African Diaspora Journal of Mathematics ISSN 1539-854X
Volume 14, Number 1, pp. 1–23 (2012) www.math-res-pub.org/adjm

Résolution numérique d'inégalités variationnelles:Localisation avec conditions de Dirichlet

Mamadou Cissé*
Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique, ENSAE,
BP 45512 ,Dakar, SENEGAL

Abstract

In this paper we present an approximation of viscosity solution of non linear partial differential equation with dirichlet bounded conditions. Our approach used a fully nonlinear PDE in an unbounded domain. To approximate its unique viscosity solution one needs to localize the PDE under consideration and to define artificial boundary conditions. It is known that backward stochastic differential equations (BSDEs) are a useful tool to estimate the error due to misspecified Dirichlet boundary conditions on the artificial boundary [12], but we perfect in this paper their approximation of localization error.

AMS Subject Classification: 60J65; 60H10; 60H05; 60J55; 60J60.

Keywords: Forwards Backwards SDE, variational inequalities, american option, Dirichlet conditions, viscosity solutions.

Résumé Nous donnons dans ce papier une approximation des solutions de viscosité des systèmes des équations aux dérivées partielles non linéaires. Notre approche consiste à localiser le système des équations variationnelles sur un intervalle ouvert et trouver une approximation avec des conditions de Dirichlet au bord artificielles, puis étudier la convergence de cette approximation en utilisant les Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs) Réfléchies.

Mots clés : EDSRs; Inégalités variationnelles;Solutions de viscosité; Conditions de Dirichlet; Option Américaine.

Introduction

Le problème du calcul des prix d'options américaines est un problème délicat. Bensoussan et Lions dans [1] ont montré qu'il existe un lien entre ce problème et les inéquations aux dérivées partielles paraboliques dans un domaine non borné. Pour la résolution numérique de ces inéquations variationnelles on a besoin de réduire les domaines d'intégration en domaine borné et il est difficile de définir des conditions au bord qui donnent de bonnes

*E-mail address: mamadou.cisse@ensae.sn

précisions globales. Ainsi Lamberton et Lapeyre dans [12] ont proposé un contrôle de l'erreur de localisation due à des conditions artificielles de Dirichlet pour des EDP linèaires en Finance. Dans [2], Berthelot et al. ont étudié l'erreur de localisation due à des conditions au bord de Neumann pour des EDP non linèaires. Nous proposons dans ce travail un contrôle de l'erreur de localisation due à des conditions de Dirichlet pour des EDP non linèaires.

Nous commencerons par rappeler des résultats sur les EDSR réfléchies à temps final fixe et sur les EDSR réfléchies à temps final aléatoire borné avant de passer à la définition de solution de viscosité de notre problème localisé et à quelques résultats de régularité de cette solution. Ensuite nous étudierons l'erreur de localisation.

1 Quelques résultats sur les EDSRs Réfléchies

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont été introduites (dans le cas non linéaire) par Pardoux et Peng [15]. Elles ont de nombreuses applications en mathématiques financières [8] [10], en contrôle stochastique [7] .
Nous rappelons les notions de solutions des EDSRs Réfléchies à temps final fixe [8] et à temps final aléatoire. Ensuite nous vérifierons l'existence et l'unicité de solution des EDSRs Réfléchies à temps terminal aléatoire borné. Enfin nous étudions le lien entre la solution de ces équations et les solutions de viscosité d'EDPs paraboliques non linèaires.

1.1 EDSR Réfléchie à temps final fixe

Soit $\{W_t,\ 0 \le t \le T\}$ un mouvement Brownien standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Soit $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \le t \le T\}$ la filtration naturelle de $\{W_t\}$ augmentée des ensembles $\mathbb{P}$ négligeables.

On considère trois données : la première est la valeur terminale ξ telle que :

(j) ξ est $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbb{E}|\xi|^2 < +\infty$.
La deuxième est la fonction $f : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(jj) $\forall (y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad \{f(t,y,z), \quad 0 \le t \le T\}$ est un processus prévisible tel que $\mathbb{E}\int_0^T |f(.,t,y,z)|^2 dt < \infty$

(jjj) f est uniformément κ-Lipschitzienne en y et z :
$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \le \kappa(|y-y'| + |z-z'|) \quad \forall\ t \le T\ \forall\ y,y',z,z' \in \mathbb{R}$.
La troisième est la barrière L qui est un processus continu, progressivement mesurable et tel que

(jv) $\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |L_t|^2\right) < \infty$ -$p.s.$

Nous faisons aussi l'hypothèse de compatibilité suivante : $L_T \le \xi \quad p.s.$

El-Karoui et al. ont introduit les EDSRs réfléchies [8], où le processus Y de la solution (Y,Z,R) est maintenu au dessus d'une barrière grâce à un processus de réflexion R.
La solution de l'EDSR réfléchie à temps final fixe T est un triplet $\{(Y_t,Z_t,R_t),\ 0 \le t \le T\}$

de processus $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant :

(i) $(Z_t)_{0\le t\le T}$ est un processus prévisible tel que $\mathbb{E}\displaystyle\int_0^T |Z_t|^2 dt < \infty$;

(ii) $(Y_t)_{0\le t\le T}$ est un processus prévisible tel que $\mathbb{E}\left(\displaystyle\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2\right) < \infty$, R_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable et vérifie $\mathbb{E}(|R_T|^2) < \infty$;

(iii) $Y_t = \xi + \displaystyle\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T dR_s, \quad \forall\, t \in [0,T]$;

(iv) $Y_t \ge L_t, \quad \forall\, 0 \le t \le T$;

(v) R est un processus continu croissant tel que $\displaystyle\int_0^T (Y_s - L_s)dR_s = 0.$

Sous ces hypothèses, El Karoui et al. [8] ont montré le

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses* $(j),(jj),(jjj)$ *et* (jv) *il existe une unique solution à l'EDSR réfléchie* (i), (ii), (iii), (iv), (v).

Par ailleurs, on rappelle la proposition 3.6 page 711 [8] qui assure l'unicité de la solution. Nous l'adapterons par la suite à notre problème à temps final aléatoire.

Proposition 1.1. *Soient* (ξ,f,L) *et* (ξ',f',L') *deux triplets vérifiant les hypothèses* $(j),(jj),(jjj)$ *et* (jv). *On suppose que* (Y,Z,R) *est solution de l'EDSR réfléchie* (ξ,f,L) *et* (Y',Z',R') *solution de l'EDSR réfléchie* (ξ',f',L'). *On pose*

$$\Delta\xi = \xi - \xi', \quad \Delta f = f - f', \quad \Delta L = L - L';$$
$$\Delta Y = Y - Y', \quad \Delta Z = Z - Z', \quad \Delta R = R - R'.$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le T} |\Delta Y_s|^2 + \int_0^T (\Delta Z_t)^2 dt + |\Delta R_T|^2\Big)$$
$$\le C\mathbb{E}\left(|\Delta\xi|^2 + \int_0^T |\Delta f(t,Y_t,Z_t)|^2 dt\right) + C\left[\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |\Delta L_t|^2\right)\right]^{1/2} \Psi_T^{1/2},$$

où

$$\Psi_T = \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds + \sup_{0\le t\le T} |L_t|^2 + |\xi'|^2 + \int_0^T |f'(s,0,0)|^2 ds + \sup_{0\le t\le T} |L'_t|^2\right].$$

1.2 EDSR Réfléchie à temps terminal aléatoire borné

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude des EDSRs Réfléchies à temps final aléatoire borné.

Une solution d'une EDSR réfléchie $Eq(f,\xi,\tau,L)$ à temps final aléatoire τ, un temps d'arrêt borné par T p.s ($\tau \leq T$ p.s.), est un triplet $\{(Y_t,Z_t,R_t), t\leq T\}$ de processus progressivement mesurables tels que $Z_t=0$ pour $t\in(\tau,T]$, $R_T=R_\tau$, et :

$$(2i)\;\; Y_t = Y_T + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s dW_s + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} dR_s,\; \forall\, t\in[0,T],$$

$$(2ii)\;\; Y_t = \xi \text{ sur } \{t\geq\tau\},$$

$$(2iii)\;\; Y_t \geq L_t \quad \forall\, t\leq\tau,$$

$$(2iv)\;\; \int_0^{\tau\wedge T}(Y_s-L_s)dR_s = 0.$$

Soient les hypothèses suivantes : $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction telle que

$(3i)$ $f(.,y,z)$ est un processus progressivement mesurable pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ξ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable et $\mathbb{E}|\xi|^2+\mathbb{E}\int_0^T|f(s,0,0)|^2ds<+\infty$.

$(3ii)$ f est monotone en y : $\exists\mu$ réel tel que

$$(y-y',f(t,y,z)-f(t,y',z))\leq\mu|y-y'|^2,\quad \forall\, t\leq T,\ \forall\, y,y',z\in\mathbb{R}$$

$(3iii)$ f est uniformément κ-Lipschitzienne en z :

$$|f(t,y,z)-f(t,y,z')|\leq\kappa|z-z'|,\quad \forall\, t\leq T,\ \forall\, y,z,z'\in\mathbb{R}$$

$(3iv)$ L est un processus continu progressivement mesurable tel que

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq\tau}|L_s|^2<+\infty.$$

Darling et Pardoux [6] ont établi l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR (non réfléchie) à temps final aléatoire non borné sous des hypothèses similaires. Par ailleurs El-Karoui et al. [8] ont introduit les EDSR réfléchies à temps final fixe. Dans le théorème suivant nous vérifions l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR réfléchie à temps final aléatoire borné.

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses $(3i)-(3iv)$ et en supposant aussi que $\xi\geq L_\tau$, il existe un unique triplet (Y,Z,R) solution de $Eq(f,\xi,\tau,L)$, et vérifiant*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}|Y_t|^2+\int_0^\tau|Z_s|^2ds+|R_\tau|^2\right)\leq C\mathbb{E}\left(|\xi|^2+\int_0^\tau|f(s,0,0)|^2ds+\sup_{0\leq t\leq\tau}|L_t|^2\right). \tag{1.1}$$

Démonstration du Théorème 1.2.
Existence. Soit

$$\begin{cases} \bar{f}(t,y,z) = f(t,y,z)\mathbb{I}_{\{t\leq\tau\}}, \\ \bar{L}_s = L_s \text{ sur } \{s \leq \tau\} \quad \text{et} \quad \bar{L}_s = L_\tau \text{ sur } \{s \geq \tau\} \end{cases} \tag{1.2}$$

Soit $(\bar{Y},\bar{Z},\bar{R})$ solution de l'EDSR à temps final fixe T suivante:

$$\begin{cases} \bar{Y}_t = \xi + \int_t^T \bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s + \int_t^T d\bar{R}_s, \ \forall\, t \in [0,T], \\ \bar{Y}_t \geq \bar{L}_t \quad \forall\, t \leq T, \\ \bar{R}_s \text{ est un processus continu croissant tel que} \\ \int_0^T (\bar{Y}_s - \bar{L}_s)d\bar{R}_s = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Cette EDSR à temps final fixe admet une unique solution d'après El-Karoui et al. [8].
Vérifions que $\mathbf{\bar{Z}_t = 0}$ sur $(\tau, \mathbf{T})$ et que $\mathbf{\bar{R}_T = \bar{R}_\tau}$.
On applique la formule d'Itô à $(\bar{Y}_s-\xi)^2$ entre $s = t\vee\tau$ et $s = T$ et on obtient :

$$\begin{aligned} (\bar{Y}_T-\xi)^2 =& (\bar{Y}_{t\vee\tau}-\xi)^2 - 2\int_{t\vee\tau}^T \bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)(\bar{Y}_s-\xi)ds \\ & -2\int_{t\vee\tau}^T (\bar{Y}_s-\xi)d\bar{R}_s + 2\int_{t\vee\tau}^T (\bar{Y}_s-\xi)dW_s + \int_{t\vee\tau}^T \bar{Z}_s^2 ds \end{aligned} \tag{1.4}$$

Le terme de gauche de l'égalité (1.4) est nul par définition de l'EDSR réfléchie (1.3).

Par la proposition 1.1, on a $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}} \int_{t\vee\tau}^T (Y_s-\xi)^2 ds < +\infty$, donc $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}} \int_{t\vee\tau}^T (Y_s-\xi)dW_s = 0$.
En utilisant que $\bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s) = 0$ sur $(t\vee\tau, T)$ par définition de $\bar{f}$, (1.2) et en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{t\vee\tau}$ les deux termes de l'égalité (1.4) on a :

$$0 = (\bar{Y}_{t\vee\tau}-\xi)^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}}\left[\int_{t\vee\tau}^T \bar{Z}_s^2 ds\right] - 2\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}}\left[\int_{t\vee\tau}^T (\bar{Y}_s-\xi)d\bar{R}_s\right]. \tag{1.5}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{t\vee\tau}^T (\bar{Y}_s-\xi)d\bar{R}_s &= \int_{t\vee\tau}^T (\bar{Y}_s-\bar{L}_s)d\bar{R}_s + \int_{t\vee\tau}^T (\bar{L}_s-\xi)d\bar{R}_s \\ &= \int_{t\vee\tau}^T (\bar{L}_\tau-\xi)d\bar{R}_s \qquad \text{par la condition de réflexion,} \\ &= \int_{t\vee\tau}^T (L_\tau-\xi)d\bar{R}_s \qquad \text{par construction de } \bar{L}. \end{aligned}$$

L'égalité (1.5) devient

$$0 = (\bar{Y}_{t\vee\tau}-\xi)^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}}\left[\int_{t\vee\tau}^T \bar{Z}_s^2 ds\right] + (\xi - L_\tau)\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}}\left[\bar{R}_T - \bar{R}_{t\vee\tau}\right], \tag{1.6}$$

d'où, puisque $L_\tau \le \xi$ par hypothèse,

$$(\bar{Y}_{t\vee\tau} - \xi)^2 = 0,$$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}}\left(\int_{t\vee\tau}^{T} \bar{Z}_s^2 ds\right) = 0,$$

et

$$(\xi - L_\tau)\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t\vee\tau}}\left[\bar{R}_T - \bar{R}_{t\vee\tau}\right] = 0.$$

De ce fait

$$\bar{Z}_t = 0 \text{ sur } (\tau, T), \quad \bar{R}_T = \bar{R}_\tau, \quad \text{ et } \bar{Y}_t = \xi \text{ pour } t \in (\tau, T) \; p.s.$$

À présent, nous concluons :

$$\bar{Y}_t = \xi + \int_t^T \mathbb{I}_{\{s\le\tau\}} f(s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)ds - \int_t^\tau \bar{Z}_s dW_s + \int_t^\tau d\bar{R}_s,$$
$$\bar{Y}_t = \xi + \int_t^\tau f(s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)ds - \int_t^\tau \bar{Z}_s dW_s + \int_t^\tau d\bar{R}_s,$$

et donc $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{R})$ est solution de l'EDSR à temps final aléatoire $Eq(f, \xi, \tau, L)$.

Unicité

Soient (Y, Z, R) et (Y', Z', R') deux solutions de l'EDSR $Eq(f, \xi, \tau, L)$ réfléchie à temps terminal aléatoire τ.

On pose

$$\Delta Y = Y - Y', \quad \Delta Z = Z - Z' \quad \Delta R = R - R'.$$

Soit $t \in [0, T]$. En appliquant la formule d'Itô, on a

$$\mathbb{E}\left(|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^\tau |\Delta Z_s|^2 ds\right) \le 2\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau \Delta Y_s \left(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)\right) ds + 2\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau \Delta Y_s d(\Delta R_s). \tag{1.7}$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_0^\tau (Y_s - Y'_s)d(R_s - R'_s) &= \int_0^\tau (Y_s - L_s)d(R_s - R'_s) + \int_0^\tau (L_s - Y'_s)d(R_s - R'_s),\\ &\le -\int_0^\tau (Y_s - L_s)dR'_s - \int_0^\tau (Y'_s - L_s)dR_s,\\ &\le 0,\end{aligned}$$

et l'inégalité (1.7) devient

$$\mathbb{E}\left(|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^\tau |\Delta Z_s|^2 ds\right) \le 2\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau \Delta Y_s \left(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)\right) ds.$$

Par la propriété de Lipschitz de f on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^\tau |\Delta Z_s|^2 ds\right) &\le 2K\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau (|\Delta Y_s|^2 + |\Delta Y_s \Delta Z_s|)ds,\\ &\le K(2+\varepsilon)\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau (|\Delta Y_s|^2)ds + \frac{K}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau |\Delta Z_s|^2 ds,\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + (1 - \frac{K}{\varepsilon})\int_{t\wedge\tau}^\tau |\Delta Z_s|^2 ds\right) \le C\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^\tau (|\Delta Y_s|^2)ds. \tag{1.8}$$

En posant $\varepsilon = 2K$ et appliquant le Lemme de Gronwall on a

$$\mathbb{E}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 = 0.$$

Comme t est arbitraire dans $[0,T]$ donc $\Delta Y = 0$.

De l'inégalité (1.8) avec $\varepsilon = 2K$ on obtient

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau}|\Delta Z_s|^2 ds \leq C\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau}(|\Delta Y_s|^2)ds = 0,$$

donc

$$\Delta Z = 0.$$

Enfin on déduit de l'EDSR réfléchie que $R = R'$.

Pour montrer (1.1), on applique la formule d'Itô et on obtient:

pour tout $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau}^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau}|Z_s|^2 ds &= \xi^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s f(s,Y_s,Z_s)ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s dR_s - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s Z_s dW_s \\ &= \xi^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s f(s,Y_s,Z_s)ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} L_s dR_s - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s Z_s dW_s \end{aligned} \tag{1.9}$$

Par ailleurs par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

$$\begin{aligned} E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s Z_s dW_s &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_t^T Y_s^2|Z_s|^2 ds\right)^{1/2}\right], \\ &\leq C\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq s\leq T} Y_s^2\right) + \frac{1}{2}C\mathbb{E}\int_t^T |Z_s|^2 ds, \end{aligned}$$

Comme $Z_t = 0$ sur $(\tau,T]$ et $Y_t = \zeta$ sur $(\tau,T]$ et par construction dans la $1^{\text{ère}}$ partie preuve et (i) et (ii), on obtient

$$E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s Z_s dW_s < +\infty.$$

Donc $\left\{\int_{t\wedge\tau}^{s} Y_u Z_u dW_u, \quad t \leq u \leq T\right\}$ est une martingale.

$$\mathbb{E}|Y_{t\wedge\tau}|^2 + \mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau}|Z_s|^2 ds = \mathbb{E}|\xi|^2 + 2\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau} Y_s f(s,Y_s,Z_s)ds + 2\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau} L_s dR_s.$$

Par la propriété de lipschitz de f on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Y_{t\wedge\tau}|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau}|Z_s|^2 ds \leq C\mathbb{E}|\xi|^2 + C\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau}|f(s,0,0)|^2 ds + 2C^2\mathbb{E}\sup_{t\wedge\tau\leq s\leq\tau}|L_s|^2 \\ + \frac{1}{2}C\mathbb{E}|R_\tau - R_{t\wedge\tau}|^2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Majorons à présent $\mathbb{E}[R_\tau^2]$.

De l'égalité

$$R_\tau = Y_0 - \xi - \int_0^\tau f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^\tau Z_s dW_s,$$

en appliquant la formule d'Itô et en utilisant l'inégalité (1.10) on obtient

$$\mathbb{E}[R_\tau^2] \leq C\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^\tau |f(s,0,0)|^2 ds + \sup_{0\leq s\leq\tau} |L_s|^2\right].$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq\tau} |Y_s|^2 + \int_0^\tau |Z_s|^2 ds + R_\tau^2\right) \leq C\left\{\mathbb{E}|\xi|^2 + \mathbb{E}\int_0^\tau |f(s,0,0)|^2 ds + \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq\tau} |L_t|^2\right\}.$$

□

1.3 Relation entre EDSRs Réfléchies à temps terminal aléatoire borné et EDPs paraboliques semi linéaires avec conditions de Dirichlet

Les EDSRs permettent de donner une interprétation probabiliste des solutions de certaines EDPs. Dans [18], Peng décrit comment une EDSR (non réfléchie) à horizon aléatoire est liée à une solution d'EDP avec conditions au bord de Dirichlet.
Dans cette partie, on va étudier le lien entre une équation parabolique et une EDSR à échéance aléatoire bornée.

On considère l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_s^{t,x} = b(s,X_s^{t,x})ds + \sigma(s,X_s^{t,x})dW_s, \quad t\leq s\leq T \\ X_t^{t,x} = x \end{cases} \tag{1.11}$$

où b et σ sont supposés Lipschitz en x et uniformément continues en temps sur $[0,T]$.
Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}$, et $x\in\overline{O}$ et soit $\tau^{t,x}$ le temps d'arrêt défini par :

$$\tau^{t,x} = \inf\{s\geq t; \quad s\leq T \quad X_s^{t,x}\notin\overline{O}\}. \tag{1.12}$$

En convenant que $inf\emptyset = T$, le temps d'arrêt $\tau^{t,x}$ est donc fini p.s.
Dans la suite nous écrirons parfois τ au lieu de $\tau^{t,x}$ et τ' au lieu de $\tau^{t',x'}$.

On considère un cas particulier de l'EDSR réfléchie $Eq(f,\xi,\tau,L)$ avec $\xi = \phi(\tau,X_\tau^{t,x})$ et $L_s = \psi(s,X_s^{t,x})$ pour tout $t\leq s\leq T$:

$$Eq(f,\phi,\tau,\psi)\begin{cases} Y_s^{t,x} = \phi(\tau,X_\tau^{t,x}) + \int_{s\wedge\tau}^\tau f(\theta,X_\theta^{t,x},Y_\theta^{t,x},Z_\theta^{t,x})d\theta - \int_{s\wedge\tau}^\tau Z_r^{t,x}dW_r + \int_{s\wedge\tau}^\tau dR_r^{t,x}, \\ Y_s^{t,x} \geq \psi(s,X_s^{t,x}) \quad \forall\, t\leq s\leq\tau, \\ \int_0^\tau (Y_s^{t,x} - \psi(s,X_s^{t,x}))dR_s^{t,x} = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

On suppose que

- $$\Gamma = \{x \in \partial O,\ \mathbb{P}(\tau^{t,x} > t) = 0\} \text{ est fermé} \tag{1.14}$$

- $\phi(.,.)$ et $\psi(.,.)$ sont deux fonctions : $[0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues conjointement en t et en x pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$, à croissance au plus linéaire en x

- f est continue et uniformément Lipschitz par rapport (x,z) et vérifie la condition de monotonie en y ($3ii$).

Sous ces hypothèses, le théorème 1.2 s'applique. Donc il existe un seul quadruplet $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x}, R^{t,x})$ solution adaptée de (1.13).
Pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\bar{O}$, on définit la fonction déterministe u par

$$u(t,x) = Y_t^{t,x}. \tag{1.15}$$

Et par l'unicité trajectorielle de la solution de l 'equation (1.13) et la propriété du flot, on a $u(s, X_s^{t,x}) = Y_s^{t,x}$

Théorème 1.3. $u \in C_b([0,T]\times\bar{O})$.

Cette preuve s'inspire pour l'essentiel de Darling et Pardoux [6] qui ont traité l'interprétation probabiliste des problèmes elliptiques.

Proof. • En utilisant l'hypothèse (1.14) Darling et Pardoux [6] ont montré que l'application $(t,x) \to \tau^{t,x}$ est continue .
• On pose pour $s \in [0,t]$ $\quad Y_s^{t,x} = Y_t^{t,x}$ qui est déterministe donc $Y_s^{t,x}$ est toujours $\mathcal{F}_s$ adapté.

Soit (t,x) et $(t',x') \in [0,T]\times\bar{O}$.
La preuve du théorème 1.2 montre que nous pouvons convenir que

$$\mathbb{I}_{\{s\geq\tau\}} Y_s = \phi(\tau, X_\tau^{t,x}), \quad \mathbb{I}_{\{s>\tau\}} f(s, X_s, Y_s, Z_s) = 0, \quad \mathbb{I}_{\{s>\tau\}} Z_s = 0, \quad \mathbb{I}_{\{s>\tau\}} dR_s = 0. \tag{1.16}$$

On applique la formule d'Itô entre $t\wedge t'$ et $\tau\vee\tau'$:

$$\begin{aligned}
|\Delta Y_{t\wedge t'}|^2 + \int_{t\wedge t'}^{\tau\vee\tau'} |\Delta Z_s|^2 ds = |\phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \phi(\tau', X_{\tau'}^{t',x'})|^2 - 2\int_{t\wedge t'}^{\tau\vee\tau'} \Delta Y_s \Delta Z_s dW_s \\
+ 2\int_{t\wedge t'}^{\tau\vee\tau'} \Delta Y_s (f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}) - f(s, X_s^{t',x'}, Y_s^{t',x'}, Z_s^{t',x'}) ds \\
+ 2\int_{t\wedge t'}^{\tau\vee\tau'} \Delta Y_s d\Delta R_s.
\end{aligned}$$

On rappelle que $\displaystyle\int_{t\wedge t'}^{\tau\vee\tau'} \Delta Y_s d\Delta R_s \leq 0$.
En utilisant les propriétés de f (monotonie en y et Lispchitz en x et z) et en appliquant le lemme de Gronwall on a

$$\mathbb{E}|\Delta Y_{t\wedge t'}|^2 \leq C\mathbb{E}\left[|\phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \phi(\tau', X_{\tau'}^{t',x'})|^2 + \sup_{t\wedge t'\leq s\leq(\tau\vee\tau')} |X_s^{t,x} - X_s^{t',x'}|^2\right]. \tag{1.17}$$

La continuité de ϕ et du temps d'arrêt $\tau^{t,x}$ par rapport aux deux variables assurent que $\{\phi(\tau, X_\tau^{t,x}), (t,x) \in [0,T]\times\bar{O}\}$ est borné. Donc $|\phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \phi(\tau', X_{\tau'}^{t',x'})|^2$ est uniformément intégrable. Par le théorème de la convergence dominée

$$\mathbb{E}\Big(|\phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \phi(\tau', X_{\tau'}^{t',x'})|^2\Big) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad (t,x) \to (t',x'). \tag{1.18}$$

Par ailleurs, par l'inégalité de Burkholder Davis Gundy, il existe une constante $C > 0$ dépendant de T et de la constante de Lipschitz de b et σ telle que :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{r\le s\le(\tau\vee\tau')} |X_s^{t,x} - X_s^{t',x'}|^2\right) \le C\left\{|x-x'|^2 + (1+|x|^2\vee|x'|^2)|t-t'|\right\}. \tag{1.19}$$

En combinant (1.18) et (1.19) on obtient

$$|\Delta Y_{t\wedge t'}|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad (t,x)\to(t',x').$$

□

1.3.1 Solution de viscosité

A présent, on considère le système suivant

$$\begin{cases} \min\{-\partial_t u(t,x) - \mathcal{A}u(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\partial_x u\sigma)(t,x)); u(t,x)-\psi(t,x)\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (t,x)\in[0,T)\times O \\ u(T,x) = \bar{\phi}(T,x), \quad \forall\ x\in\bar{O} \\ u(t,x) = \phi(t,x),\ \forall(t,x)\in[0,T)\times\partial O \\ \bar{\phi}(t,x) \ge \psi(t,x) \quad \forall(t,x)\in[0,T]\times\partial O \\ \text{avec } \bar{\phi}(T,x) = \phi(T,x) \text{ sur } \partial O \end{cases} \tag{1.20}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par:

$$\mathcal{A} = b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Nous définissons la notion de solution de viscosité du problème ci dessus (1.20)

Definition 1.2. (sous solution de viscosité)
$u\in C([0,T]\times\bar{O},\mathbb{R})$ est sous-solution de viscosité du système ($SPPDE$) si $u(T,x)\le\bar{\phi}(T,x)$ $\forall x\in O$ et pour toute fonction $\varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\bar{O})$ et tout (t,x) maximum local de la fonction $u-\varphi$, on a

$$\min\{-\partial_t\varphi(t,x) - \mathcal{A}\varphi(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\partial_x\varphi\sigma)(t,x)); u(t,x)-\psi(t,x)\} \le 0 \qquad (t,x)\in[0,T)\times O,$$

$$\min\Big[\varphi(t,x)-\phi(t,x);\ \min\{-\partial_t\varphi(t,x) - \mathcal{A}\varphi(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\partial_x\varphi\sigma)(t,x)), u(t,x)-\psi(t,x)\}\Big] \le 0 \qquad (t,x)\in[0,T)\times\partial O.$$

Definition 1.3. (sur solution de viscosité)
Une fonction $u \in C([0,T]\times\bar{O})$ est sur-solution de viscosité du problème (1.20) si $u(T,x) \geq \bar{\phi}(T,x)\ \forall\ x \in O$et pour $\varphi \in C^{1,2}([0,T]\times\bar{O})$ et tout (t,x) minimum local de la fonction $u-\varphi$, on a

$$\min\{-\partial_t\varphi(t,x) - \mathcal{A}\varphi(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\partial_x\varphi\sigma)(t,x)); u(t,x)-\psi(t,x)\} \geq 0 \qquad (t,x)\in[0,T)\times O,$$

$$\max\Big[\varphi(t,x)-\phi(t,x);$$

$$\min\{-\partial_t\varphi(t,x) - \mathcal{A}\varphi(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\partial_x\varphi\sigma)(t,x)), u(t,x)-\psi(t,x)\}\Big] \geq 0 \qquad (t,x)\in[0,T)\times\partial O.$$

Definition 1.4. (solution de viscosité)
Une solution de viscosité du problème (1.20) est à la fois sous et sur solution de viscosité de (1.20).

Théorème 1.4. *La fonction u définie en (1.15) est une solution de viscosité du problème* (1.20).

Démonstration du Théorème 1.4. On s'inspire essentiellement de Cvitanic et Ma [5] et Darling et Pardoux [6]. Sans perte de généralité nous allons seulement montrer que u est sous-solution.
Soit $\varphi \in C^{1,2}([0,T]\times\overline{O})$ tel que (t,x) soit maximum local de $u-\varphi$ (sans perte de généralité on peut supposer que $u(t,x)=\varphi(t,x)$).
Admettons provisoirement qu'il existe une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ telle que pour tout temps d'arrêt τ tel que $t\leq\tau\leq T$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{E}}\int_t^\tau -\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\theta,X_\theta^{t,x}) - \mathcal{A}\varphi(\theta,X_\theta^{t,x}) - f(\theta,X_\theta^{t,x},u(\theta,X_\theta^{t,x}),(\nabla\varphi\sigma)(\theta,X_\theta^{t,x}))\right\}d\theta\\ &-\tilde{\mathbb{E}}(R_\tau^{t,x}-R_t^{t,x}) \leq 0.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Montrons que u est sous-solution de viscosité.
Si $u(t,x)\leq\psi(t,x)$ alors u est sous-solution.
Donc on va supposer que $u(t,x)>\psi(t,x)$.

- Soit $x\in O\cup(\partial O\cap\Gamma^c)$ avec Γ défini par (1.14). Nous voulons montrer ainsi que :

$$G(t,x,u,\varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) - \mathcal{A}\varphi(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi\sigma)(t,x)) \leq 0$$

Supposons le contraire : $G(t,x,u,\varphi)>0$.
Alors il existe $\varepsilon_0>0$ tel que

$$\text{pour } (t,x)\in[0,T]\times\overline{O},\ \Gamma_1(t,x) := \min\{u(t,x)-\psi(t,x)\ ;\ G(t,x,u,\varphi)\} \geq \varepsilon_0.$$

On pose :

$$\tau_1 := \inf\{s\in(t,T],\Gamma_1(s,X_s^{t,x}) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\}\wedge\tau^{t,x}.$$

D'après la loi de Blumenthal 0-1, sur $\Gamma^c \quad \tau^{t,x} > t \quad \mathbb{P}$-p.s, et donc comme $\tilde{\mathbb{P}}$ est absolument continue par rapport $\mathbb{P}$, $\tau^{t,x} > t \quad \tilde{\mathbb{P}}$-p.s donc $\tau_1 > t \quad \tilde{\mathbb{P}}$-p.s.

Pour $s \leq \tau_1$ on a

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leq \Gamma_1(s, X_s^{t,x})$$

d'où

$$G\Big(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x}), \varphi(s, X_s^{t,x})\Big) \geq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

et donc par (1.21),

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\tilde{\mathbb{E}}(\tau_1 - t) - \tilde{\mathbb{E}}(R_{\tau_1}^{t,x} - R_t^{t,x}) \leq 0. \tag{1.22}$$

Or pour tout ρ_s mesurable tel que $\rho_s \geq \psi(s, X_s^{t,x})$ on peut écrire que

$$(Y_s - \rho_s) dR_s^{t,x} \leq 0.$$

Or $Y_\theta^{t,x} = u(\theta, X_\theta^{t,x})$ sur $[t, \tau_1]$, en raison de l'unicité trajectorielle de la solution de l'équation $Eq(f, \phi, \tau, \psi)$, et $u(\theta, X_\theta^{t,x}) - \dfrac{\varepsilon_0}{2} \geq \psi(\theta, X_\theta^{t,x})$, entre t et τ_1. On en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_0}{2}(R_{\tau_1}^{t,x} - R_t^{t,x}) &= \int_t^{\tau_1} \left(Y_\theta^{t,x} - u(\theta, X_\theta^{t,x}) + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) dR_\theta^{t,x} \\
&= \int_t^{\tau_1} \left[Y_\theta^{t,x} - \left(u(\theta, X_\theta^{t,x}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\right] dR_\theta^{t,x}, \\
&\leq \int_t^{\tau_1} \left[Y_\theta^{t,x} - \psi(\theta, X_\theta^{t,x})\right] dR_\theta^{t,x} = 0.
\end{aligned}$$

Comme $R_\theta^{t,x}$ est un processus croissant positif, on obtient $\tilde{\mathbb{E}}(R_{\tau_1}^{t,x} - R_t^{t,x}) = 0$, et (1.22) devient

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\tilde{\mathbb{E}}(\tau_1 - t) = 0.$$

Ceci contredit le fait que $\tau_1 > t$. $G(t, x, u, \varphi)$ est donc bien négatif ou nulle

- <u>Si $x \in \partial O \cap \Gamma$</u>, alors $\tau^{t,x} = t \quad \mathbb{P}$-p.s. donc $u(t,x) = Y_t^{t,x} = \phi(\tau^{t,x}, x) = \phi(t,x)$. D'où

$$\min\Big[\varphi(t,x) - \phi(t,x);$$
$$\min\{-\partial_t\varphi(t,x) - \mathcal{A}\varphi(t,x) - f(t,x,u(t,x),(\partial_x\varphi\sigma)(t,x)), u(t,x) - \psi(t,x)\}\Big] \leq 0$$
$$(t,x) \in [0,T) \times \partial O.$$

Il nous reste à montrer l'inégalité (1.21). Si on réécrit l'équation différentielle stochastique rétrograde $Eq(f, \phi, \tau^{t,x}, \psi)$ en remplaçant $Y_{\tau_2}^{t,x}$ par $u(\tau_2, X_{\tau_2}^{t,x})$ avec τ_2 un temps d'arrêt tel que $t \leq \tau_2 \leq T$ on obtient

$$u(\tau_2, X_{\tau_2}^{t,x}) = u(t,x) - \int_t^{\tau_2} f(\theta, X_\theta^{t,x}, Y_\theta^{t,x}, Z_\theta^{t,x}) d\theta + \int_t^{\tau_2} Z_\theta^{t,x} dW_\theta - \int_t^{\tau_2} dR_\theta^{t,x}.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale donne:

$$f(\theta, X_\theta^{t,x}, Y_\theta^{t,x}, Z_\theta^{t,x}) = f(\theta, X_\theta^{t,x}, u(\theta, X_\theta^{t,x}), (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x})) + \alpha_\theta\Big(Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))\Big)$$

avec

$$\alpha_\theta := \int_0^1 \nabla f(\theta, X_\theta^{t,x}, u(\theta, X_\theta^{t,x}), sZ_\theta^{t,x} + (1-s)(\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))ds,$$

et donc

$$\begin{aligned} u(\tau_2, X_{\tau_2}^{t,x}) = u(t,x) - \int_t^{\tau_2} f(\theta, X_\theta^{t,x}, u(\theta, X_\theta^{t,x}), (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))d\theta \\ - \int_t^{\tau_2} (\alpha_\theta; Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))d\theta + \int_t^{\tau_2} Z_\theta^{t,x} dW_\theta - \int_t^{\tau_2} dR_\theta^{t,x}. \end{aligned}$$

Par ailleurs pour $\varphi \in C^{1,2}([0,T]\times\overline{O})$:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_2, X_{\tau_2}^{t,x}) &= \varphi(t,x) + \int_t^{\tau_2} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\theta, X_\theta^{t,x})d\theta + \int_t^{\tau_2} b(\theta, X_\theta^{t,x}).\nabla\varphi(\theta, X_\theta^{t,x})d\theta \\ &+ \int_t^{\tau_2} \sigma(\theta, X_\theta^{t,x}).\nabla\varphi(\theta, X_\theta^{t,x})dW_\theta + \frac{1}{2}\int_t^{\tau_2} tr(\sigma\sigma^*(\theta, X_\theta^{t,x}))\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\theta, X_\theta^{t,x})d\theta. \end{aligned}$$

Comme (t,x) est maximum local de $u-\varphi$ et $u(t,x) = \varphi(t,x)$ donc $u(\tau_2, X_{\tau_2}^{t,x}) - \varphi(\tau_2, X_{\tau_2}^{t,x}) \leq 0$, d'où on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_t^{\tau_2} \left\{ -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\theta, X_\theta^{t,x}) - \mathcal{A}_\theta\varphi(\theta, X_\theta^{t,x}) - f(\theta, X_\theta^{t,x}, u(\theta, X_\theta^{t,x}), (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x})) \right\} d\theta \\ - \int_t^{\tau_2} dR_\theta^{t,x} - \int_t^{\tau_2} (\alpha_\theta; Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))d\theta + \int_t^{\tau_2} (Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))dW_\theta. \end{aligned}$$

Comme α_s est borné sur $[0,T]$ donc le processus $\Theta_r^t := exp\left\{-\int_t^r \alpha_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^r |\theta_s|^2 ds\right\}$, $r \in [t,T]$ est une $\mathbb{P}$-martingale sur $[t,T]$. Par le théorème de Girsanov (cf [13], page 186) , il existe une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ telle que $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \Theta_T^t$(absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$).

Ainsi $\tilde{W}_r^t = W_r - W_t - \int_t^r \alpha_s ds$ est un $\tilde{\mathbb{P}}$ mouvement Brownien.

Donc

$$\begin{aligned} M_s^t &:= \int_t^s (\alpha_\theta; Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))d\theta + \int_t^s (Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))dW_\theta, \\ &= \int_t^s (Z_\theta^{t,x} - (\nabla\varphi\sigma)(\theta, X_\theta^{t,x}))d\tilde{W}_\theta \quad t \leq s \leq T \end{aligned}$$

est une martingale. On déduit (1.21) en prenant l'espérance sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$.

□

Remarque 1.5. L'unicité de la solution de viscosité pour le problème de Dirichlet (1.20) est déduit de M. Crandall, H. Ishii, et P-L. Lions [4] section 7.*C*.

2 Erreur de Localisation: Cas du Put Américain

2.1 Présentation du problème

On se place sous la probabilité $\mathbb{P}$ pour laquelle $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ est un mouvement Brownien standard, et tel que le prix de l'actif risqué $(X_t)_t$ vérifie

$$dX_t = X_t(r\, dt + \sigma\, dW_t).$$

On note par

$$\mathcal{A}_x = \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x}$$

et

$$\phi(x) = (K-x)^+ = \bar{\phi}(x) = \psi(x) \text{ dans le cas d'option américaine}$$

Les inégalités aux dérivées partielles paraboliques associées au calcul du prix du Put américain sont les suivantes:

$$PDE(I)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}_x u - ru \leq 0, \quad u \geq \psi \ \text{ sur } [0,T)\times\mathbb{R}, \\ (\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}_x u - ru)(\psi - u) = 0 \ \text{ sur } [0,T)\times\mathbb{R}, \\ u(T,x) = \bar{\phi}(x) \quad \forall\ x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Le système d'inéquations variationnelles (2.1) admet une solution unique $u(t,x)$ continue et bornée telle que les dérivées au sens des distributions $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}$ de u sont localement bornées [9]. Cette solution vérifie

$$u(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{J}_{[t,T]}} \mathbb{E}\Big(e^{-r(\tau-t)}\phi(X_\tau^{t,x})\Big),$$

où $(X^{t,x})$ est le prix de l'actif risqué issu de x à l'instant t et $\mathcal{J}_{[t,T]}$ est l'ensemble des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$.
Pour $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, on considère le système suivant:

$$\begin{cases} Y_s^{t,x} = \phi(X_T^{t,x}) - \displaystyle\int_s^T rY_\theta^{t,x}d\theta - \int_s^T Z_\theta^{t,x}dW_\theta + (R_T^{t,x} - R_s^{t,x}), \\ Y_s^{t,x} \geq \psi(X_s^{t,x})\ \forall t\leq s\leq T, \quad \displaystyle\int_0^T (Y_s^{t,x} - \psi(X_s^{t,x}))dR_s^{t,x} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Le système (2.2) admet une seule solution adaptée $(Y^{t,x}, Z^{t,x}, R^{t,x})$ qui vérifie

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq s\leq T}|Y_s^{t,x}|^2 + \int_t^T |Z_s^{t,x}|^2 ds + |R_T^{t,x}|^2\right) < +\infty.$$

De plus, le théorème 1.4 nous dit que $u(t,x) = Y_t^{t,x}$ est une solution de viscosité du système (2.1).

Proposition 2.1. • *Pour tout $s\in[t,T]$, la fonction $x\mapsto Y_s^{t,x}$ est convexe décroissante sur $(0,+\infty)$ presque sûrement.*

- *Au voisinage de 0 la fonction $x\mapsto Y_t^{t,x}$ est dérivable et $\dfrac{\partial Y_t^{t,x}}{\partial x} = -1$.*

Proof. • Convexité de la fonction $x\mapsto Y_s^{t,x}$ pour tout $t\leq s\leq T$.
Soient $\lambda\in[0,1]$ et $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.
On note par

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \lambda\phi(X^{t,x_1}) + (1-\lambda)\phi(X^{t,x_2}), \\ \check{\xi} = \phi(X^{t,\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}), \end{cases}$$

et pour $\zeta = Y, Z$ ou R,

$$\begin{cases} \hat{\zeta} = \lambda \zeta^{t,x_1} + (1-\lambda)\zeta^{t,x_2}, \\ \check{\zeta} = \zeta^{t,\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}. \end{cases}$$

Pour montrer que l'application $x \mapsto Y_s^{t,x}$ est convexe, il suffit de vérifier que $(\check{Y}_s - \hat{Y}_s)^+ \le 0$ pour tout $s \in [t,T]$.
Or, on a

$$\begin{cases} \hat{Y}_s = \hat{\xi}_T - r\int_s^T \hat{Y}_\theta d\theta - \int_s^T \hat{Z}_\theta dW_\theta + \int_s^T d\hat{R}_\theta, \\ \hat{Y}_s \ge \hat{\xi}_s \quad \forall\, s \in [t,T], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \check{Y}_s = \check{\xi}_T - r\int_s^T \check{Y}_\theta d\theta - \int_s^T \check{Z}_\theta dW_\theta + \int_s^T d\check{R}_\theta, \\ \check{Y}_s \ge \check{\xi}_s \quad \forall\, s \in [t,T] \ et \ (\check{Y}_s - \check{\xi}_s) d\check{R}_s = 0. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que, par la convexité de ϕ,

$$\hat{\xi}_s \ge \check{\xi}_s \quad \forall\, s \in [t,T].$$

De plus, si on applique la formule d'Itô-Tanaka à la fonction $x \mapsto (x^+)^2$ à la semi-martingale $\check{Y} - \hat{Y}$, on obtient que le processus

$$\Bigg((\check{Y}_s - \hat{Y}_s)^{+^2} - (\check{Y}_t - \hat{Y}_t)^{+^2} - r\int_t^s 2(\check{Y}_\theta - \hat{Y}_\theta)^{+^2} d\theta - \int_t^s 2(\check{Y}_\theta - \hat{Y}_\theta)^+ (\check{Z}_\theta - \hat{Z}_\theta) dW_\theta$$

$$+ \int_t^s 2(\check{Y}_\theta - \hat{Y}_\theta)^+ d(\check{R} - \hat{R})_\theta\Bigg)_{t \le s \le T}$$ est continu croissant.

Donc

$$\mathbb{E}(\check{Y}_s - \hat{Y}_s)^{+^2} \le 2\mathbb{E}\int_s^T (\check{Y}_\theta - \hat{Y}_\theta)^+ d(\check{R} - \hat{R})_\theta.$$

Or

$$(\check{Y}_\theta - \hat{Y}_\theta)^+ \le (\check{Y}_\theta - \hat{\xi}_\theta)^+ \le \check{Y}_\theta - \check{\xi}_\theta,$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\check{Y}_s - \hat{Y}_s)^{+^2} &\le -2\mathbb{E}\int_s^T (\check{Y}_\theta - \hat{Y}_\theta)^+ d\hat{R}_\theta, \\ &\le 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- Décroissance $p.s$ de la fonction $x \mapsto Y_s^{t,x}$ sur $(0,+\infty)$.
  Soient x_1 et x_2 dans $(0,+\infty)$ tels que $x_1 \ge x_2$.
  Pour tout $s \in [t,T]$, puisque ϕ est décroissante on a $\phi(X_s^{t,x_1}) \le \phi(X_s^{t,x_2})$. Par le Théorème de comparaison [8], on obtient que

$$Y_s^{t,x_1} \le Y_s^{t,x_2} \quad \forall s \in [t,T],$$

et en particulier $Y_t^{t,0} \ge Y_t^{t,x} \ge (K-x)_+ \quad \forall\, x \in (0,+\infty)$.

- Différentiabilité de la fonction $x \mapsto Y_t^{t,x}$ au voisinage de 0.
Pour $x = 0$, le processus $(Y^{t,0}, Z^{t,0}, R^{t,0})$ est solution de l'EDSR Réfléchie suivante

$$\begin{cases} Y_s^{t,0} = K - r\int_s^T Y_\theta^{t,0} d\theta - \int_s^T Z_\theta^{t,0} dW_\theta + \int_s^T dR_\theta^{t,0} \\ Y_s^{t,0} \geq K \ \forall t \leq s \leq T, \quad \int_t^T (Y_\theta^{t,0} - K) dR_\theta^{t,0} = 0. \end{cases}$$

Remarquons que $(Y_s^{t,0}, Z_s^{t,0}, R_s^{t,0}) = (K, 0, Kr(s-t))$ est la seule solution adaptée de cette équation,d'où,

$$\text{pour tout } x \in [0, K) \quad K \geq Y_t^{t,x} \geq (K - x)_+ \tag{2.3}$$

Si on note par $x^* = \dfrac{2rK}{\sigma^2 + 2r}$, le point critique pour le put perpétuel américain (cf Lamberton et Lapeyre [12]) et d'aprés le fait que le prix du put perpetuel américain est plus chére que le prix du put américain normal on a $Y_t^{t,x^*} \leq K - x^*$. Associé à l'inégalité (2.3) on a

$$Y_t^{t,x^*} = K - x^*, \text{ avec } x^* > 0.$$

De plus, si on note $x^*(t) = \sup\{x > 0,\ Y_t^{t,x} = K - x\}$, alors

$$Y_t^{t,x^*(t)} = K - x^*(t).$$

$\forall\ 0 \leq x \leq x^*(t)$, il existe $\lambda \in (0,1)$ tel que $x = \lambda x^*(t)$. Par la convexité de l'application $x \mapsto Y_t^{t,x}$ on obtient

$$\begin{aligned} Y_t^{t,x} &\leq \lambda Y_t^{t,x^*(t)} + (1-\lambda) Y_t^{t,0} = \lambda(K - x^*(t)) + (1-\lambda)K = (K - \lambda x^*(t)) \\ &\leq (K - x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Par ailleurs par la définition de l'EDSR réfléchie $Y_s^{t,x} \geq (K-x)^+ \geq K - x$. En associant cette inégalité à l'inégalité (2.4) on déduit

$$\forall\ 0 \leq x \leq x^*(t) \quad Y_t^{t,x} = K - x,$$

en particulier, la fonction $x \mapsto Y_t^{t,x}$ est dérivable au voisinage de 0 et $\dfrac{\partial Y_t^{t,x}}{\partial x} = -1$. □

2.2 Approximation par localisation

Dans ce paragraphe, on se propose d'approximer le système d'inéquations variationnelles (2.1) en le localisant sur un intervalle $[l, L]$ par le système d'EDP semi linéaire avec conditions de Dirichlet au bord artificielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathcal{A}_t \bar{u} - r\bar{u} \leq 0, \quad \bar{u} \geq \phi \ \text{ sur } [0,T) \times (l,L), \\ (\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathcal{A}_t \bar{u} - r\bar{u})(\phi - \bar{u}) = 0 \ \text{ sur } [0,T) \times (l,L), \\ \bar{u}(T,x) = \phi(x) \quad \forall\ x \in (l,L), \\ \bar{u}(t,l) = \bar{\phi}(l), \quad \bar{u}(t,L) = \bar{\phi}(L) \quad \forall\ t \in [0,T) \\ \bar{\phi}(l) = \phi(l), \text{ et } \bar{\phi}(L) = \phi(L). \end{cases} \tag{2.5}$$

où $\bar{\phi}$ est la fonction définie, comme dans [11], par

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} K - x & x \leq x^* \\ (K - x^*)\left(\dfrac{x}{x^*}\right)^{\gamma} & x \geq x^*, \end{cases}$$

avec

$$x^* = \frac{2rK}{\sigma^2 + 2r}, \quad \gamma = \frac{-2r}{\sigma^2}, \quad l \leq x^* \leq L.$$

Pour $(t,x) \in [0,T] \times [l,L]$, on note $\tau = \tau^{t,x}$ le temps de sortie du processus $X^{t,x}$ du domaine $[l,L]$.

D'après le théorème 1.4, la fonction $\bar{u}(t,x) = \bar{Y}_t^{t,x}$ est une solution de viscosité du système d'inéquations aux dérivées partielles (2.5) où le processus $(\bar{Y}^{t,x}, \bar{Z}^{t,x}, \bar{R}^{t,x})$ est la solution de l'EDSR

$$EDSRR(I)' \begin{cases} \bar{Y}_s^{t,x} = \bar{\phi}(X_\tau^{t,x}) - \displaystyle\int_{s\wedge\tau}^{\tau} r\bar{Y}_\theta^{t,x} d\theta - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} \bar{Z}_\theta^{t,x} dW_\theta + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} d\bar{R}_\theta^{t,x}, \\ \bar{Y}_s^{t,x} \geq \phi(X_s^{t,x}) \ \forall\ s \in (t,\tau), \quad \displaystyle\int_t^{\tau} (\bar{Y}_s^{t,x} - \phi(X_s^{t,x})) d\bar{R}_s^{t,x} = 0. \end{cases}$$

On rappelle aussi que la solution exacte $(EDSRR(I))$ est équivalente à la solution du système d'EDP semi linéaires localisé en (l,L) avec comme condition de Dirichlet au bord $u(\tau, X_\tau^{t,x})$. On renomme cette solution u.

$$EDSRR(I)'' \begin{cases} Y_s^{t,x} = u(\tau, X_\tau^{t,x}) - \displaystyle\int_{s\wedge\tau}^{\tau} rY_\theta^{t,x} d\theta - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} Z_\theta^{t,x} dW_\theta + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} dR_\theta^{t,x}, \\ Y_s^{t,x} \geq \phi(X_s^{t,x}) \ \forall\ s \in (t,\tau), \quad \displaystyle\int_t^{\tau} (Y_s^{t,x} - \phi(X_s^{t,x})) dR_s^{t,x} = 0. \end{cases}$$

2.3 Erreur de localisation

L'analyse de l'erreur d'approximation entre l'équation non localisé et l'équation localisé consiste à contrôler l'erreur entre les solutions des EDSRs associées.

Proposition 2.2. *Soient $u(t,x) = Y_t^{t,x}$ solution de viscosité de* (2.1) *et $\bar{u}(t,x) = \bar{Y}_t^{t,x}$ solution de viscosité de* (2.5)*. Il existe une constante positive C_T dépendant de T telle que:* $\forall\ x \in [-L,L]$,

$$\begin{aligned} |u(t,x) - \bar{u}(t,x)|^2 \leq C_T \Bigg\{ &\left(E|u(\tau,l) - \bar{\phi}(l)|^4\right)^{1/2} \left(Erfc\left(\frac{\ln(x) - \ln(l) - |\mu|(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}\right)\right)^{1/2} \\ &+ \left(E|u(\tau,L) - \bar{\phi}(L)|^4\right)^{1/2} \left(Erfc\left(\frac{\ln(L) - \ln(x) - |\mu|(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}\right)\right)^{1/2} \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le procédé est presque le même que dans [2] à la différence qu'ici on travaille avec des conditions au bord de Dirichlet plutôt qu' avec des conditions au bord de Neumann. Cependant, avec notre fonction au bord particulière nous avons pu expliciter un majorant précis de l'erreur de localisation.

Proof. $|u(t,x)-\bar{u}(t,x)|^2 = |Y_t^{t,x} - \bar{Y}_t^{t,x}|^2$.
On pose

$$\begin{aligned}
\Delta Y_s^{t,x} &:= Y_s^{t,x} - \bar{Y}_s^{t,x},\\
\Delta Z_s^{t,x} &:= Z_s^{t,x} - \bar{Z}_s^{t,x},\\
\Delta R_s^{t,x} &:= R_s^{t,x} - \bar{R}_s^{t,x},\\
\Delta G_s^{t,x} &:= \left\{u(s,X_s^{t,x}) - \bar{\phi}(X_s^{t,x})\right\}\mathbb{I}_{\{X_s^{t,x}=l \text{ ou } X_s^{t,x}=L\}}.
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô entre $s=t$ et $s=\tau$ et on a

$$|\Delta Y_t^{t,x}|^2 \le \mathbb{E}|Y_\tau^{t,x} - \bar{\phi}(X_\tau^{t,x})|^2 - 2r\mathbb{E}\int_t^\tau (\Delta Y_s^{t,x})^2 ds + 2\mathbb{E}\int_t^\tau \Delta Y_s^{t,x}\, d\Delta R_s^{t,x}.$$

En utilisant la propriété de reflexion on déduit

$$\mathbb{E}\int_t^\tau \Delta Y_s^{t,x}\, d\Delta R_s^{t,x} = -\mathbb{E}\int_t^\tau (Y_s^{t,x} - \phi(X_s^{t,x}))d\bar{R}_s^{t,x} - \mathbb{E}\int_t^\tau (\bar{Y}_s^{t,x} - \phi(X_s^{t,x}))\, dR_s^{t,x}.$$

La croissance des processus $R_s^{t,x}$ et $\bar{R}_s^{t,x}$ assure que

$$\mathbb{E}\int_t^\tau \Delta Y_s^{t,x}\, d\Delta R_s^{t,x} \le 0.$$

Donc
$$|\Delta Y_t^{t,x}|^2 \le C\mathbb{E}|u(\tau,l) - \bar{\phi}(l)|^2\ \mathbb{I}_{(\tau<T,\ X_\tau^{t,x}=l)} + \mathbb{E}|u(\tau,L) - \bar{\phi}(L)|^2\ \mathbb{I}_{(\tau<T,\ X_\tau^{t,x}=L)}.$$

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-\bar{u}(t,x)|^2 \le C\bigg\{ &\left(\mathbb{E}|u(\tau,l)-\bar{\phi}(l)|^4\right)^{1/2}\left(\mathbb{P}(\tau<T, X_\tau^{t,x}=l)\right)^{1/2}\\
&+ \left(\mathbb{E}|u(\tau,L)-\bar{\phi}(L)|^4\right)^{1/2}\left(\mathbb{P}(\tau<T, X_\tau^{t,x}=L)\right)^{1/2}\bigg\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tau<T; X_\tau^{t,x}=l\right) &\le \mathbb{P}\left\{\inf_{t\le s\le T}(W_s - W_t) \le \frac{-\ln(x)+\ln(l)+|\mu|(T-t)}{\sigma}\right\}\\
&\le \mathrm{Erfc}\left(\frac{\ln(x)-\ln(l)-|\mu|(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}\right).
\end{aligned}$$

(cf Borodin-Salminen 1.2.4 page 154 [3])
De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau<T; X_\tau^{t,x}=L) &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t\le s\le T}(W_s - W_t) \ge \frac{\ln(L)-\ln(x)-|\mu|(T-t)}{\sigma}\right)\\
&\le \mathrm{Erfc}\left(\frac{\ln(L)-\ln(x)-|\mu|(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}\right).
\end{aligned}$$

□

On remarque que

$$\mathrm{Erfc}\left(\frac{\ln(x)-\ln(l)-|\mu|(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}\right)$$
$$\overset{l\in\mathcal{V}(0)}{\sim}(\ln(x)-\ln(l)-|\mu|(T-t))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\ln(l)-\ln(x)+|\mu|(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)^2\right).$$

et que

$$\mathrm{Erfc}\left(\frac{\ln(L)-\ln(x)-|\mu|(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}\right)$$
$$\overset{L\in\mathcal{V}(+\infty)}{\sim}(\ln(L)-\ln(x)-|\mu|(T-t))^{-\frac{1}{2}}$$
$$*\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\ln(L)-\ln(x)+|\mu|(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)^2\right)$$

D'où quand $l\to 0$ et $L\to\infty$, $|u(t,x)-\bar{u}(t,x)|\longrightarrow 0$.

3 Erreur de localisation: Cas général

Dans ce paragraphe, on considère l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_s^{t,x}=b(s,X_s^{t,x})ds+\sigma(s,X_s^{t,x})dW_s, & t\le s\le T\\ X_t^{t,x}=x. \end{cases}\tag{3.1}$$

On fait les hypothèses suivantes :

(4i) f est uniformément κ-Lipschitz par rapport à (x,y,z),

(4ii) $\phi\in C_b^2$ convexe,

(4iii) b et σ continues bornées et κ-Lipschitz par rapport à x telles que

$$|b(t,x)|\le\bar{b}\ \text{et}\ |\sigma(t,x)|\le\bar{\sigma}.$$

(4iv) Il existe une constante $C_1>0$ telle que

$$\sup_{0\le t\le T}(|b(t,0)|+|\sigma(t,0)|+|f(t,0,0,0)|)+|\phi(0)|\le C_1.$$

On considère le système variationnel suivant:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x)+\mathcal{A}u(t,x)+f(t,x,u(t,x),(\partial_x u\sigma)(t,x))\le 0,\ u\ge\phi\\ \qquad\qquad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R},\\ (-\partial_t u(t,x)-\mathcal{A}u(t,x)-f(t,x,u(t,x),(\partial_x u\sigma)(t,x)))(u(t,x)-\phi(x))=0\\ \qquad\qquad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R},\\ u(T,x)=\phi(x)\quad\forall\ x\in\mathbb{R}, \end{cases}\tag{3.2}$$

où

$$\mathcal{A} = b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Soit l'EDSR réfléchie à temps final aléatoire associée:

$$EDSRR(II)\begin{cases} Y_s^{t,x} = u(\tau, X_\tau^{t,x}) + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z^{t,x})dr - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} Z_r^{t,x}dW_r + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} dR_r^{t,x}, \\ Y_s^{t,x} \geq \phi(X_s^{t,x}) \ t \leq s \leq \tau, \quad \int_t^{\tau}(Y_s^{t,x} - \phi(X_s^{t,x}))dR_s^{t,x} = 0 \end{cases}$$

pour tout temps d'arrêt $\tau \leq T$.

3.1 Localisation avec conditions de Dirichlet au bord artificielles

Pour la localisation du problème (3.2), on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\bar{u}(t,x) + \mathcal{A}\bar{u}(t,x) + f(t,x,\bar{u}(t,x),(\partial_x u\sigma)(t,x)) \leq 0, \quad \bar{u}(t,x) \geq \phi(t,x) \\ \qquad\qquad \text{sur } [0,T)\times(-L,L), \\ (-\partial_t\bar{u}(t,x) - \mathcal{A}\bar{u} - f(t,x,\bar{u}(t,x),(\partial_x u\sigma)(t,x)))(\bar{u}-\phi) = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur } [0,T)\times(-L,L), \\ \bar{u}(T,x) = \phi(x) \quad \forall\, x\in(-L,L), \\ \bar{u}(t,-L) = \bar{\phi}(-L), \quad \bar{u}(t,L) = \bar{\phi}(L) \quad \forall\, t\in[0,T). \end{cases} \tag{3.3}$$

On suppose que $\tau = \tau_x = \inf\{s \geq t/|X^{t,x}| > L\}$ et on considère l'EDSR réfléchie suivante:

$$EDSRR(II)'\begin{cases} \bar{Y}_s^{t,x} = \bar{\phi}(X_\tau^{t,x}) + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} f(r, X_r^{t,x}, \bar{Y}_r^{t,x}, \bar{Z}_r^{t,x})dr - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} \bar{Z}_r^{t,x}dW_r + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} d\bar{R}_r^{t,x}, \\ \bar{Y}_s^{t,x} \geq \bar{\phi}(X_s^{t,x}), \quad \int_t^{\tau}(\bar{Y}_s^{t,x} - \bar{\phi}(X_s^{t,x}))dR_s^{t,x} = 0. \end{cases}$$

$\bar{u}(t,x) = \bar{Y}_t^{t,x}$ est une solution de viscosité du système (3.3).
Dans toute la suite on suppose que $L > \bar{b}T$ et $|x| < L - \bar{b}T$.

3.2 Erreur de localisation

L'erreur de localisation, dans un cadre un peu plus général que celui du brownien géométrique, a la forme suivante:

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses* $(4i)-(4iv)$*, il existe une constante* $C_{T,t}$ *telle que :*

$$|u(t,x) - \bar{u}(t,x)|^2 \leq C\left(\mathbb{E}(u(\tau,L) - \bar{\phi}(L))^4\right)^{1/2}\left(e^{-\frac{\left|L-x-|(\mu-\sigma^2)(T-t)|\right|}{\sigma^2(T-t)}}\right)^{1/2}$$
$$+ C\left(\mathbb{E}(u(\tau,-L) - \bar{\phi}(-L))^4\right)^{1/2}\left(e^{-\frac{\left|L+x-|(\mu-\sigma^2)(T-t)|\right|}{\sigma^2(T-t)}}\right)^{1/2}.$$

Proof. On sait que $|u(t,x)-\bar{u}(t,x)| = |Y_t^{t,x} - \bar{Y}_t^{t,x}|$.
En appliquant la formule d'Itô on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_s^{t,x} - \bar{Y}_s^{t,x}|^2 + \mathbb{E}\int_{s\wedge\tau}^{\tau} |Z_r^{t,x} - \bar{Z}_r^{t,x}|^2 dr \\
&= \mathbb{E}|Y_\tau^{t,x} - \bar{\phi}(X_\tau^{t,x})|^2 + 2\mathbb{E}\int_{s\wedge\tau}^{\tau} (Y_r^{t,x} - \bar{Y}_r^{t,x}) d(R_r^{t,x} - \bar{R}_r^{t,x}) \\
&\quad + 2\mathbb{E}\int_{s\wedge\tau}^{\tau} (Y_r^{t,x} - \bar{Y}_r^{t,x})\Big(f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}) - f(r,X_r^{t,x},\bar{Y}_r^{t,x},\bar{Z}_r^{t,x})\Big)dr, \\
&\leq 2\mathbb{E}|u(\tau,X_\tau^{t,x}) - \bar{u}(\tau,X_\tau^{t,x})|^2 + C\mathbb{E}\int_{s\wedge\tau}^{\tau} |Y_r^{t,x} - \bar{Y}_r^{t,x}|^2 dr + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_{s\wedge\tau}^{\tau} |Z_r^{t,x} - \bar{Z}_r^{t,x}|^2 dr.
\end{aligned}$$

On applique le Lemme de Gronwall et on obtient

$$\mathbb{E}|Y_s^{t,x} - \bar{Y}_s^{t,x}|^2 \leq Ce^{C(T-t)}\Big(\mathbb{E}|u(\tau,X_\tau^{t,x}) - \bar{\phi}(X_\tau^{t,x})|^2 \mathbb{I}_{(\tau<T)}\Big).$$

Ainsi, en appliquant Cauchy-Schwartz on déduit que

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-\bar{u}(t,x)|^2 \leq C\Big[&\Big(\mathbb{P}\Big(X_\tau^{t,x} = L, \tau < T\Big)\Big)^{1/2}\Big(\mathbb{E}(u(\tau,L) - \bar{\phi}(L))^4\Big)^{1/2} \\
&+ \Big(\mathbb{P}\Big(X_\tau^{t,x} = -L, \tau < T\Big)\Big)^{1/2}\Big(\mathbb{E}(u(\tau,-L) - \bar{\phi}(-L))^2\Big)^{1/2}\Big].
\end{aligned}$$

On déroule le même calcul que dans Lamberton Lapeyre [12] page 99.

On rappelle que

$$\begin{aligned}
\{\exists s \in [t,T],\ |X_s^{t,x}| \geq L\} &\subset \left\{\sup_{t\leq s\leq T} |x + (\mu - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(W_s - W_t)| \geq L\right\} \\
&\subset \left\{\sup_{t\leq s\leq T} |x + \sigma(W_s - W_t)| \geq L - |(\mu-\sigma^2/2)(T-t)|\right\}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs on rappelle aussi que pour tout réel $a > 0$, pour tout λ

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq T} W_s \geq a\right) = \mathbb{P}(T_a \leq T-t) \leq e^{\lambda(T-t)}\mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_a}\right) \leq e^{\lambda(T-t)}e^{-a\sqrt{2\lambda}},$$

avec $T_a = \inf\{s \geq t;\ W_s = a\}$.

En minimisant en λ ,cela donne

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq s\leq T} W_s \geq a\right) \leq e^{-\frac{a^2}{T-t}}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq s\leq T} (x + \sigma W_s) \geq a\right) \leq e^{-\frac{(a-x)^2}{\sigma^2(T-t)}}.$$

$\square$

References

[1] Bensoussan, A. et Lions, J.L. *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique.* Dunod, 1978.

[2] Berthelot C., Bossy M.and Talay D., Numerical analysis and misspecifications in Finance: From model risk to localisation error estimates for nonliear PDEs. in *Stochastic processes and applications to mathematical finance, 1-25,* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.

[3] Borodin Andrei N. and Salminen Paavo *Handbook of Brownian Motion- Facts and Formulae* Probability and Its applications, Birkhauser Second edition (2002)

[4] Crandall, M. Ishii, H. and Lions,P-L. User's guide to the viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 27, 1-67, (1992).

[5] Cvitanic, J. and Ma, J. Reflected forward-Backward SDE's and obstacle problems with boundary conditions, *J.Appl. Stochastic anal,* 14(2), 113-138, (2001).

[6] Darling, R. and Pardoux, E. Backward SDE with Random Terminal Time and Applications to Semilinear Elliptic PDE, *Annales of Probability,* vol 25, n 3, 1135-1159, (1997).

[7] El-Karoui, N. and Hamadène, S. BSDEs and risk sensitive control, zero-sum and nonzero-sum game problems of stochastic functional differential equations, *Stochastics Processes and their Applications,* 107, 145-169, (2003).

[8] EL-Karoui, N. Kapoudjian, C. Pardoux, E. Peng, S. and Quenez, MC. Reflected solution of Backward SDE's, and Related Obstacle Problem for PDE's, *The Annals of Probability,* vol 25, issue 2, pp.702-737, (1997).

[9] Elliott, R.J. and Kopp, P.E. *Mathematics of Financial Markets*, Springer Finance.

[10] El-Karoui, N. Peng, S.and Quenez, Mc. Backward Stochastic Differential Equationin Finance, *Mathematical Finance*, pp 1-71, (1997).

[11] Fouque, J.P. Papanicolaou, G. and Sircar, K.R. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*,Cambridge u.p, (2000).

[12] Lamberton, D. et Lapeyre, B. *Introduction au calcul stochastique appliqué la finance*, Mathématiques et Applications, Ellipses, (1991).

[13] ∅ksendal B. *Stochastic Differential Equations, An introduction with Applications* Springer, Sixth Edition, 1998

[14] Pardoux, E.; Backward Stochastic Differential Equations and Viscosity Solutions of Systems of Parabolic and Elliptic PDEs of Second Order *Stochastic Analysis and Related Topics: The Geilo Workshop,* 1996, pp: 79-127 1998

[15] Pardoux, E. and Peng, S.; Adapted Solution of Backward Stochastic Differential Equations, *Systems and control Letters*, 14, pp 55-61, (1990).

[16] Pardoux, E. and Peng, S.; Backward Stochastic Differential Equations and Quasilinear Paraboblic Partial Differential Equations, *Lecture Notes in Control and Infor. Sci.*, 176, pp 200-217, (1992). Berlin Springer

[17] Pardoux E. and Zhang S.; Generalized BSDEs and nonlinear Neumann boundary value problems, *Probability Theory and Related Fields* 110, , pp. 535-558 (1998)

[18] Peng, S.; Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equation, *Stochastics and Stochastics Reports*, 37, n1-2, 61-74, (1991).