}, S_D appartient à $\mathscr{L}(F_b, F_b)$ en même temps qu'à $\mathscr{L}(F_a, F_a)$ et on peut définir le spin autour de la direction D pour l'observateur b comme l'opérateur agissant dans chaque F_p comme l'opérateur $S_{D,b}(p) = i\, V_{bp} S_D V_{pb}$. Celui-ci a le même système de valeurs propres que $i S_D$ donc que $S_{D,a}(p)$. Supposons encore qu'à chaque valeur propre λ corresponde dans chaque F_p une seule direction propre de $S_{D,b}(p)$ dont nous choisissons un vecteur unitaire $e_{\lambda b}(p)$. La probabilité pour l'observateur b d'observer la valeur λ du spin autour de la direction D dans le mouvement $f\mu$ est

$$P^b_{\lambda, D} = \int_\Omega |(f(p), e_{\lambda b}(p))_p|^2 \, d\mu(p)$$

N.B. Au cas où la valeur propre λ est multiple, on a la même complication que celle signalée plus haut à propos de la définition de $P^a_{\lambda, D}$.

Choix des vecteurs e_λ

1. $e_{\lambda a}(p)$ est déterminé à un facteur complexe de module 1 près par les conditions suivantes:

(i) c'est un vecteur unitaire de F_p

(ii) $S_{D,a}(p)\, e_{\lambda a}(p) = \lambda e_{\lambda a}(p)$.

En particulier, supposons choisi le vecteur $e_{\lambda a}(a)$, vecteur unitaire de F_a tel que (puisque $S_{D,a}(a) = i V_{aa} S_D V_{aa} = i S_D$)

$$i S_D e_{\lambda a}(a) = \lambda e_{\lambda a}(a) .$$

V_{ap} étant une application unitaire de F_a sur F_p, $V_{ap} e_{\lambda a}(a)$ est un vecteur unitaire de F_p; en outre

$$\begin{aligned} S_{D,a}(p)\, V_{ap} e_{\lambda a}(a) &= i V_{ap} S_D V_{pa} V_{ap} e_{\lambda a}(a) \\ &= i V_{ap} S_D e_{\lambda a}(a) \\ &= \lambda V_{ap} e_{\lambda a}(a) . \end{aligned}$$

Le vecteur $V_{ap} e_{\lambda a}(a)$ satisfait donc aux conditions (i) et (ii) ci-dessus et on peut disposer du facteur arbitraire intervenant dans la définition de $e_{\lambda a}(p)$ pour choisir

$$e_{\lambda a}(p) = V_{ap} e_{\lambda a}(a) .$$

2. De même, on peut choisir

$$e_{\lambda b}(p) = V_{bp} e_{\lambda b}(b)$$

3. $e_{\lambda b}(b)$ lui-même est déterminé à un facteur complexe de module 1 près par les conditions

(i′) c'est un vecteur unitaire de F_b

(ii′) $i S_D e_{\lambda b}(b) = \lambda e_{\lambda b}(b)$.

Or $V_{ab} e_{\lambda a}(a)$ est un vecteur unitaire de F_b. Supposons en outre que S_D et V_{ab} commutent; alors:

$$i S_D V_{ab} e_{\lambda a}(a) = i V_{ab} S_D e_{\lambda a}(a) = \lambda V_{ab} e_{\lambda a}(a)$$

ce qui permet de choisir

$$e_{\lambda b}(b) = V_{ab} e_{\lambda a}(a) .$$

Dans le groupe de Lorentz propre L de $\mathbf{E}_4'$, les rotations autour de la direction D et la transformation de Lorentz pure σ_{ab} (translation rectiligne uniforme parallèle à la direction D) commutent. La commutation des éléments correspondants de $\mathscr{L}(F, F)$ (sous-groupe à un paramètre du groupe unitaire de F_a et opérateur V_{ab}), qui entraîne celle de S_D et de V_{ab}, nécessite des hypothèses restrictives sur la réalisation du groupe structural, que nous supposerons réalisées.

En définitive, une fois choisi le vecteur $e_{\lambda a}(a)$, on prendra systématiquement:

$$e_{\lambda b}(b) = V_{ab} e_{\lambda a}(a)$$

$$e_{\lambda a}(p) = V_{ap} e_{\lambda a}(a)$$

$$e_{\lambda b}(p) = V_{bp} e_{\lambda b}(b) = V_{bp} V_{ab} e_{\lambda a}(a) .$$

Il en résulte qu'on pourra écrire:

$$P^a_{\lambda, D} = \int_\Omega |(f(p), e_{\lambda a}(p))_p|^2 \, d\mu(p) = \int_\Omega |(V_{pa} f(p), e_{\lambda a}(a))_a|^2 \, d\mu(p)$$

$$P^b_{\lambda, D} = \int_\Omega |(f(p), e_{\lambda b}(p))_p|^2 \, d\mu(p)$$

$$= \int_\Omega |(V_{pa} f(p), V_{pa} V_{bp} V_{ab} e_{\lambda a}(a))_a|^2 \, d\mu(p)$$

et aussi

$$P^b_{\lambda, D} = \int_\Omega |(V_{ap} V_{ba} V_{pb} f(p), e_{\lambda a}(p))_p|^2 \, d\mu(p) .$$

Cette dernière écriture montre que le changement d'observateur se traduit dans chaque F_p par la transformation unitaire $U(p) = V_{ap} V_{ba} V_{pb}$.

N.B. Au cas où la valeur propre λ est multiple, on associe de même pour chaque valeur de i ($i = 1, \ldots, m$) les vecteurs $e_{\lambda a i}(a)$, $e_{\lambda b i}(b)$, $e_{\lambda a i}(p)$ et $e_{\lambda b i}(p)$.

Exemple de l'électron

Dans le cas de l'électron (Cf. réf. 1, pp. 177 à 180), le groupe G/G_0 sera le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ (matrices unimodulaires à 2 lignes et 2 colonnes d'éléments complexes) d'élément générique

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + i a' & b + i b' \\ c + i c' & d + i d' \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

(α, β, γ, δ nombres complexes; a, b, c, d, a', b', c', d' nombres réels; $\alpha = a + i a'$ etc. ...)

Nous rapporterons l'espace $\mathbf{E}_4'$ à un repère (que nous appellerons fondamental) par rapport auquel les composantes du vecteur courant p

seront notées p_0, q_1, q_2, q_3, la forme de Lorentz s'écrivant alors

$$p^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - p_0^2 .$$

Nous utiliserons aussi les notations abrégées $\boldsymbol{q}$ pour l'ensemble (q_1, q_2, q_3), partie d'espace de p, et q pour $\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Dans le repère considéré, l'opérateur σ de L image de l'élément Γ du groupe structural sera représenté par une matrice Λ, qui sera

$$\Lambda(\Gamma) = \begin{pmatrix} \frac{a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 + d^2 + d'^2}{2} & ab + a'b' + cd + c'd' & a'b - ab' + c'd - cd' & \frac{a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 + c^2 + c'^2 - d^2 - d'^2}{2} \\ \begin{matrix} ac + a'c' + bd + b'd' \\ ac' - a'c + bd' - b'd \end{matrix} & \begin{matrix} bc + b'c' + ad + a'd' \\ ad' - a'd + bc' - b'c \end{matrix} & \begin{matrix} a'd - ad' + bc' - b'c \\ ad + a'd' - bc - b'c' \end{matrix} & \begin{matrix} ac + a'c' - bd - b'd' \\ ac' - a'c - bd' + b'd \end{matrix} \\ \frac{a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2 - d^2 - d'^2}{2} & ab + a'b' - cd - c'd' & a'b - ab' - c'd + cd' & \frac{a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 - c^2 - c'^2 + d^2 + d'^2}{2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est, à l'ordre des lignes et des colonnes près, la matrice de la formule (11) de la page 122 de notre référence 2.

Le point a de Ω sera le point de coordonnées $(-m, 0, 0, 0)$.

La direction D sera celle de l'axe des q_3; le groupe à un paramètre des rotations autour de D sera représenté par les matrices

$$\Lambda_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la translation rectiligne uniforme σ_{ab} par la matrice

$$\Lambda_{03} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}$$

et le point b de Ω sera donc le point de coordonnées $(-m \operatorname{ch}\chi, 0, 0, -m \operatorname{sh}\chi)$. (On vérifie que les matrices $\Lambda_{12}(\theta)$ commutent avec la matrice Λ_{03}.)

L'espace F a deux dimensions sur le corps des complexes. Quel que soit p, l'espace F_p s'identifie en tant qu'espace vectoriel à l'espace F, mais sa métrique hermitienne dépend de p. Le choix d'un repère identifie F à $\mathbb{C}^2$ et les composantes du vecteur courant f de F dans ce repère seront notées f_+ et f_-. L'espace F_a aura la métrique telle que dans ce repère le produit scalaire de deux de ses vecteurs f et g soit $(f, g)_a = \bar{f}_+ g_+ + \bar{f}_- g_-$. Toujours dans le même repère, l'opérateur V de $\mathscr{L}(F, F)$ image de l'élément Γ de $SL(2, \mathbb{C})$ sera représenté par une matrice A que nous prendrons identique à la matrice Γ elle-même. Les espaces F_p sont dès lors complètement déterminés par le choix de l'espace F_a et les matrices A_{ap} représentant les opérateurs unitaires V_{ap} que nous allons maintenant calculer.

Au point p de Ω, on peut attacher un repère de $\mathbf{E}_4'$ comme suit:
— son premier vecteur, de genre temps, est le vecteur unitaire de a, dont les composantes dans le repère fondamental sont $(-1, 0, 0, 0)$
— son second vecteur est le vecteur unitaire de la partie spatiale de p, dont les composantes dans le repère fondamental sont $(0, q_1/q, q_2/q, q_3/q)$
— il est complété par deux vecteurs unitaires de genre espace dont les composantes dans le repère fondamental sont respectivement $(0, u_1, u_2, u_3)$ et $(0, v_1, v_2, v_3)$ soumises aux conditions

$$\begin{cases} q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3 = 0 \\ q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0 \end{cases}$$

qui expriment que le repère ainsi construit est orthonormal pour la métrique de Lorentz.

Dans ce repère, la transformation σ_{ap} est représentée par une matrice Σ qui s'écrit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{|p_0|}{m} & \frac{q}{m} & 0 & 0 \\ \frac{q}{m} & \frac{|p_0|}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si T est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_1}{q} & u_1 & v_1 \\ 0 & \frac{q_2}{q} & u_2 & v_2 \\ 0 & \frac{q_3}{q} & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

et si W désigne la matrice-colonne dont les éléments sont les composantes dans le repère fondamental d'un vecteur w de $\mathbf{E}_4'$, la matrice-colonne dont les éléments sont les composantes du même vecteur w dans le repère attaché à p est le produit matriciel TW.

Soit Λ_{ap} la matrice représentant σ_{ap} dans le repère fondamental. La matrice-colonne des composantes du vecteur $\sigma_{ap} w$ dans le repère fondamental est le produit matriciel $\Lambda_{ap} W$ et la matrice-colonne des composantes de $\sigma_{ap} w$ dans le repère attaché à p est le produit matriciel $\Sigma T W$ mais aussi le produit matriciel $T \Lambda_{ap} W$. w étant arbitraire, il en résulte que

$$\Lambda_{ap} = T^{-1} \Sigma T$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_1}{q} & \frac{q_2}{q} & \frac{q_3}{q} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{|p_0|}{m} & \frac{q}{m} & 0 & 0 \\ \frac{q}{m} & \frac{|p_0|}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_1}{q} & u_1 & v_1 \\ 0 & \frac{q_2}{q} & u_2 & v_2 \\ 0 & \frac{q_3}{q} & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|p_0|}{m} & -\frac{q_1}{m} & -\frac{q_2}{m} & -\frac{q_3}{m} \\ -\frac{q_1}{m} & \frac{q_1^2|p_0|}{mq^2} + u_1^2 + v_1^2 & \frac{q_1 q_2 |p_0|}{mq^2} + u_1 u_2 + v_1 v_2 & \frac{q_1 q_3 |p_0|}{mq^2} + u_1 u_3 + v_1 v_3 \\ -\frac{q_2}{m} & \frac{q_1 q_2 |p_0|}{mq^2} + u_1 u_2 + v_1 v_2 & \frac{q_2^2 |p_0|}{mq^2} + u_2^2 + v_2^2 & \frac{q_2 q_3 |p_0|}{mq^2} + u_2 u_3 + v_2 v_3 \\ -\frac{q_3}{m} & \frac{q_1 q_3 |p_0|}{mq^2} + u_1 u_3 + v_1 v_3 & \frac{q_2 q_3 |p_0|}{mq^2} + u_2 u_3 + v_2 v_3 & \frac{q_3^2 |p_0|}{mq_2} + u_3^2 + v_3^2 \end{pmatrix}$$

L'identification de cette matrice avec la matrice $\Lambda(\Gamma)$ explicitée plus haut jointe à la condition d'appartenance de Γ au groupe $SL(2, \mathbb{C})$, soit

$$\begin{cases} ad - a'd' - bc + b'c' = 1 \\ a'd + ad' - bc' - b'c = 0 \end{cases}$$

fournit un système de 18 équations aux inconnues réelles a, b, c, d, a', b', c', d' qui admet une solution unique (indépendante des paramètres u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 que nous avons été amenés à introduire) qui nous donne la matrice Γ dont l'image dans L est σ_{ap}, donc la représentation A_{ap} de V_{ap}:

$$A_{ap} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q^2 - q_3(|p_0| - m)}{q\sqrt{m(|p_0| - m)}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q_1}{q} \sqrt{\frac{|p_0| - m}{m}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{q_2}{q} \sqrt{\frac{|p_0| - m}{m}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q_1}{q} \sqrt{\frac{|p_0| - m}{m}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{q_2}{q} \sqrt{\frac{|p_0| - m}{m}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q^2 + q_3(|p_0| - m)}{q\sqrt{m(|p_0| - m)}} \end{pmatrix}$$

que nous noterons aussi

$$A_{ap} = \begin{pmatrix} \alpha(p_0, q_1, q_2, q_3) & \beta(p_0, q_1, q_2, q_3) \\ \gamma(p_0, q_1, q_2, q_3) & \delta(p_0, q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

(p étant le point courant de Ω, on a $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - p_0^2 = -m^2$). V_{pa} est l'inverse de V_{ap}, donc la matrice représentant V_{pa} est:

$$A_{pa} = A_{ap}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(p_0, q_1, q_2, q_3) & -\beta(p_0, q_1, q_2, q_3) \\ -\gamma(p_0, q_1, q_2, q_3) & \alpha(p_0, q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur V_{ab} est un cas particulier de l'opérateur V_{ap}, dans lequel on remplace (p_0, q_1, q_2, q_3) par $(-m \operatorname{ch}\chi, 0, 0, -m \operatorname{sh}\chi)$; il est représenté par la matrice

$$A_{ab}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{m^2\,\mathrm{sh}^2\chi+m\,\mathrm{sh}\,\chi(m\,\mathrm{ch}\,\chi-m)}{m|\mathrm{sh}\,\chi|\sqrt{m(m\,\mathrm{ch}\,\chi-m)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{m^2\,\mathrm{sh}^2\chi-m\,\mathrm{sh}\,\chi(m\,\mathrm{ch}\,\chi-m)}{m|\mathrm{sh}\,\chi|\sqrt{m(m\,\mathrm{ch}\,\chi-m)}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Calculons enfin la matrice A_{bp} représentant l'opérateur V_{bp}.

Dans le repère fondamental de $\mathbf{E}_4'$ où p admet les composantes (p_0, q_1, q_2, q_3) et a les composantes $(-m, 0, 0, 0)$ l'opérateur σ_{ap} est représenté par une matrice $\Lambda(p_0, q_1, q_2, q_3)$. Dans le repère R' de $\mathbf{E}_4'$ où p admet les composantes (p_0', q_1', q_2', q_3') et b les composantes $(-m, 0, 0, 0)$, l'opérateur σ_{bp} est représenté par la matrice $\Lambda(p_0', q_1', q_2', q_3')$ (qui s'écrit en fonction de p_0', q_1', q_2', q_3' comme $\Lambda(p_0, q_1, q_2, q_3)$ s'écrit en fonction de p_0, q_1, q_2, q_3). Or $b=\sigma_{ab}a$ et on a l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} p_0' \\ q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix}=\Lambda_{03}^{-1}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}\quad \text{(nous utilisons des matrices colonnes)}$$

Λ_{03} étant la matrice (écrite plus haut) représentant σ_{ab} dans le repère fondamental.

Soit une transformation de Lorentz représentée
— dans le repère fondamental par une matrice Λ
— dans le repère R' par une matrice Λ';
on a, quel que soit p, les égalités matricielles

$$\Lambda_{03}^{-1}\Lambda\begin{pmatrix} p_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}=\Lambda'\begin{pmatrix} p_0' \\ q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix}=\Lambda'\Lambda_{03}^{-1}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$\Lambda=\Lambda_{03}\Lambda'\Lambda_{03}^{-1}.$$

En particulier, si Λ' est la matrice $\Lambda(p_0', q_1', q_2', q_3')$ représentant σ_{bp} dans le repère R', Λ est la matrice Λ_{bp} représentant σ_{bp} dans le repère fondamental:

$$\Lambda_{bp}=\Lambda_{03}\Lambda(p_0', q_1', q_2', q_3')\Lambda_{03}^{-1}.$$

Λ_{bp} est l'image selon la définition du groupe structural d'une matrice Γ_{bp} de $SL(2, \mathbb{C})$ identique à la matrice A_{bp} que nous voulons calculer; Λ_{03} est l'image de la matrice Γ_{03} de $SL(2, \mathbb{C})$ identique à la matrice A_{ab} calculée plus haut.

$\Lambda(p_0, q_1, q_2, q_3)$ est l'image de la matrice Γ_{ap} identique à la matrice A_{ap} calculée plus haut qui s'explicite

$$\begin{pmatrix} \alpha(p_0, q_1, q_2, q_3) & \beta(p_0, q_1, q_2, q_3) \\ \gamma(p_0, q_1, q_2, q_3) & \delta(p_0, q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

et par suite $A(p_0', q_1', q_2', q_3')$ est l'image d'une matrice Γ' de $SL(2, \mathbb{C})$ qui s'explicite

$$\begin{pmatrix} \alpha(p_0', q_1', q_2', q_3') & \beta(p_0', q_1', q_2', q_3') \\ \gamma(p_0', q_1', q_2', q_3') & \delta(p_0', q_1', q_2', q_3') \end{pmatrix}$$

En définitive:

$$A_{bp} = A_{ab}\Gamma' A_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(p_0', q_1', q_2', q_3') & \beta(p_0', q_1', q_2', q_3') \\ \gamma(p_0', q_1', q_2', q_3') & \delta(p_0', q_1', q_2', q_3') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(p_0', q_1', q_2', q_3') & e^{\chi}\beta(p_0', q_1', q_2', q_3') \\ e^{-\chi}\gamma(p_0', q_1', q_2', q_3') & \delta(p_0', q_1', q_2', q_3') \end{pmatrix}.$$

Les rotations autour de la direction D de l'axe des q_3 sont représentées par les matrices $A_{12}(\theta)$ explicitées plus haut, qui sont les images de matrices $\Gamma(\theta)$ de $SL(2, \mathbb{C})$ qu'on obtient à partir des précédentes par une méthode déjà utilisée (système de 18 équations à 8 inconnues) et qui s'identifient aux matrices représentant le sous-groupe à un paramètre du groupe unitaire de F_a correspondant aux rotations considérées, soit

$$A_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur S_D est représenté par le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre formé par les matrices $A_{12}(\theta)$, soit

$$S_{12} = \left.\frac{dA_{12}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'opérateur $S_{D,a}(a) = iS_D$ par la matrice

$$S_3 = iS_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui admet les valeurs propres $\lambda = +1/2$ et $\lambda = -1/2$; dans le repère de F que nous utilisons, les vecteurs propres correspondants $e_{\frac{1}{2},a}(a)$ et $e_{-\frac{1}{2},a}(a)$ (vecteurs unitaires de F_a) admettent les systèmes de composantes respectifs $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Nous pouvons maintenant donner une expression complète des probabilités

$$P^a_{\pm\frac{1}{2},D} = \int_\Omega |(V_{pa}f(p), e_{\pm\frac{1}{2},a}(a))_a|^2 d\mu(p)$$

$$P^b_{\pm\frac{1}{2},D} = \int_\Omega |(V_{pa}f(p), V_{pa}V_{bp}V_{ab}e_{\pm\frac{1}{2},a}(a))_a|^2 d\mu(p).$$

Représentons par $\hat{p}$ l'ensemble des variables (p_0, q_1, q_2, q_3), par $\hat{p}'$ l'ensemble des variables (p_0', q_1', q_2', q_3'). Ces deux systèmes de variables sont liés par les relations

$$\begin{cases} p_0' = p_0 \operatorname{ch}\chi - q_3 \operatorname{sh}\chi \\ q_1' = q_1 \\ q_2' = q_2 \\ q_3' = -p_0 \operatorname{sh}\chi + q_3 \operatorname{ch}\chi. \end{cases}$$

Introduisons les fonctions

$$\begin{cases} \alpha(\hat{p}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{q^2 - q_3(|p_0| - m)}{q\sqrt{m(|p_0| - m)}} \\ \beta(\hat{p}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{q_1}{q} \sqrt{\dfrac{|p_0| - m}{m}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} \dfrac{q_2}{q} \sqrt{\dfrac{|p_0| - m}{m}} \\ \gamma(\hat{p}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{q_1}{q} \sqrt{\dfrac{|p_0| - m}{m}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}} \dfrac{q_2}{q} \sqrt{\dfrac{|p_0| - m}{m}} \\ \delta(\hat{p}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{q^2 + q_3(|p_0| - m)}{q\sqrt{m(|p_0| - m)}} \end{cases}$$

avec $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.

L'opérateur V_{pa} est représenté par la matrice

$$A_{pa} = \begin{pmatrix} \delta(\hat{p}) & -\beta(\hat{p}) \\ -\gamma(\hat{p}) & \alpha(\hat{p}) \end{pmatrix},$$

l'opérateur V_{bp} par la matrice

$$A_{bp} = \begin{pmatrix} \alpha(\hat{p}') & e^{\chi}\beta(\hat{p}') \\ e^{-\chi}\gamma(\hat{p}') & \delta(\hat{p}') \end{pmatrix},$$

l'opérateur V_{ab} par la matrice

$$A_{ab} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix}$$

donc l'opérateur $V_{pa} V_{bp} V_{ab}$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} \delta(\hat{p})\, \alpha(\hat{p}') - e^{-\frac{\chi}{2}} \beta(\hat{p})\, \gamma(\hat{p}') & e^{\frac{\chi}{2}} \delta(\hat{p})\, \beta(\hat{p}') - e^{-\frac{\chi}{2}} \beta(\hat{p})\, \delta(\hat{p}') \\ -e^{\frac{\chi}{2}} \gamma(\hat{p})\, \alpha(\hat{p}') + e^{-\frac{\chi}{2}} \alpha(\hat{p})\, \gamma(\hat{p}') & -e^{\frac{\chi}{2}} \gamma(\hat{p})\, \beta(\hat{p}') + e^{-\frac{\chi}{2}} \alpha(\hat{p})\, \delta(\hat{p}') \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $f(p)$ admet les composantes $f_+(p)$ et $f_-(p)$, le vecteur $e_{+\frac{1}{2},a}(a)$ les composantes 1 et 0, le vecteur $e_{-\frac{1}{2},a}(a)$ les composantes 0 et 1 et le produit scalaire $(g, h)_a$ s'écrit $\bar{g}_+ h_+ + \bar{g}_- h_-$.

Il en résulte que

$$P^a_{\frac{1}{2},D} = \int_\Omega |\overline{\delta(\hat{p})}\, \overline{f_+(p)} - \overline{\beta(\hat{p})}\, \overline{f_-(p)}|^2\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{q^2 + q_3(|p_0| - m)}{q\sqrt{m(|p_0| - m)}} f_+(p) + \frac{q_1 - iq_2}{q} \sqrt{\frac{|p_0| - m}{m}} f_-(p) \right|^2 d\mu$$

$$P^a_{-\frac{1}{2},D} = \int_\Omega |-\overline{\gamma(\hat{p})}\, \overline{f_+(p)} + \overline{\alpha(\hat{p})}\, \overline{f_-(p)}|^2\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{q_1 + iq_2}{q} \sqrt{\frac{|p_0| - m}{m}} f_+(p) + \frac{q^2 - q_3(|p_0| - m)}{q\sqrt{m(|p_0| - m)}} f_-(p) \right|^2 d\mu$$

$$P^b_{\frac{1}{2},D} = \int_\Omega \mathscr{P}_+\, d\mu$$

avec

$$\mathscr{P}_{+} = \frac{|f_{+}(p)|^2}{m^2} [e^{\chi}|\alpha(\hat{p}')|^2 (|p_0| + q_3)^2 + e^{-\chi}|\gamma(\hat{p}')|^2 (q_1^2 + q_2^2) +$$
$$+ 2(|p_0| + q_3) \mathscr{Re} \{\alpha(\hat{p}') \gamma(\hat{p}') (q_1 - iq_2)\}] +$$
$$+ \frac{|f_{-}(p)|^2}{m^2} [e^{\chi}|\alpha(\hat{p}')|^2 (q_1^2 + q_2^2) + e^{-\chi}|\gamma(\hat{p}')|^2 (|p_0| - q_3)^2 +$$
$$+ 2(|p_0| - q_3) \mathscr{Re} \{\alpha(\hat{p}') \gamma(\hat{p}') (q_1 - iq_2)\}] +$$
$$+ 2 \mathscr{Re} \left\{ \frac{\overline{f_{+}(p)}\, f_{-}(p)}{m^2} [e^{\chi}|\alpha(\hat{p}')|^2 (|p_0| + q_3)(q_1 - iq_2) + \right.$$
$$+ e^{-\chi}|\gamma(\hat{p}')|^2(|p_0| - q_3)(q_1 - iq_2) +$$
$$\left. + \alpha(\hat{p}') \overline{\gamma(\hat{p}')} (p_0^2 - q_3^2) + \alpha(\hat{p}') \gamma(\hat{p}') (q_1 - iq_2)^2] \right\}$$

$P^b_{-\frac{1}{2},D}$ a une expression aussi compliquée que celle de $P^b_{\frac{1}{2},D}$.

Lorsque la particule est pratiquement dans un état propre d'impulsion-énergie, le calcul des probabilités $P^a_{\pm\frac{1}{2},D}$ et $P^b_{\pm\frac{1}{2},D}$ ne comporte plus d'intégration et les carrés des valeurs absolues des éléments de la matrice de l'opérateur $V_{pa} V_{bp} V_{ab}$ représentent les probabilités de spin observées par l'observateur b, lorsque la particule est dans un état propre de spin pour l'observateur a:

$$\text{— lorsque } P^a_{+\frac{1}{2},D} = 1 \begin{cases} P^b_{+\frac{1}{2},D} = |e^{\frac{\chi}{2}}\delta(\hat{p})\,\alpha(\hat{p}') - e^{-\frac{\chi}{2}}\beta(\hat{p})\,\gamma(\hat{p}')|^2 \\ P^b_{-\frac{1}{2},D} = |e^{\frac{\chi}{2}}\delta(\hat{p})\,\beta(\hat{p}') - e^{-\frac{\chi}{2}}\beta(\hat{p})\,\delta(\hat{p}')|^2 \end{cases}$$

$$\text{— lorsque } P^a_{-\frac{1}{2},D} = 1 \begin{cases} P^b_{+\frac{1}{2},D} = |-e^{\frac{\chi}{2}}\gamma(\hat{p})\,\alpha(\hat{p}') + e^{-\frac{\chi}{2}}\alpha(\hat{p})\,\gamma(\hat{p}')|^2 \\ P^b_{-\frac{1}{2},D} = |-e^{\frac{\chi}{2}}\gamma(\hat{p})\,\beta(\hat{p}') + e^{-\frac{\chi}{2}}\alpha(\hat{p})\,\delta(\hat{p}')|^2. \end{cases}$$

Ces probabilités dépendent de l'énergie-impulsion de la particule (par l'intermédiaire des variables $\hat{p}$) et de la vitesse relative des deux observateurs (par l'intermédiaire de la variable χ).

Remerciements. Je tiens à remercier ici M. le Professeur LAURENT SCHWARTZ, qui a inspiré ce travail, du soutien qu'il m'a apporté pendant son exécution, et M. le Professeur LOUIS MICHEL de la possibilité qu'il m'a accordée de travailler au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

Références

[1] SCHWARTZ, L.: Application of Distributions to the Study of Elementary Particles in Relativistic Quantum Mechanics. Technical Report No 7, prepared under Contract Nonr 222 (60) (NR 041-221) for Office of Naval Research, Department of Mathematics, University of California, Berkeley 4, 1961.

[2] NAIMARK, M. A.: Linear Representations of the Lorentz group. New York: Pergamon Press 1964.