African Diaspora Journal of Mathematics
Volume 10, Number 1, pp. 7–17 (2010)

ISSN 1539-854X
www.african-j-math.org

GROUPES DE TAKIFF GÉNÉRALISÉS ASSOCIÉS A UN GROUPE DE LIE. APPLICATIONS À $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$

AHMED ROUKBI*
Département de Mathématiques, Faculté des sciences,
Université Ibn Tofail, B.P. 14000. Kenitra, MAROC

ALLAL BAKALI†
Département de Mathématiques, Faculté des sciences,
Université Ibn Tofail, B.P. 14000. Kenitra, MAROC

Abstract

Let G be a locally compact Lie group, $\mathcal{G}$ its Lie algebra and n an integer ≥ 1. We build a locally compact Lie group, noted G_n, whose Lie algebra is the generalized Takiff algebra of order n associated with $\mathcal{G}$. We investigate some properties of this group. As application, we show that $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ is the generalized Takiff group of order n associated with $SL_2(\mathbb{R})$, where $\mathbb{R}^{n+1}$ is equiped with an appropriate algebras structure.

AMS Subject Classification: 62G05; 62G20.

Keywords: Groupe et algèbre de Lie, algèbre de Takiff généralisée, groupe unimodulaire réel d'ordre deux.

1 Introduction.

Soient G un groupe de Lie localement compact, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ l'algèbre de Takiff associée à $\mathcal{G}$ (**[3]**). Le crochet de $\mathcal{G}_1$ est défini par

$$[(X_0,X_1),(Y_0,Y_1)] = ([X_0,Y_0],[X_0,Y_1]+[X_1,Y_0]),$$

où $(X_0,X_1),(Y_0,Y_1) \in \mathcal{G}_1$.

Il est bien connu que l'ensemble $G_1 = G \times \mathcal{G}$ muni de la multiplication suivante

$$(g,X)(g',Y) = (gg',Adg'^{-1}(X)+Y)); \;\; (g,X),(g',Y) \in G_1$$

est un groupe de Lie localement compact d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$.

*E-mail address: rroukbi.a2000@gmail.com
†E-mail address: bakaliallal@yahoo.fr

Soit n un entier naturel ≥ 1. L'algèbre de Takiff généralisée d'ordre n associée à $\mathcal{G}$, noté $\mathcal{G}_n$, est l'algèbre de Lie quotient de $\mathcal{G}_\infty = \mathbb{R}[T] \otimes \mathcal{G}$ par l'idial I_n défini par $I_n = \sum_{k \geqslant n+1} T^k \otimes \mathcal{G}$, (**[4]**). Elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^{n+1} \otimes \mathcal{G}$, où $\mathbb{R}^{n+1}$est l'algèbre quotient $\mathbb{R}[T] \diagup (T^n\mathbb{R}[T])$.

Dans cet article, nous construisons un groupe de Lie noté G_n dont l'algèbre de Lie est l'algèbre de Takiff généralisée $\mathcal{G}_n$ d'ordre n associée à $\mathcal{G}$. Nous étudions certaines propriétés de ce groupe que nous appelons d'ailleurs groupe de Takiff généralisé d'ordre n associé à G. Comme applications, nous montrons que $Sl_2(\mathbb{R}^{n+1})$ est le groupe de Takiff généralisé d'ordre n associé à $Sl_2(\mathbb{R})$ (**[8]**, **[9]**,**[10]**), où l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ est muni de sa structure d'algèbre associative commutative unitaire définie par la multiplication suivante

$$(a_0, a_1, ..., a_n)(b_0, b_1, ..., b_n) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, ..., \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}).$$

2 Construction du groupe G_n

Soient G un groupe de Lie localement compact et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, vue comme l'espace tangent à G en l'élément neutre 1. Il existe alors un voisinage V de 0 dans $\mathcal{G}$ et un voisinage U de 1 dans G tels que la restriction de l'application exponentielle $\exp : V \longrightarrow U$ soit un difféomorphisme d'inverse $\log : U \longrightarrow V$. Si deux éléments X et Y de $\mathcal{G}$ sont suffisamment proches de l'origine, la formule de Campbell-Hausdorff donne l'expression de $\log(\exp X \exp Y)$ en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par X et Y. Plus précisement on a (**[2]**,**[7]**)

$$\begin{aligned} \log(\exp X \exp Y) &= X + Y \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m(m+1)} \frac{((adX)^{p_1}(adY)^{q_1}....(adY)^{q_{m-1}}(adX)^{p_m}).Y}{p_1!...p_m!q_1!...q_{m-1}!(q_1 + ... + q_{m-1} + 1)} \end{aligned}$$

où $(p_i, q_i) \neq (0,0)$, pour tout $i = 1, ..., m-1$, et $p_m \neq 0$.

Soient n un entier naturel ≥ 1 et $\mathcal{G}_n$ l'algèbre de Takiff généralisée $\mathcal{G}_n$ d'ordre n associée à $\mathcal{G}$. Sur l'espace vectoriel produit $\mathcal{G} \times ... \times \mathcal{G}$ ($(n+1)$ fois), le crochet

$$[(X_0, X_1, ..., X_n), (Y_0, Y_1, ..., Y_n)] = ([X_0, Y_0], [X_0, Y_1] + [X_1, Y_0], ..., \sum_{i=0}^{n} [X_i, Y_{n-i}])$$

où $(X_0, X_1, ..., X_n), (Y_0, Y_1, ..., Y_n) \in \mathcal{G} \times ... \times \mathcal{G}$, défini une structure d'algèbre de Lie, et l'application ψ_n

$$\begin{aligned} \psi_n \quad : \quad & \mathcal{G}_n = \sum_{i=0}^{n} T^i \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \times ... \times \mathcal{G} \\ & \sum_{i=0}^{n} T^i \otimes X_i \longmapsto (X_0, X_1, ..., X_n) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie. Dans la suite, nous identifions ces deux algèbres de Lie.

Proposition 2.1. *([9]. P: 41). Un élement $X=(X_0,...,X_n)$ de $\mathcal{G}_n$ est nilpotent si et seulement si X_0 est nilpotent dans $\mathcal{G}$.*

Preuve. Supposons que $X=(X_0,...,X_n)\in\mathcal{G}_n$ soit nilpotent. Alors il existe un entier $k\geqslant 1$ tel que $(adX)^k\neq 0$ et $(adX)^{k+1}=0$. Donc $(adX)^{k+1}(Y)=0:\forall Y=(Y_0,Y_1,...,Y_n)\in\mathcal{G}_n$. En particulier pour $Y=(0,...,0,Z)$ où $Z\in\mathcal{G}$, on a $(adX)^{k+1}(0,...,0,Z)=(0,...,0,(adX_0)^{k+1}Z)=(0,...,0):\forall Z\in\mathcal{G}$. Donc X_0 est nilpotent. Réciproquement, soit X_0 nilpotent dans $\mathcal{G}$ et prenons $X=(X_0,...,X_n)$. Comme $(adX)^k=((adX_0)^k,...,*)$, on est ramené à vérifier que $(0,X_1,...,X_n)$ est nilpotent, or

$$\begin{aligned}
ad(0,X_1,...,X_n)(Y_0,Y_1,...,Y_n) &= (0,[X_1Y_0],[X_1,Y_1]+[X_2,Y_0],...,\sum_{i=1}^{n}[X_i,Y_{n-i}])\\
(ad(0,X_1,...,X_n))^2(Y_0,Y_1,...,Y_n) &= (0,0,[X_1,[X_1,Y_0]],[X_1,\\
&\quad [X_1,Y_1]]+[X_1,[X_2Y_0]]+[X_2,[X_1,Y_0]],...,*).
\end{aligned}$$

Ainsi, de proche en proche, on arrive à $(ad(0,X_1,...,X_n))^{n+1}=0$. Donc $(0,X_1,...,X_n)$ est nilpotent. Par suite X est nilpotent.

Proposition 2.2. *([9]. P: 41). Soit n un entier naturel $\geqslant 1$ et $\mathcal{G}_n$ l'algèbre de Takiff généralisée d'ordre n associée à $\mathcal{G}$. Alors*
1) *L'espace vectoriel $\mathcal{G}$ identifié à $\{(X,0,...,0)\in\mathcal{G}_n\}$ est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{G}_n$.*
2) *L'espace vectoriel $\mathcal{H}_n=\{(0,X_1,...,X_n)\in\mathcal{G}_n\}$ est un idéal nilpotent de classe $n+1$ de $\mathcal{G}_n$.*
3) *L'espace vectoriel $\mathcal{G}$ identifié à $\{(0,...,0,X)\in\mathcal{G}_n\}$ est un idéal commutatif de $\mathcal{G}_n$.*
4) *Relativement à la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ dans l'idéal $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{G}_n$ est le produit semi-direct de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}_n$.*

Preuve. Etablissons **2)** Soient $(X_0,...,X_n)\in\mathcal{G}_n$ et $(0,Y_1,...,Y_n)\in\mathcal{H}_n$. Alors

$$[(X_0,...,X_n),(0,Y_1,...,Y_n)]=(0,[X_0,Y_1],...,\sum_{i=0}^{n-1}[X_i,Y_{n-i}]).$$

Donc $\mathcal{H}_n$ est un idéal de $\mathcal{G}_n$. D'aprés la démonstration de proposition 2.1, $\mathcal{H}_n$ est nilpotent de classe $n+1$.
4) L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ opère sur elle même par la représentation adjointe, donc opère sur $\mathcal{H}_n$ par

$$X_0.(X_1,...,X_n)=((adX_0)X_1,...,(adX_0)X_n)$$

où $X_0\in\mathcal{G}$ et $(X_1,...,X_n)\approxeq(0,X_1,...,X_n)\in\mathcal{H}_n$. Sur la somme directe $\mathcal{G}\oplus\mathcal{H}_n$, le crochet est donné par

$$\begin{aligned}
&[X_0+(X_1,...,X_n),Y_0+(Y_1,...,Y_n)]\\
=\ &[X_0,Y_0]+((adX_0)Y_1,...,(adX_0)Y_n)-((adY_0)X_1,...,(adY_0)X_n)+[(X_1,...,X_n),(Y_1,...,Y_n)]\\
=\ &[X_0,Y_0]+([X_0,Y_1],...,[X_0,Y_n])+([X_1,Y_0],...,[X_n,Y_0])+(0,[X_1,Y_1],...,\sum_{i=1}^{n-1}[X_i,Y_{n-i}])]\\
=\ &[X_0,Y_0]+([X_0,Y_1]+[X_1,Y_0],...,[X_0,Y_n]+\sum_{i=1}^{n-1}[X_i,Y_{n-i}]+[X_n,Y_0])\\
=\ &[(X_0,...,X_n),(Y_0,Y_1,...,Y_n)]=\text{ Crochet de Lie de } \mathcal{G}_n\ .
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{G}_n$ est le produit semi-direct de $\mathcal{G}$ par l'idéal $\mathcal{H}_n$, relativement à la représentation adjointe de $\mathcal{G}$.

Remarque 2.3. Pour tout $i = 1,...,n$, notons $\mathcal{H}_i = \{(0,0,...,0,X_{n+1-i},...,X_n) \in \mathcal{G}_n\}$ et $\mathcal{H}_0 = \{(0,0,...,0,) \in \mathcal{G}_n\}$. Nous obtenons ainsi une suite strictement croissante d'idéaux de $\mathcal{G}_n$

$$\mathcal{H}_n \supset \mathcal{H}_{n-1} \supset \mathcal{H}_{n-1} \supset ... \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_0 = \{0\}.$$

De la démonstration de proposition 2.1, découle que l'idéal $\mathcal{H}_i$ est nilpotent de classe de nilpotence $i+1$, pour tout $i = 1,...,n$.

Soit n entier naturel ≥ 1, d'aprés la proposition 2.2, $\mathcal{H}_n$ est une algèbre de Lie nilpotente. L'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathcal{H}_n$ dans $\exp(\mathcal{H}_n)$ (**[2]**, **[7]**). Pour tous $X = (X_1,...,X_n)$ et $Y = (Y_1,...,Y_n) \in \mathcal{H}_n$, la somme

$$X.Y = \log(\exp X \exp Y)$$

est finie, c'est un polynôme en X et Y. Nous notons par H_n l'ensemble $\mathcal{H}_n$ muni de cette multiplication. Rappelons le résultat suivant (**[7]**).

Proposition 2.4. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble H_n muni de la multiplication ci-dessus est un groupe de Lie localement compact, dont l'algèbre de Lie est l'idéal nilpotent $\mathcal{H}_n$ de l'algèbre de Takiff généralisée $\mathcal{G}_n$ d'ordre n associé à $\mathcal{G}$. En particulier H_n est un groupe de Lie nilpotent.*

Exemples 2.5. Dans les exemples qui suivent, nous allons expliciter la multiplication du groupe H_n dans les cas $n \in \{1,2,3,4\}$.

- Pour $n = 1$, $H_1 = \mathcal{G}$ est le groupe additif de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$.
- Pour $n = 2$, $H_2 = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$(X_1,X_2)(Y_1,Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2+\frac{1}{2}[X_1,Y_1]).$$

- Pour $n = 3$, $H_3 = \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$\begin{aligned}(X_1,X_2,X_3)(Y_1,Y_2,Y_3) \quad = \quad & (X_1+Y_1, X_2+Y_2+\frac{1}{2}[X_1,Y_1], \\ & X_3+Y_3+\frac{1}{2}[X_1,Y_2]+\frac{1}{2}[X_2,Y_1] \\ & +\frac{1}{12}[X_1,[X_1,Y_1]]-\frac{1}{12}[Y_1,[X_1,Y_1]]).\end{aligned}$$

- Pour $n = 4$, $H_n = \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$(X_1,X_2,X_3,X_4)(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = (Z_1,Z_2,Z_3,Z_4),$$

avec

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1+Y_1\\
Z_2 &= X_2+Y_2+\frac{1}{2}[X_1,Y_1]\\
Z_3 &= X_3+Y_3+\frac{1}{2}[X_1,Y_2]+\frac{1}{2}[X_2,Y_1]+\frac{1}{12}[X_1,[X_1,Y_1]]\\
&\quad -\frac{1}{12}[Y_1,[X_1,Y_1]])\\
Z_4 &= X_4+Y_4+\frac{1}{2}[X_1,Y_3]+\frac{1}{2}[X_2,Y_2]+\frac{1}{2}[X_3,Y_1]+\frac{1}{12}[X_1,[X_1,Y_2]]\\
&\quad +\frac{1}{12}[X_1,[X_2,Y_1]]+\frac{1}{12}[X_2,[X_1,Y_1]]-\frac{1}{12}.[Y_1,[X_1,Y_2]]\\
&\quad -\frac{1}{12}[Y_1,[X_2,Y_1]]-\frac{1}{12}[Y_2,[X_1,Y_1]]-\frac{1}{24}[X_1,[Y_1,[X_1,Y_1]]],
\end{aligned}$$

où $[,]$ désigne le crochet de Lie de $\mathcal{G}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, le groupe G opère sur H_n par la représentation adjointe de G sur $\mathcal{G}$, plus précisement

$$g.(X_1,...,X_n) = Adg^{-1}(X_1,...,X_n) = (Adg^{-1}X_1,...,Adg^{-1}X_n),$$

où $g \in G$ et $(X_1,...,X_n) \in H_n$. Notons $G_n = G \ltimes H_n$ le groupe de Lie produit semi-direct de H_n par G relativement à l'action définie ci-dessus. Alors, pour tous $(g,X_1,...,X_n),(g',Y_1,...,Y_n) \in G_n$, on a

$$(g,X_1,...,X_n)(g',Y_1,...,Y_n) = (gg',(Adg'^{-1}X_1,...,Adg'^{-1}X_n)(Y_1,...,Y_n)).$$

Définition 2.6. Le groupe G_n est dit de Takiff généralisé d'ordre n associé à G.

Exemples 2.7. Dans les exemples qui suivent, nous allons expliciter la multiplication du groupe G_n dans les cas $n \in \{0,1,2,3,4\}$.
- Pour $n = 0$, $G_0 = G$.
- Pour $n = 1$, $G_1 = G \times \mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$(g,X_1)(g',Y_1) = (gg',Adg'^{-1}(X_1)+Y_1).$$

- Pour $n = 2$, $G_2 = G \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$(g,X_1,X_2)(g',Y_1,Y_2) = (gg',Adg'^{-1}(X_1)+Y_1,Adg'^{-1}(X_2)+Y_2+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]).$$

- Pour $n = 3$, $G_3 = G \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$\begin{aligned}
(g,X_1,X_2,X_3)(g',Y_1,Y_2,Y_3) &= (gg',Adg'^{-1}(X_1)+Y_1,Adg'^{-1}(X_2)+Y_2+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_1),Y_1],\\
&\quad Adg'^{-1}(X_3)+Y_3+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_1),Y_2]+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_2),Y_1]\\
&\quad +\frac{1}{12}[Adg'^{-1}(X_1),[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]]-\frac{1}{12}[Y_1,[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]]).
\end{aligned}$$

• Pour $n=4$, $G_4 = G\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication

$$(g,X_1,X_2,X_3,X_4)(g',Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = (gg',Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)$$

où

$$\begin{array}{rcl}
Z_1 &=& Adg'^{-1}(X_1)+Y_1\\
Z_2 &=& Adg'^{-1}(X_2)+Y_2+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_1),Y_1])\\
Z_3 &=& Adg'^{-1}(X_3)+Y_3+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_1),Y_2]+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_2),Y_1]+\\
&& \frac{1}{12}[Adg'^{-1}(X_1),[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]]-\frac{1}{12}[Y_1,[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]])\\
Z_4 &=& Adg'^{-1}(X_4)+Y_4+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_1),Y_3]+\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_2),Y_2]\\
&& +\frac{1}{2}[Adg'^{-1}(X_3),Y_1]+\frac{1}{12}[Adg'^{-1}(X_1),[Adg'^{-1}(X_1),Y_2]]\\
&& +\frac{1}{12}[Adg'^{-1}(X_1),[Adg'^{-1}(X_2),Y_1]]+\frac{1}{12}[Adg'^{-1}(X_2),[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]]\\
&& -\frac{1}{12}[Y_1,[Adg'^{-1}(X_1),Y_2]]-\frac{1}{12}[Y_1,[Adg'^{-1}(X_2),Y_1]]\\
&& -\frac{1}{12}[Y_2,[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]]-\frac{1}{24}[Adg'^{-1}(X_1),[Y_1,[Adg'^{-1}(X_1),Y_1]]].
\end{array}$$

Le théorème suivant justifié la définition 2.6.

Théorème 2.7. *Pour tout entier $n\geqslant 1$, l'algèbre de Lie du groupe de Takiff généralisé G_n d'ordre n associé à G est l'algèbre de Takiff généralisée $\mathcal{G}_n$ d'ordre n associée à $\mathcal{G}$.*

Preuve. Pour tout entier $n\geqslant 1$, le groupe de Takiff généralisé G_n d'ordre n associé à G est produit semi-direct de H_n par G relativement à la représentation adjointe de G dans $\mathcal{G}$. D'un autre coté, nous savons que l'algèbre de Takiff généralisée $\mathcal{G}_n$ d'ordre n associée à $\mathcal{G}$ est le produit semi-direct de l'idéal $\mathcal{H}_n = Lie(H_n)$ par l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = Lie(G)$ relativement à la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Il en résulte que $\mathcal{G}_n = Lie(G_n)$.

Corollaire 2.8. *Soient G un groupe de Lie et n un entier ≥ 1. Alors G est nilpotent, si et seulement, si G_n est nilpotent.*

Preuve. Découle de la proposition 2.1.

Soient G un groupe de Lie localement compact, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et Δ sa fonction module. Pour tout entier $n\geqslant 1$, nous notons par Δ_n la fonction module de G_n. La proposition suivante permet de constuire une mesure invariante sur le groupe de Takiff généralisé G_n d'ordre n associé à G, et de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe G_n soit unimodulaire.

Proposition 2.9. *Sur le groupe de Takiff généralisé G_n d'ordre n associé à G, la mesure μ définie par*

$$\int_{G_n} f(x)d\mu(x) = \int_G\int\cdots\int_{\mathcal{G}} f(g,X_1,...,X_n)dgdX_1...dX_n,$$

où dg est la mesure de Haar à gauche de G et pour tout $i = 1, \ldots, n$, dX_i est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{G}$, est invariante à gauche et on a $\Delta_n(g, X_1, \ldots, X_n) = \Delta(g)^{(n+1)}$.

En particulier le groupe de Takiff généralisé G_n d'ordre n associé à G est unimodulaire, si et seulement, si le groupe G est unimodulaire.

Preuve. Soit $y = (g', Y_1, \ldots, Y_n) \in G_n$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{G_n} f(yx)d\mu(x) &= \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((g', Y_1, \ldots, Y_n)(g, X_1, \ldots, X_n))dgdX_1 \ldots dX_n \\
&= \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((g'g, Z_1, \ldots, Z_n))dgdX_1 \ldots dX_n
\end{aligned}$$

où, pour tout $i = 1, \ldots, n$, Z_i s'écrit sous la forme

$$Z_i = Ad(g^{-1})Y_i + X_i + T_i : T_i \in \mathcal{G}.$$

En intégrant successivement par rapport à $X_n, \ldots, X_1$ et en faisant les changements de variable $X_i - Ad(g^{-1})Y_i - T_i$, pour $i = n, \ldots, 1$, on obtient

$$\int_{G_n} f(yx)d\mu(x) = \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((g'g, X_1, \ldots, X_n))dgdX_1 \ldots dX_n.$$

La mesure dg est invariante à gauche sur G. Donc

$$\int_{G_n} f(yx)d\mu(x) = \int_{G_n} f(x)d\mu(x)$$

Ainsi la mesure définie ci-dessus est invariante à gauche. De même

$$\begin{aligned}
\int_{G_n} f(xy)d\mu(x) &= \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((g, X_1, \ldots, X_n)(g', Y_1, \ldots, Y_n))dgdX_1 \ldots dX_n \\
&= \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((gg', X_1, \ldots, X_n)) \left| d\hat{e}t(Adg'^{-1}) \right|^n dgdX_1 \ldots dX_n \\
&= \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((g, X_1, \ldots, X_n)) \left| d\hat{e}t(Adg'^{-1}) \right|^{n+1} dgdX_1 \ldots dX_n \\
&= \int_G \int \cdots \int_{\mathcal{G}} f((g, X_1, \ldots, X_n))(\Delta(g'))^{n+1} dgdX_1 \ldots dX_n \\
&= (\Delta(g'))^{n+1} \int_{G_n(\mathcal{G})} f(x)d\mu(x).
\end{aligned}$$

Donc $\Delta_n(g, X_1, \ldots, X_n) = \Delta(g)^{(n+1)}$. Ainsi le groupe G_n est unimodulaire, si et seulement, si le groupe G est unimodulaire.

3 Applications au groupe $SL_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ est muni de sa structure d'algèbre associative commutative unitaire définie par la multiplication

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(b_0, b_1, \ldots, b_n) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots, \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}).$$

où $a=(a_0,a_1,...,a_n)$, $b=(b_0,b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ (**[9]**). Notons $e=(1,0,...,0)$ l'unité de cette algèbre. Soit $SL_2(\mathbb{R})$ le groupe unimodulaire réel d'ordre deux et $sl_2(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie (**[10]**). Notons par

$$SL_2(\mathbb{R}^{n+1})=\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}^{n+1}):ad-bc=e\}.$$

le groupe des matrices carrées d'ordre deux à coefficients dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de dêterminant à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ égal à e, et

$$sl_2(\mathbb{R}^{n+1})=\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}^{n+1}\}$$

l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre deux à coefficients dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de trace nulle, munie de crochet défini par $[X,Y]=XY-YX$, où $X,Y\in sl_2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Une matrice

$$g=\begin{pmatrix} (a_0,...,a_n) & (b_0,...,b_n)\\ (c_0,...,c_n) & (d_0,...,d_n)\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}^{n+1})$$

sera notée $g=(A_0,A_1,...,A_n)$ où, pour tout $i=0,...,n$,

$$A_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}).$$

Nous désignons par $\mathbb{I}_2$ la matrice unité de $M_2(\mathbb{R})$. Avec ces notations, on a la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit n un entier naturel $\geqslant 1$.*
1) *Pour tous $g=(A_0,A_1,...,A_n)$, $g'=(A'_0,A'_1,...,A'_n)\in SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$, on a*

$$gg'=(A_0A'_0,A_0A'_1+A_1A'_0,...,\sum_{k=0}^{i}A_kA'_{i-k},...,\sum_{k=0}^{n}A_kA'_{n-k})$$

2) *Pour tout $g=(A_0,A_1,...,A_n)\in SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$, on a*

$$g^{-1}=(A_0^{-1},-A_0^{-1}A_1A_0^{-1},...,\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\sum_{\substack{i_1+...+i_p=n\\ 1\leqslant i_j\leqslant n}}(A_0^{-1}A_{i_1}A_0^{-1}A_{i_2}A_0^{-1}...A_0^{-1}A_{i_p}A_0^{-1})$$

3) *L'ensemble $\{g=(A_0,0,...,0)\in SL_2(\mathbb{R}^{n+1})\}$ est un sous groupe de $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ isomorphe à $SL_2(\mathbb{R})$.*
4) *L'ensemble $H'_n(sl_2(\mathbb{R}))=\{(\mathbb{I}_2,A_1,...,A_n)\in SL_2(\mathbb{R}^{n+1})\}$ est un sous groupe distingué $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$.*
5) *Le groupe $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ est produit semi-direct de $H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ par $SL_2(\mathbb{R})$.*
6) *L'ensemble $\{(\mathbb{I}_2,0,...,0,A)\in SL_2(\mathbb{R}^{n+1})\}$ est un sous groupe commutatif distingué de $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Preuve. Etablissons **2)**, par récurence sur n. Pour $n=0$, on a $g=A_0\in SL_2(\mathbb{R})$, donc $g^{-1}=A_0^{-1}$. Pour $n=1$, on a $g=(A_0,A_1)\in SL_2(\mathbb{R}^2)$ et $(A_0,A_1)(A_0^{-1},-A_0^{-1}A_1A_0^{-1})=(\mathbb{I}_2,0)$ l'élément neutre de $SL_2(\mathbb{R}^2)$. Supposons que **2)** est vraie pour tout entier $k\leqslant n$, soit $g=(A_0,A_1,...,A_{n+1})\in SL_2(\mathbb{R}^{n+2})$, il existe $g'=(A'_0,A'_1,...,A'_{n+1})\in SL_2(\mathbb{R}^{n+2})$ tel que

$$gg'=(A_0A'_0,A_0A'_1+A_1A'_0,...,\sum_{k=0}^{i}A_kA'_{i-k},...,\sum_{k=0}^{n+1}A_kA'_{n+1-k})=(\mathbb{I}_2,0,....,0)$$

où pour tout $1\leqslant k\leqslant n$,

$$A'_k=\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p}{p}\sum_{\substack{i_1+...i_p=k\\ 1\leqslant i_j\leqslant k}}(A_0^{-1}A_{i_1}A_0^{-1}A_{i_2}A_0^{-1}...A_0^{-1}A_{i_p}A_0^{-1}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}A_kA'_{n+1-k} &= 0\\
&\Longleftrightarrow A_0A'_{n+1}+A_{n+1}A'_0+\sum_{k=1}^{n}A_kA'_{n+1-k}=0\\
&\Longleftrightarrow A'_{n+1}=-A_0'^{-1}A_{n+1}A'_0-A_0'^{-1}\sum_{k=1}^{n}A_kA'_{n+1-k}\\
&\Longleftrightarrow A'_{n+1}=-A_0'^{-1}A_{n+1}A'_0+\\
&\qquad \sum_{k=1}^{n}A_0'^{-1}A_k\sum_{p=1}^{n+1-k}\frac{(-1)^p}{p}\sum_{\substack{i_1+...i_p=n+1-k\\ 1\leqslant i_j\leqslant n+1-k}}(A_0^{-1}A_{i_1}A_0^{-1}A_{i_2}A_0^{-1}...A_0^{-1}A_{i_p}A_0^{-1})\\
&\Longleftrightarrow A'_{n+1}=\sum_{p=1}^{n+1}\frac{(-1)^p}{p}\sum_{\substack{i_1+...i_p=n+1\\ 1\leqslant i_j\leqslant n+1}}(A_0^{-1}A_{i_1}A_0^{-1}A_{i_2}A_0^{-1}...A_0^{-1}A_{i_p}A_0^{-1})
\end{aligned}$$

Donc **2)** est vérifiée pour $n+1$.

5) Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ opère sur $H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ par l'action suivante

$$(A_0,0,...,0).(\mathbb{I}_2,A_1,...,A_n)=(\mathbb{I}_2,A_0^{-1}A_1A_0,...,A_0^{-1}A_nA_0)$$

où $(A_0,0,...,0)\in SL_2(\mathbb{R})$ et $(\mathbb{I}_2,A_1,...,A_n)\in H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$. La loi de groupe produit semi-direct de $H'_n(sl_2(\mathbb{R})$ par $SL_2(\mathbb{R})$ relativement à cette action est donné par

$$\begin{aligned}
&((A_0,0,...,0),(\mathbb{I}_2,A_1,...,A_n))((A'_0,0,...,0),(\mathbb{I}_2,A'_1,...,A'_n))\\
=\ &((A_0A'_0,0,...,0),(A'_0,0,...,0)^{-1}(\mathbb{I}_2,A_1,...,A_n)(A'_0,0,...,0)(\mathbb{I}_2,A'_1,....,A'_n))\\
=\ &((A_0A'_0,0,...,0),((\mathbb{I}_2,A_0'^{-1}A_1A'_0,...,A_0'^{-1}A_nA'_0)(\mathbb{I}_2,A'_1,...,A'_n)))\\
=\ &((A_0A'_0,0,...,0),(\mathbb{I}_2,A'_1+A_0'^{-1}A_1A'_0,...,A'_n+\sum_{k=1}^{n-1}(A_0'^{-1}A_kA'_0A'_{n-k})+A_0'^{-1}A_nA'_0))
\end{aligned}$$

De plus, tout élément $g = (A_0, A_1, ..., A_n) \in SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ s'écrit d'une manière unique comme produit d'un élément de $SL_2(\mathbb{R})$ et d'un élément de $H'_n(sl_2(\mathbb{R})$. Plus précisement

$$(A_0, A_1, ..., A_n) = (A_0, 0, ..., 0)(\mathbb{I}_2, A_0^{-1}A_1, A_0^{-1}A_2, ..., A_0^{-1}A_n).$$

où $(A_0, 0, ..., 0) \in SL_2(\mathbb{R})$ et $(\mathbb{I}_2, A_0^{-1}A_1, A_0^{-1}A_2, ..., A_0^{-1}A_n) \in H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$. Il résulte que $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ coincide avec le produit semi-direct de $H'_n(sl_2(\mathbb{R})$ par $SL_2(\mathbb{R})$. Ce qui termine la preuve de notre proposition.

Le Théorème suivant motive la notion du groupe de Takiff généralisé.

Théorème 3.2. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, les groupes $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ et $G_n(SL_2(\mathbb{R}))$ (groupe de Takiff généralisé d'ordre n associé à $SL_2(\mathbb{R})$) sont isomorphes.*

Preuve. Par définition $G_n(SL_2(\mathbb{R}))$ est produit semi-direct de $H_n(sl_2(\mathbb{R}))$ (le groupe de Lie nilpotent associé à $sl_2(\mathbb{R})$ qui figure dans la proposition 2.3) par $SL_2(\mathbb{R})$ relativement à la représentation adjointe de $SL_2(\mathbb{R})$ dans $sl_2(\mathbb{R})$. D'aprés la proposition 3.1, $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ est produit semi-direct de $H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ par $SL_2(\mathbb{R})$ relativement à la représentation adjointe de $SL_2(\mathbb{R})$ dans $sl_2(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que les groupes Lie $H_n(sl_2(\mathbb{R}))$ et $H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ sont isomorphes.

Notons par $\mathcal{H}'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ l'idéal nilpotent de $sl_2(\mathbb{R}^{n+1})$ formé des éléments de la forme

$$X = \begin{pmatrix} (0, a_1, ..., a_n) & (0, b_1, ..., b_n) \\ (0, c_1, ..., c_n) & (0, -a_1, ..., -a_n) \end{pmatrix}$$

L'application φ de $\mathcal{H}'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ dans $\mathcal{H}_n(sl_2(\mathbb{R}))$ (l'idéal nilpotent de l'algèbre de Takiff gènéralisée $\mathcal{G}_n(sl_2(\mathbb{R}))$ d'ordre n associée à $sl_2(\mathbb{R})$), définie par

$$\varphi(\begin{pmatrix} (0, a_1, ..., a_n) & (0, b_1, ..., b_n) \\ (0, c_1, ..., c_n) & (0, -a_1, ..., -a_n) \end{pmatrix}) \to (\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & -a_n \end{pmatrix})$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie. Comme $Lie(H'_n(sl_2(R))) = \mathcal{H}'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ est une algèbre de Lie nilpotente, il résulte que $H'_n(sl_2(R)) = \exp(\mathcal{H}'_n(sl_2(\mathbb{R})) = H_n(sl_2(R))$.

Remarque 3.3. On peut montrer que les groupes de Lie $H_n(sl_2(\mathbb{R}))$ et $H'_n(sl_2(\mathbb{R}))$ sont isomorphes en utilisont le lemme suivant

Lemme 3.4. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application Ψ_n de $H'_n(sl_2(R))$ dans $H_n(sl_2(R))$ définie par*

$$\Psi_n(\mathbb{I}_2, A_1, ..., A_n) = (\mathbb{I}_2, B_1, ..., B_n),$$

où, pour tout $p = 1, ..., n$

$$B_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i_1+...+i_k=p} (A_{i_1}...A_{i_k})$$

avec $1 \leq i_j \leq p : \forall j = 1, ..., k$, et l'application Φ_n de $H_n(sl_2(R))$ dans $H'_n(sl_2(R))$ définie par

$$\Psi_n(\mathbb{I}_2, C_1, ..., C_n) = (\mathbb{I}_2, D_1, ..., D_n),$$

où, pour tout $p = 1, ..., n$

$$D_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \sum_{i_1+...+i_k=p} (C_{i_1} ... C_{i_k})$$

avec $1 \leq i_j \leq p : \forall j = 1, ..., k$, sont des isomorphismes de groupes de Lie inverse l'un de l'autre.

Corollaire 3.5. *L'algèbre de Lie du groupe $SL_2(\mathbb{R}^{n+1})$ est exactement $sl_2(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Preuve. L'application φ de $sl_2(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $\mathcal{G}_n(sl_2(\mathbb{R}))$, définie par

$$\varphi(\begin{pmatrix} (a_0,...,a_n) & (b_0,...,b_n) \\ (c_0,...,c_n) & (-a_0,...,-a_n) \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & -a_0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & -a_n \end{pmatrix})$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

References

[1] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 2. Gauthier-Villars, Paris 1975.

[2] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 4. Gauthier-Villars, Paris 1976.

[3] F. Geoffriau, Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Takiff, Ann. Math. Blaise Pascal, t.**1**, n^{0}2, (1994), p. 15-31.

[4] F. Geoffriau, Homomorphisme de Harish-Chandra pour les algèbres de Takiff généralisées. J. of algebra, **171**, (1995), p. 444-456.

[5] N. Jacobson, Basic algebra I, W. II. Freeman and company, San Francisco, 1974.

[6] D. Popovici, Orthogonal décomposition in Hilbert C^*-modules and stationary processes. Acta. Math. Univ. Comenianie. Vol : LXVII. **2**, (1998), p. 217.230.

[7] M. Rais, Groupes nilpotents et méthodes des orbites, Analyse Harmonique, les cours du CIMPA, Université de Nancy I, 1980.

[8] A. Roukbi, A. Bakali et M. Akkouchi, Structures d'algèbres associatives unitaires sur $\mathbb{R}^n$ et applications. Math-Recherche et Applications. Vol.6, (2004), p.15-36.

[9] A. Roukbi, Groupes et algèbres de Lie classiques à coefficients dans une algèbre. Thèse de doctorat . Université Ibn Tofail, Kenetra, Maroc, 2005.

[10] R. Takahachi, $SL_2(\mathbb{R})$, Analyse Harmonique, les cours du CIMPA, Université de Nancy I, 1980.

[11] P. Tauvel, Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre 2, Masson, Paris, 1992.