J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
36 (1992) 747-764

SUPPRESSION LAGRANGIENNE DE POINTS DOUBLES ET RIGIDITÉ SYMPLECTIQUE

FRANÇOIS LALONDE

1. Introduction

Les théories de l'intersection lagrangienne et des plongements lagrangiens ne jouissent pas, au contraire des immersions, de la flexibilité due au h-principe. Cette rigidité explique les difficultés qu'on y rencontre: il n'existe pas d'équivalent lagrangien (ou lagrangien exact) de la théorie classique de suppression des points doubles. Le but de cet article est d'examiner les hypothèses sous lesquelles la théorie classique se généralise aux immersions lagrangiennes, en distingant les conditions topologiques et symplectiques.

Examinons d'abord les conditions topologiques. La théorie classique se résume en ceci: on peut supprimer par homotopie régulière une paire de points doubles p_1, p_2 d'une immersion $i\colon V \to \mathbb{R}^{2n}$ (V de dimension n, orientable ou non; $n > 2$, pair ou impair) exactement quand il existe un lacet orienté C dans $i(V)$ de coins p_1 et p_2 dont l'image par l'application de Gauss (après régularisation aux coins) est un générateur de $\pi_1(G(n, n))$. Comme $\pi_1(G(n, n)) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$, ceci ne dépend en fait que des signes de p_1 et p_2 relativement à C (c'est une *courbe de Whitney* quand ces signes sont différents) et on trouve la caractérisation de Whitney pour la suppression des points doubles donnée en termes du nombre algébrique de points doubles [10].

La situation est, de ce point de vue, similaire mais plus riche pour les immersions lagrangiennes, puisque l'indice de Maslov d'un lacet orienté C de coins p_1, p_2 prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ (le cas lagrangien diffère nettement du cas totalement réel dont la grassmannienne est homotopiquement équivalente à $\Lambda(n)$ mais où il n'existe pas de définition invariante de l'indice d'une courbe de Whitney). Les courbes de Whitney sont ici exactement celles pour lesquelles l'indice de Maslov est impair; la partie topologique des conditions suffisantes pour la suppression

Received January 22, 1991 and, in revised form, October 9, 1991. Recherches soutenues par les subventions CRSNG OGP0092913 et FCAR EQ3518.

lagrangienne de la paire p_1, p_2 est l'existence d'une courbe de Whitney d'indice de Maslov égal à 1.

Voyons les conditions de nature symplectique. Il y en a deux: la première est semi-locale, comme l'est la condition topologique, c'est-à-dire relative à (un prolongement d')une courbe de Whitney. Soit C une courbe de Whitney orientée d'indice 1 et d'aire symplectique strictement positive. Prolongeons C en une courbe C' qui soit l'image par l'immersion i d'un lacet lisse orienté de L, et tel que C' se décompose en trois lacets $C_1 \cup C \cup C_2$ où C_i ne contient pas d'autre point double que p_i. C'est un *prolongement de Whitney* si les aires de C_1 et C_2 sont négatives et si $-(a(C_1) + a(C_2)) > a(C)$, c'est-à-dire $a(C') < 0$. Ces conditions permettent de supprimer la paire de points doubles le long d'un disque de Whitney positif (holomorphe après composition avec un difféomorphisme symplectique ambiant) sans faire apparaître de nouveaux points doubles dans un voisinage tubulaire suffisamment petit du disque. Le contrôle suffisant pour empêcher la création de nouveaux points doubles hors de ce voisinage tubulaire s'exprime par une mesure de capacité, la *capacité lagrangienne* C_L définie au §2. On obtient alors le théorème suivant, qui est un inverse partiel aux obstructions connues pour les plongements lagrangiens:

Théorème 1. *Soit p_1, p_2 une paire de points doubles transverses d'une immersion lagrangienne $i: L^n \to \mathbb{C}^n$ $(n > 2)$ qu'on suppose de signes opposés si L est orientable de dimension paire. Il existe une homotopie régulière lagrangienne qui supprime la paire de points doubles p_1, p_2 (sans faire apparaître de nouveaux points doubles) si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

(1) *il existe une courbe $\gamma_0 \in H_1(L; \mathbb{Z})$ pour laquelle $\mu_0 = \mu(\gamma_0) = 2$ et $a_0 = \int_{\gamma_0} \lambda > 0$, où μ est la classe de Maslov et $\lambda = -y \cdot dx$ la forme de Liouville $(\omega = d\lambda)$;*

(2) *il existe pour la paire de points doubles p_1, p_2, une courbe de Whitney α d'aire a_α et d'indice de Maslov μ_α satisfaisant à:*

$$a_\alpha - \left(\frac{\mu_\alpha - 1}{2}\right) a_0 > 0;$$

(3) $C_L(p_1, p_2) > 1$.

Les deux premières conditions du théorème assurent l'existence d'une courbe de Whitney d'indice 1 admettant un prolongement de Whitney. Remarquons qu'il se pourrait bien, à priori, que les obstructions de M. Gromov et C. Viterbo (voir §2), lorsqu'elles sont l'une ou l'autre vérifiées sur une classe d'homotopie régulière lagrangienne, se traduisent toujours par l'impossibilité de trouver une courbe de Whitney d'indice 1 admettant un prolongement de Whitney. On montre qu'il n'en est rien:

Théorème 2. *La condition sur* $C_L(p_1, p_2)$ *est rigide: il existe des paires de points doubles admettant une courbe de Whitney d'indice* 1 *ainsi qu'un prolongement de Whitney, pour lesquelles* $0 < C_L(p_1, p_2) < 1$.

§3 est consacré à l'étude des variétés les plus élémentaires pour lesquelles l'existence de plongements lagrangiens n'est pas connue: ce sont les bouteilles de Klein K^n obtenues de $[0, 1] \times S^{n-1}$ par identification des bords par une réflexion. On montre d'abord la proposition suivante, généralisation d'un résultat de [6]:

Proposition 1. *Soit* V^n *une variété admettant une métrique à courbure non-positive, telle que Diff* V *agit transitivement sur les classes primitives de* $H^1(V; \mathbb{Z})$. *Supposons qu'il existe un plongement lagrangien* $j: V \to T^*V$ *de classe de Maslov non nulle et un entier positif* m *tels que* $m\mu(j) \in (\pi \circ j)^*(H^1(V; \mathbb{Z}))$, *où* $\pi: T^*V \to V$ *est la projection. Il n'existe alors aucun plongement lagrangien de* V *dans* $\mathbb{C}^n$.

Appelons *noeud de Maslov* tout plongement lagrangien exact d'une variété fermée M dans T^*M dont la classe de Maslov est non nulle. On obtient l'alternative suivante:

Corollaire 1. *Soit* V^n *un espace homogène* (*plus généralement un double quotient* $K_1 \backslash G / K_2$) *admettant une métrique à courbure non positive, tel que Diff* V *agit transitivement sur les classes primitives de* $H^1(V; \mathbb{Z})$ (*la bouteille de Klein* K^2 *par exemple*). *S'il existe un noeud de Maslov dans* T^*V, V *ne se plonge pas lagrangiennement dans* $\mathbb{C}^n$.

En se servant de la chirurgie lagrangienne d'indice 1 introduite dans [6] et développée par Polterovich [7], de la classification de Audin-Viterbo ([2], [9]) des plongements lagrangiens du tore T^2, et d'une construction analogue à celle que nécessite la Proposition 1, on montre:

Théorème 3. (a) *Pour tout* n *impair,* K^n *admet un plongement lagrangien dans* $\mathbb{C}^n$.

(b) *Pour tout* n *pair, il existe une immersion lagrangienne* $j_n: K^n \to \mathbb{C}^n$ *de classe de Maslov égale à* 1 (*l'unique générateur à signe près de* $H^1(K^n; \mathbb{Z})$) *avec une seule paire de points doubles qui satisfait aux conditions* (1) *et* (2) *du Théorème* 1.

(c) *Si un plongement lagrangien de* K^2 *dans* $\mathbb{C}^2$ *existe, il s'obtient, à difféomorphisme près à la source, par suppression régulière lagrangienne de la paire de points doubles de l'immersion* j_2.

Finalement, un lemme général de lissage lagrangien permet de décrire une opération inverse de la chirurgie d'indice 1. Ceci donne lieu à une dernière propriété contraignante de tout plongement éventuel de la bouteille de Klein K^2 :

Proposition 2. *Soit* $K^2 \to \mathbb{C}^2$ *un plongement lagrangien, soit* γ *un lacet simple de* K^2 *avec* $[\gamma] \in \mathrm{Tor}(H_1(K^2; \mathbb{Z}))$, *et soit* $P \subset \mathbb{C}^2$ *n'importe quelle surface complète et lagrangienne, difféomorphe à un plan, contenant* γ. *Alors* K^2 *coupe* P *non seulement en* γ, *mais également en chacune des deux composantes de* $P \backslash \gamma$.

2. Un inverse partiel aux conditions nécessaires pour les plongements lagrangiens dans $\mathbb{C}^n$

Soit L^n une variété fermée admettant des immersions lagrangiennes dans $\mathbb{C}^n$. Selon le *h*-principle [5], ceci est possible si et seulement si le complexifié du fibré tangent de L est trivialisable, et dans ce cas l'espace des immersions lagrangiennes $\mathrm{LagImm}(L, \mathbb{C}^n)$ est faiblement homotope à l'espace des $U(n)$-trivialisations de $T_*L \otimes \mathbb{C}$, c'est-à-dire à $C^0(L, U(n))$ quand une trivialisation de base est fixée. Les classes d'homotopie régulière lagrangienne sont donc en bijection avec $[L, U(n)]$, et un problème important est de savoir si une classe donnée contient un plongement lagrangien (et de savoir le construire) à la seule lecture de l'élément correspondant de $[L, U(n)]$. La projection $U(n) \to \Lambda(n)$ applique $[L, U(n)]$ sur $[L, \Lambda(n)]$: pour $n = 2$, comme les surfaces à l'exception de la sphère sont des $K(\pi, 1)$ et que $U(n) \to \Lambda(n)$ induit un isomorphisme $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ au niveau du π_1, les classes d'homotopie régulière lagrangienne sont complètement déterminées par les classes de Maslov. Pour le tore T^2, qui est le seul cas non trivial bien résolu, les classes contenant des plongements lagrangiens sont, selon la classification de Audin-Viterbo ([2], [9]), exactement celles pour lesquelles il existe une base de $H^1(T^2; \mathbb{Z})$ dans laquelle la classe de Maslov est $(2, 0)$.

Dans le cas de dimension quelconque, les conditions nécessaires connues à l'existence de plongements lagrangiens $L \to \mathbb{C}^n$ (dans une classe d'homotopie régulière lagrangienne donnée) sont (i) la nullité du nombre algébrique de points doubles de l'immersion lagrangienne qui en dimension paire (et dans un grand nombre de cas particuliers en dimension impaire) ne dépend que de L et non de la classe particulière d'homotopie régulière [2], (ii) la non-nullité de la forme de Liouville $[\lambda] \in H^1(L; \mathbb{R})$ et donc de $H^1(L; \mathbb{R})$ [4], et (iii) une borne sur la classe de Maslov de tout plongement lagrangien d'une variété admettant une métrique à courbure non positive: il existe une classe $\gamma \in H_1(L; \mathbb{Z})$ pour laquelle $1 \leq \mu(\gamma) \leq n + 1$ et par conséquent μ ne peut être un multiple arbitrairement grand d'une classe primitive de $H^1(L;\mathbb{Z})$ [9]. On va montrer qu'il existe un inverse partiel à ces trois conditions (Théorème 1): si une immersion lagrangienne satisfait à des conditions similaires à ces trois conditions, elle est lagrangiennement régulièrement homotope à un plongement lagrangien dés qu'une quatrième condition, dépendant d'une mesure de capacité, est satisfaite.

Soient p_1 et p_2 une paire de points doubles tranverse d'une immersion lagrangienne $L^n \xrightarrow{i} \mathbb{C}^n$, $n > 2$, et C un lacet simple orienté de $\mathbb{C}^n$ composé de deux morceaux, l'un joignant p_1 à p_2 dans $i(L)$, l'autre p_2 à p_1 dans $i(L)$ de sorte que les "extrémités" de C approchent chaque point p_i sur des branches différentes de l'immersion en ce point. La courbe est supposée lisse hors de p_1 et p_2, et ne rencontre aucun autre point double. On dit que la courbe C est *de Whitney* si, lorsqu'on se donne une orientation quelconque de chacun des deux plans tangents P_1, P_1' à $i(L)$ en p_1 et un ordre quelconque (P_1, P_1'), la courbe transporte (P_1, P_1') sur une paire (P_2, P_2') de plans tangents orientés en p_2 donnant à p_2 un signe contraire à celui donné à p_1 par (P_1, P_1'). Il est évident que dans le cas où L est orientable de dimension paire, une courbe de Whitney existe exactement quand les signes des points doubles sont opposés, et qu'une telle courbe existe toujours dans tous les autres cas.

Indice de Maslov d'une courbe de Whitney. Soit C une courbe de Whitney orientée de $L' = i(L)$, d'extrémités $p_1, p_2 \in \mathbb{C}^n$. On définit d'abord la *différence* $\Delta(P_1, P_2; P)$ [3]: si P_1 et P_2 sont deux plans lagrangiens de $\mathbb{C}^n$ transverses à P, $\Delta(P_1, P_2; P)$ est l'unique chemin, à homotopie près, menant de P_1 à P_2 dans la cellule convexe de $\Lambda(n)$ des plans transverses à P. Si C_1 est la portion de C joignant p_1 à p_2 suivant l'orientation de C et si C_2 est la portion joignant p_2 à p_1 respectant l'orientation, on définit *l'indice de Maslov* de C par:

$$\begin{aligned}\mu(C) = \mu_U[&\Delta(C_2(p_1)^\perp, C_1(p_1), C_2(p_1)) \circ G(C_2)^\perp \\ &\circ \Delta(C_1(p_2), C_2(p_2)^\perp; C_2(p_2)) \circ G(C_1)],\end{aligned}$$

où G est l'application de Gauss à valeurs dans $\Lambda(n)$, $C_i(p_j)$ est le plan tangent à L' en p_j auquel C_i est tangent, $P^\perp$ désigne le plan lagrangien orthogonal à P, et μ_U est la classe de Maslov $H_1(\Lambda(n);\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. Bien qu'elle fasse emploi de la métrique par commodité, cette définition est symplectiquement invariante (voir également la définition de Viterbo dans [8]).

Il existe une seconde façon de définir $\mu(C)$ en associant à L' une sous-variété lagrangienne plongée de $\mathbb{C}^n$. Cette définition s'appuie sur une chirurgie lagrangienne d'indice 1 dont nous aurons besoin plus loin. [1] Il est connu qu'on peut réaliser toutes les chirurgies dans la classe des immersions lagrangiennes [1]. Les chirurgies d'indice de Morse 1 peuvent être réalisées par des plongements lagrangiens ([6], [7]): le modèle local est donné par l'anse lagrangienne A reliant, dans $T^*\mathbb{R}^n$, le n-plan $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ au n-plan $\langle y_1, \cdots, y_n\rangle$ qu'on obtient comme graphe de la différentielle de $f(x) = \frac{1}{2}\log(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ au-dessus de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Comme $\mathrm{gr}(df)$ est exact, il n'y a pas d'obstruction à lisser sur les asymptotes de manière à ce que l'anse coïncide avec $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \cup \langle y_1, \cdots, y_n\rangle$ hors d'un voisinage compact arbitrairement petit contenant l'origine. Soit maintenant $P_1 \neq P_2$ deux plans lagrangiens de $\mathbb{C}^n$, et φ un symplectomorphisme linéaire appliquant $\{P_1, P_2\}$ sur $\{\langle x_i\rangle, \langle y_i\rangle\}$. Il est facile de voir en utilisant la proposition qui suit que les anses $\varphi^{-1}(A)$, lorsque φ parcourt $\mathrm{Sp}(n)$, se répartissent en deux classes d'homotopie régulière lagrangienne (à asymptotes fixées) suivant que φ applique P_1, P_2 sur $\langle x_i\rangle$, $\langle y_i\rangle$ ou sur $\langle y_i\rangle$, $\langle x_i\rangle$. Désignons par $\mathscr{A}(P_1, P_2)$ et $\mathscr{A}(P_2, P_1)$ les classes correspondant à $(\varphi(P_1), \varphi(P_2)) = (\langle x_i\rangle, \langle y_i\rangle)$ et $(\varphi(P_2), \varphi(P_1)) = (\langle x_i\rangle, \langle y_i\rangle)$, et par $A(P_i, P_j)$ un représentant quelconque d'une classe. Si P_1 et P_2 sont orientés, l'anse $A(P_1, P_2)$ respecte les orientations exactement quand l'orientation induite par (P_1, P_2) est l'inverse de l'orientation $\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n\rangle$ de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$. Cette construction se généralise à toute intersection transverse de sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique; on remarquera, en particulier, que si p est un point double d'une immersion lagrangienne orientée L' de $T^*\mathbb{R}^n$, n pair, les deux chirurgies remplacent un voisinage arbitrairement petit de p par une anse lagrangienne plongée et elles respectent l'orientation de L' si et seulement si le signe du point double est négatif; quand n est impair, les deux chirurgies opèrent de façon opposée sur les orientations: l'une des deux chirurgies respecte l'orientation de L' et l'autre chirurgie inverse l'orientation de L'.

La proposition suivante est due à L. Polterovich [7, Proposition 8]:

Proposition. *Soient P_1 et P_2 deux plans lagrangiens de $\mathbb{C}^n$ se coupant transversalement. La différence d'indice de Maslov le long des anses $\mathscr{A}(P_1, P_2)$ et $\mathscr{A}(P_2, P_1)$ est égale à $n - 2$. Plus précisément: il est clair que $\mathscr{A}(P_1, P_2)$ détermine un unique chemin $\sigma(P_1, P_2)$, à homotopie*

[1] J'ai reçu après la rédaction de cet article le preprint [7] de L. Polterovich qui généralise la chirurgie lagrangienne introduite dans [6]. J'ai trouvé pour les besoins du présent article une petite partie des résultats de [7]: la présentation qu'on donne ici est donc légèrement différente de celle de Polterovich. On réfère le lecteur à [7] pour un traitement complet.

à bouts fixés près, joignant P_1 *à* P_2 *dans* $\Lambda(n)$: *l'indice de Maslov de* $\sigma(P_2, P_1) \circ \sigma(P_1, P_2)$ *est* $n-2$.

Soit maintenant C une courbe de Whitney orientée de L' d'extrémités p_1 et p_2, avec P_1 et P_2 les plans tangents en p_1 à L' où P_1 est le plan sur lequel la courbe entre et P_2 celui sur lequel la courbe sort; définissons Q_1 et Q_2 de la même façon en p_2. Soit $\widetilde{C}$ la courbe obtenue de C par chirurgie $A(P_1, P_2)$ en p_1 et $A(Q_1, Q_2)$ en p_2. On définit l'indice de Maslov de la courbe de Whitney C par $\mu(C) = \mu(\widetilde{C}) - (n-2)$; la proposition précédente montre qu'on a bien

$$\begin{aligned}\mu(-C) &= \mu((-C)^{\sim}) - (n-2) = (-\mu(\widetilde{C}) + 2(n-2)) - (n-2)\\ &= -\mu(\widetilde{C}) + (n-2) = -\mu(C).\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette définition coïncide avec la première.

Démonstration du Théorème 1. Voici d'abord l'idée de la démonstration. Les conditions (1) et (2) du théorème assurent l'existence d'une courbe de Whitney C d'indice 1 et d'aire positive admettant un prolongement de Whitney $C' = C_1 \cup C \cup C_2$. A difféomorphisme symplectique ambiant près, C' est une courbe standard de $\mathbb{C}^1$ (Figure 1) bordant un domaine $D \subset \mathbb{C}^1$. Le fait que D soit holomorphe et que la sous-variété immergée L' soit lagrangienne entraîne que L' est partout transverse (en

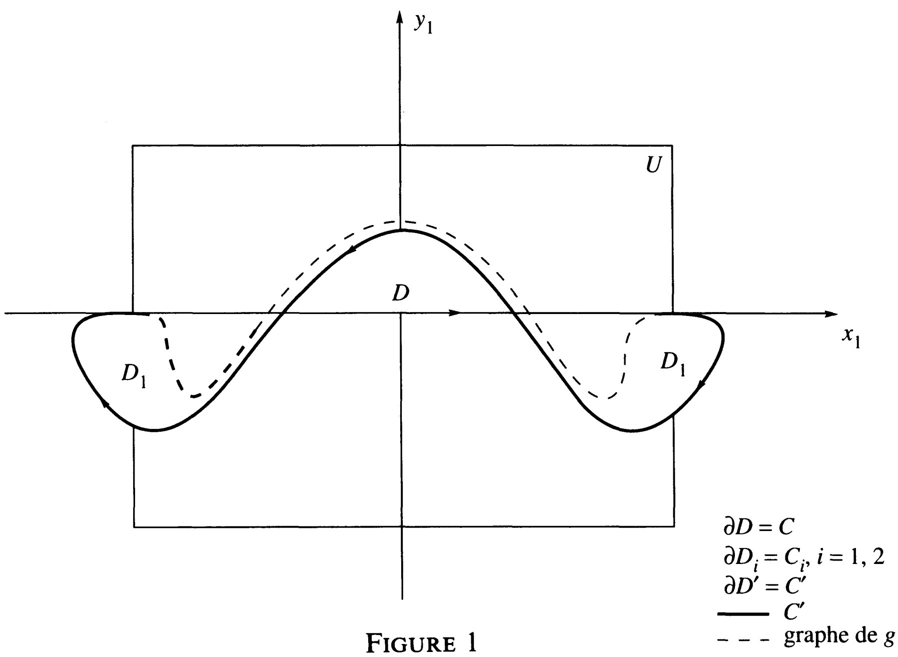

FIGURE 1

fait orthogonal) au domaine D. Celui-ci est donc un disque de Whitney. La condition sur l'indice de Maslov de C $(\mu(C) = 1)$ est équivalente à ce que l'indice de Maslov le long de C du $(n-1)$-plan lagrangien tangent à L' et transverse à D soit nul. Ceci permet de construire un hamiltonien (indépendant du temps) sur $\mathbb{C}^n$ dont le flot au temps 1 fixe D et rectifie le germe de L' le long de C. Le rapport $\rho/\text{aire}(C)$, où ρ est le rayon transverse maximal sur lequel cette rectification peut être réalisée, est la valeur de la capacité lagrangienne (cette valeur est en fait définie au moyen de plongements symplectiques de domaines semblables à des polydisques). Lorsque cette valeur est supérieure à 1, on montre qu'il est possible de supprimer la paire p_1, p_2 par homotopie régulière lagrangienne en déplaçant l'une des branches de l'immersion le long d'un flot hamiltonien bien choisi.

On démontre le théorème en deux étapes.

(1) Comme α est une courbe de Whitney, μ_α est impair. La somme $C = \alpha - ((\mu_\alpha - 1)/2)\gamma_0$ est alors une courbe de Whitney d'indice de Maslov $\mu_C = 1$ par la condition (1), et d'aire symplectique $a_C = a_\alpha - ((\mu_\alpha - 1)/2)a_0 > 0$ par la condition (2). Soit C_i $(i = 1, 2)$ une courbe fermée orientée de $i(L)$ contenant p_i, lisse partout sauf en p_i, ne contenant aucun autre point double et telle que la courbe $C' = C_1 \cup C \cup C_2$ soit l'image par i d'une courbe lisse simple, fermée et orientée de L. C'est un *prolongement de Whitney* de C si $a_{C_i} < 0$ $(i = 1, 2)$ et $a_{C_1} + a_C + a_{C_2} < 0$. Comme il existe par hypothèse une courbe γ_0 d'aire symplectique non nulle, il est clair qu'un prolongement de Whitney de C existe en ajoutant au besoin à C_i un multiple entier de γ_0. Ainsi les conditions (1) et (2) du théorème assurent que l'espace $\mathscr{C}(p_1, p_2)$ de tels triplets $C' = C_1 \cup C \cup C_2$, qu'on appellera *triplets* (*symplectiques*) *de Whitney*, n'est pas vide.

Soit $C' = C_1 \cup C \cup C_2 \in \mathscr{C}(p_1, p_2)$ et soit φ un difféomorphisme hamiltonien appliquant C' sur la courbe standard (Figure 1) de $\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^n$ avec les aires de D_1, D, et D_2 égales à $-a_{C_1}$, a_C, et $-a_{C_2}$. On peut construire φ de la manière suivante par exemple: soit $\Psi\colon C' \to \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^n$ un plongement ordinaire appliquant C' sur la courbe standard de $\mathbb{C}^1$ et respectant les aires symplectiques, et soit Ψ_t, $0 \leq t \leq 1$, une isotopie ordinaire de C' avec $\Psi_0 = \text{id}$ et $\Psi_1 = \Psi$, que l'on perturbe en chaque temps $t \in (0, 1)$ par une broderie arbitrairement C^0-petite de manière à ce que les aires de $\Psi_t(C)$ et de $\Psi_t(C_i)$, $i = 1, 2$, demeurent constantes au cours du temps. C'est alors une isotopie hamiltonienne qui se prolonge, par le théorème d'extension des isotopies hamiltoniennes, à une difféotopie hamiltonienne φ_t. On pose $\varphi = \varphi_1$. Comme tout ce qui suit dans cette preuve est invariant par composition avec un difféomorphisme symplectique ambiant, notons encore L' l'immersion $\varphi \circ i(L)$ et $C' = C_1 \cup C \cup C_2$ le triplet obtenu après image par φ. Puisque $n > 2$, on peut supposer que $L' \cap \mathbb{C}^1 = C'$ en perturbant L' au besoin. Comme $D' = D_1 \cup D \cup D_2$ est holomorphe et L' lagrangien, $T_z L'$ est orthogonal à D' en tout point $z \in C'$: ainsi $-C_1$, C, et $-C_2$ bordent des disques holomorphes qui sont des disques de Whitney. Si $P(z)$ dénote le $(n-1)$-espace de $T_z L'$ orthogonal au vecteur v_z tangent à la courbe C' en z, on peut définir la classe de Maslov $\mu(P)$ de $P(z)$ le long de C: la condition $\mu_C = 1$ est équivalente à $\mu(P) = 0$. Or on voit sans difficulté que la parité de $\mu(P)$ est équivalente à l'existence d'un repère symplectique continu $\mathscr{B}$ défini sur C avec les propriétés suivantes:

(i) $\mathscr{B} = (w_1, w_2, \cdots, w_{2n})$ avec $w_1 = e_{x_1}$, $w_2 = e_{y_1}$, et $(w_3, w_4, \cdots, w_{2n})$ une base symplectique de $\{z\} \times \mathbb{C}^{n-1}$;

(ii) $w_3, w_5, \cdots, w_{2n-1}$ sont tangents à $P_1(z)$, où $P_1(z)$ est le $(n-1)$-plan $P(z)$ choisi sur la branche de l'immersion le long de la courbe $C^1 = C \cap \langle x_1 \rangle$; $(w_4, w_6, \cdots, w_{2n})$ sont tangents à $P_2(z)$, où $P_2(z)$ est choisi sur la branche le long de $C^2 = C \backslash C^1$.

On peut bien sûr étendre $\mathscr{B}$ à $C' \cap U$ où U est un voisinage rectangulaire ouvert de D dans le plan z_1, avec la propriété: $\operatorname{aire}(U \cap D_1) + \operatorname{aire}(U \cap D_2) > \operatorname{aire}(D)$.

Recollement de difféomorphismes hamiltoniens le long d'un disque holomorphe. Le caractère Whitney de la courbe C est équivalent à la parité de $\mu(P_z)$ le long de C, et comme on vient de le voir équivalent à l'existence d'un repère symplectique $\mathscr{B}(z)$ le long de C avec les propriétés (i) et (ii). La nullité de $\mu(P_z)$ le long de C permet d'obtenir davantage.

Soit $\mathscr{H}_n$ l'espace des hamiltoniens H indépendants du temps sur $\mathbb{C}^n$ tels que $H(0) = dH(0) = 0$ et soit $\Delta\colon \mathscr{H}_n \to \operatorname{Sympl}(\mathbb{C}^n)$ l'application associant à H le difféomorphisme hamiltonien induit, au temps $t = 1$, par le flot du gradient symplectique de H. La projection Δ: $\mathscr{H}'_n (= \Delta^{-1}(\operatorname{Sp}(n))) \to \operatorname{Sp}(n)$ est un revêtement au-dessus de $\operatorname{Sp}(n)$.

Identifions le repère $\mathscr{B}(z)$ avec l'isomorphisme symplectique de $\mathbb{C}^{n-1}$ qu'il détermine de la façon évidente:

$$\mathscr{B}(z)(w_{2i}(z)) = e_{y_i} \quad \text{et} \quad \mathscr{B}(z)(w_{2i-1}(z)) = e_{x_i} (i \geq 2),$$

et notons encore $\mathscr{B} \in \pi_1(\operatorname{Sp}(n-1))$ la classe d'homotopie du lacet $\mathscr{B}: C \to \operatorname{Sp}(n-1)$. Alors l'action de $\mathscr{B}$ par monodromie sur $\mathscr{H}'_{n-1} \to \operatorname{Sp}(n-1)$ est triviale exactement quand $\mu(P_z) = 0$ le long de C. On peut donc relever $\mathscr{B}$ en une application continue sur C (et donc sur $(C' \cap U)$),

$z \mapsto f_z \in \mathscr{H}'_{n-1}$, qu'on peut bien entendu étendre au plan z_1. Soit $f\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{R}$ l'application $f(z, \cdot) = f_z$. Alors le difféomorphisme hamiltonien Φ induit par le gradient symplectique de f au temps $t = 1$:

(a) fixe le plan z_1 puisque $f|_{\mathbb{C}\times\{0\}} \equiv 0$ et $f|_{\{z\}\times\mathbb{C}^{n-1}} = f_z$ a un gradient symplectique nul en 0, et

(b) applique le plan tangent à L' en $z \in C^1$ sur $\langle v_z, x_2, \cdots, x_n\rangle$ et le plan tangent à L' en $z \in C^2$ sur $\langle v_z, y_2, \cdots, y_n\rangle$. En effet, z est un point fixe de Φ et $d\Phi(z)$ ne dépend que du 2-jet de f au point critique z. Comme $f|_{\mathbb{C}\times\{0\}} = 0 = (df)|_{\mathbb{C}\times\{0\}}$, la matrice hessienne est nulle hors du bloc diagonal $\langle z_2, \cdots, z_n\rangle \times \langle z_2, \cdots, z_n\rangle$. Le $(2n-2)$-espace $\langle z_2, \cdots, z_n\rangle$ est alors invariant sous l'action de $d\Phi(z)$: celle-ci coïncide donc avec l'action de la matrice $\mathscr{B}(z)$.

A difféomorphisme symplectique ambiant près et après lissage lagrangien exact, L' coïncide avec $\langle v_z, x_2, \cdots, x_n\rangle$ sur un voisinage de C^1 de rayon ε et avec $\langle v_z, y_2, \cdots, y_n\rangle$ sur un voisinage de C^2 de même rayon. En prenant ε suffisamment petit, on a:

$$L'\cap T_\varepsilon(V) = \overline{C}^1\times(\langle x_2, \cdots, x_n\rangle\cap B_\varepsilon(n-1))\cup\overline{C}^2\times(\langle y_2, \cdots, y_n\rangle\cap B_\varepsilon(n-1)),$$

où $\overline{C}^1 = \langle x_1\rangle \cap U$, $\overline{C}^2 = (C' \cap U)\backslash\overline{C}^1$, et $T_\varepsilon(V) = V \times B_\varepsilon(2n-2)$ est le voisinage tubulaire de rayon ε de $V = U \cap D'$.

Capacité lagrangienne. (2) Ce qu'on vient de faire en (1) montre ceci: soit $C' = C_1 \cup C \cup C_2$ un triplet de Whitney de l'immersion $i\colon L \to \mathbb{R}^{2n}$ et $D = D_1 \cup D \cup D_2$ son modèle standard dans $\mathbb{C}^1$, et fixons U un voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^1$ ayant la propriété $\operatorname{aire}(U \cap D_1) + \operatorname{aire}(U \cap D_2) > \operatorname{aire}(D)$. Il existe alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit un plongement symplectique ψ_ε de $T_\varepsilon(V = U \cap D') = V \times B_\varepsilon(2n-2)$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$(*)\qquad \begin{aligned} \psi_\varepsilon^{-1}(i(L)) = \overline{C}^1 &\times (\langle x_2, \cdots, x_n\rangle \cap B_\varepsilon(n-1)) \\ \cup\, \overline{C}^2 &\times (\langle y_2, \cdots, y_n\rangle \cap B_\varepsilon(n-1)). \end{aligned}$$

Ainsi ψ_ε^{-1} rectifie localement $i(L)$ près de C et exprime localement $i(L)$ comme partie du bord d'un espace (symplectomorphe à un produit $\operatorname{int}(V) \times B_\varepsilon(2n-2)$) disjoint de $i(L)$.

Un triplet $C' \in \mathscr{C}(p_1, p_2)$ étant donné, soit $\rho_{C'}$ le suprémum des rayons ε pour lesquels un plongement symplectique ψ_ε vérifiant $(*)$ existe, et notons $C_L(C') = \rho_{C'}^2 / \operatorname{aire}(C)$ la *capacité lagrangienne* de $C' = C_1 \cup C \cup C_2$. On définit la *capacité lagrangienne de la paire* p_1, p_2, $C_L(p_1, p_2) \in (0, \infty]$, comme suprémum de $C_L(C')$ quand C' parcourt

$\mathscr{C}(p_1, p_2)$. L'étape (1) de cette démonstration montre que, sous les deux premières hypothèses du théorème, $C_L(p_1, p_2)$ est bien défini et strictement positif.

Supposons maintenant que $C_L(p_1, p_2) > 1$. On va définir une homotopie régulière lagrangienne qui supprime la paire de points doubles p_1, p_2, en travaillant dans le modèle. Soit g la fonction réelle d'une variable réelle dont le graphe est celui de la courbe en pointillé de la Figure 1, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} g = 0$. Soit f la primitive de $-g$, nulle hors d'un compact, qu'on rappelle sur $\mathbb{C}^n$: $f(z_1, \cdots, z_n) = f(x_1)$. La restriction du difféomorphisme hamiltonien induit par f au temps $t = 1$ à la partie rectiligne C_0 de C' applique cette portion de courbe sur le graphe de g, et les conditions sur les aires symplectiques de D_1, D, et D_2 assurent qu'il n'y a plus d'auto-intersection. On coupe l'action de ce difféomorphisme hors du voisinage tubulaire de rayon ρ de C_0 dans L' par une fonction lisse $k_\rho\colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{R}$ définie par $k_\rho(z) = h_\rho(|z|) = h(|z|/\rho)$, où h est positive, décroissante, nulle sur $[1, \infty)$, avec $h(0) = 1$ et $\sup(|h'(x)|/x) = \pi$. Soit Ψ le difféomorphisme hamiltonien de $\mathbb{C}^n$ induit par le gradient symplectique $X_{k_\rho f}$ de $k_\rho f$ au temps $t = 1$, et considérons son action sur

$$(C_0 \cap U) \times (\langle x_2, \cdots, x_n\rangle \cap B_\rho(n-1)).$$

Soit D_x une droite vectorielle quelconque de $\langle x_2, \cdots, x_n\rangle \subset \mathbb{C}^{n-1}$, $D_x^\rho = D_x \cap B_\rho(2n-2)$, et $D_y^\rho = J(D_x^\rho)$, où J est la multiplication par $\sqrt{-1}$. Soit $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ et $\overline{z}_1 = (\overline{x}_1, 0)$ les deux points de $C' \cap U$ ayant même abcisse $\overline{x}_1$; dans le 3-espace affine de $\mathbb{C}^n$ engendré par les droites $\{\overline{x}_1\} \times$ axe des $y_1 \times \{0 \in \mathbb{C}^{n-1}\}$, $\{\overline{z}_1\} \times D_x$, $\{\overline{z}_1\} \times D_y$, l'effet de l'application de Ψ à $\{\overline{z}_1\} \times D_x^\rho$ est le suivant: le gradient symplectique de $k_\rho f$ est

$$\begin{aligned} X_{k_\rho f}(z_1, \cdots, z_n) &= -J(k_\rho \nabla f + f \nabla k_\rho) \\ &= -h_\rho(\|(z_2, \cdots, z_n)\|) f'(x_1) \vec{e}_{y_1} \\ &\quad - f(x_1) h'_\rho(\|(z_2, \cdots, z_n)\|) \frac{J(z_2, \cdots, z_n)}{\|(z_2, \cdots, z_n)\|} \end{aligned}$$

et comme f et h_ρ ne dépendent que de x_1 et $\|(z_2, \cdots, z_n)\|$, la courbe intégrale $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, suivie par un point s'écrit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, où $\gamma_1(t)$ est une translation à vitesse constante parallèle à l'axe y_1, et $\gamma_2(t)$ une rotation à vitesse angulaire constante dans le plan $D_x \times D_y$.

Quand $\overline{z}_1$ rencontre p_i, les segments $\{(\overline{x}_1, \overline{y}_1)\} \times D_y^\rho$ et $\{(\overline{x}_1, 0)\} \times D_x^\rho$ se croisent. La courbe $\Psi(\{\overline{z}_1\} \times D_x^\rho)$ coupe donc éventuellement le segment

$\{(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\} \times D_y^\rho$ à moins que la rotation totale de la courbe soit inférieure à $\pi/2$, c'est-à-dire à moins que

$$\sup \left| \frac{2}{\pi} \frac{f(x_1)h'_\rho(\|(z_2, \cdots, z_n)\|)}{\|(z_2, \cdots, z_n)\|} \right| = \frac{2}{\pi}(\sup |f|) \left(\sup \left| \frac{h'_\rho(x)}{x} \right| \right)$$
$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} a_C \right) \left(\frac{\pi}{\rho^2} \right) = \frac{a_C}{\rho^2}$$

soit inférieur à 1, ce qui arrive exactement quand $C_L(p_1, p_2) > 1$. q.e.d.

Les conditions (1) et (2) du Théorème 1 ont servi à obtenir une courbe de Whitney d'indice de Maslov 1, d'aire positive, et admettant un prolongement de Whitney: le théorème reste donc vrai sous cette dernière hypothèse (qu'on appellera "condition $T(p_1, p_2)$") et la condition $C_L(p_1, p_2) > 1$.

La question est maintenant de déterminer si la seule condition $T(p_1, p_2)$ est suffisante pour la suppression lagrangienne d'une paire de points doubles, c'est-à-dire: $T(p_1, p_2)$ étant vérifiée, peut-on rendre la quantité $\rho^2/\,\mathrm{aire}(D)$ aussi grande que l'on veut par homotopie régulière lagrangienne? Le Théorème 2 montre qu'il n'en est rien, et on obtiendra la rigidité de C_L comme conséquence de l'obstruction de Viterbo.

Avant de démonter ce théorème, notons qu'il implique une rigidité un peu différente de celle des plongements de polydisques obtenue par Gromov [4]: si $C_L(p_1, p_2)$ est une quantité finie, par exemple inférieure à 1, et si le disque de Whitney holomorphe D est fixé, il n'existe pas de difféomorphisme symplectique fixant D et chassant L' hors du voisinage tubulaire ouvert de rayon r autour de D, pour $r = \sqrt{\mathrm{aire}(D)}$.

Démonstration du Théorème 2. Soient T_1^n et T_2^n deux copies du n-tore et $\pi: T_1^n \to T_2^n$ le revêtement associé au sous-groupe d'indice k, $k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$, de $\pi_1(T_2^n)$, avec $k = [(n+3)/2]$. Soit $I_1 = [-\varepsilon, \varepsilon]$ un intervalle fermé de S^1 suffisamment petit pour que $I_1 \times T^{n-1} \hookrightarrow T_1^n$ soit appliqué homéomorphiquement sur une partie $I_2 \times T^{n-1} \subsetneq T_2^n$, soit $J_1 = S^1 \backslash I_1 = (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, et soit $\alpha \in \Omega^1(J_1 \times T^{n-1})$ la forme fermée $\alpha = (-\theta_1 + \pi)\, d\theta_1$. Modifions α de manière à la rendre constante sur chacune des $k-1$ composantes de $(\pi^{-1}(I_2 \times T^{n-1})) \cap (J_1 \times T^{n-1})$ et, en particulier, nulle sur l'une d'entre elles. L'image du graphe de α par $T^*(\pi): T^*(T_1^n) \to T^*(T_2^n)$ est bien sûr une sous-variété lagrangienne plongée de $T^*(T_2^n)$. On va prolonger α au-dessus de $I_1 \times T^{n-1}$ de mainère à ce que l'image de son graphe par $T^*(\pi)$ présente aussi peu de points doubles que possible. Après une perturbation C^0-petite de α au voisinage des bords de $J_1 \times T^{n-1}$, la forme $\alpha \cup dg$ est partout lisse sur T_1^n, où $g: I_1 \times T^{n-1} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(\theta_1) = ((\pi - \varepsilon)/2\varepsilon)\theta_1^2$. Donnons-nous une fonction de Morse f sur T^{n-1} à valeur dans $(-1, 1)$, avec le minimum de points critiques et posons $\alpha_1 = \alpha \cup d(g + \varphi f)$, où α est défini sur $J_1 \times T^{n-1}$, $d(g + \varphi f)$ est défini sur $I_1 \times T^{n-1}$, et φ est une fonction plateau sur $I_1 = [-\varepsilon, \varepsilon]$ satisfaisant à:

(1) $\varphi^{(i)}(-\varepsilon) = \varphi^{(i)}(\varepsilon) = 0$ pour tout $i \geq 0$,

(2) $|\varphi'(\theta_1)| < (\pi - \varepsilon)/2$,

(3) φ est égale à une constante $c > 0$ sur $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$.

Par la condition (1), α_1 est une 1-forme fermée lisse sur T_1^n, dont les seuls points critiques sur $I_1 \times T^{n-1}$ sont, par les conditions (2) et (3), ceux de f en $\theta_1 = 0$. Posons $A_1 = I_1 \times T^{n-1}$ et soit $A_1' = I_1' \times T^{n-1}$ la composante de $(\pi^{-1}(I_2 \times T^{n-1})) \cap (J_1 \times T^{n-1})$ sur laquelle α_1 est nulle. Les auto-intersections de la sous-variété lagrangienne $L = T^*(\pi)(\mathrm{gr}(\alpha_1))$ se produisent toutes au-dessus de $I_2 \times T^{n-1}$, lorsque $T^*(\pi)(\mathrm{gr}(\alpha_1|A_1))$ coupe l'image par $T^*(\pi)$ de la restriction du graphe de α_1 aux composantes de $(\pi^{-1}(I_2 \times T^{n-1})) \cap (J_1 \times T^{n-1})$. Il suffira d'étudier l'intersection de $T^*(\pi)(\mathrm{gr}(\alpha_1|A_1))$ avec $T^*(\pi)(\mathrm{gr}(\alpha_1|A_1'))$, c'est-à-dire l'intersection du graphe de $d(g + \varphi f)$ avec la section nulle T_2^n de $T^*T_2^n$. On a besoin du lemme suivant dont la démonstration est un calcul direct:

Lemme 1. *Soient h une fonction de Morse sur une variété V, et $C = C_1 \cup C_2$ une courbe de Whitney de la sous-variété immergée $V \cup \mathrm{gr}(dh) \subset T^*V$ d'extrémités deux points critiques p_1, p_2 de h, avec C_1 inclus dans la section nulle $V \hookrightarrow T^*V$ et $C_2 = (\mathrm{id} \times dh)(C_1)$. Alors $\mu(C)$ égale la différence d'indice des hessiens de h évalués en p_1 et p_2.*

Ici, les points critiques de $h = g + \varphi f$ sont ceux de f en $\theta_1 = 0$. Comme le complexe de Morse de f est celui de T^{n-1} on peut, en suivant les trajectoires du flot du gradient, regrouper par paires (p_1, p_2) les points critiques de sorte que les indices de Morse de f en p_1 et p_2 diffèrent de 1. Choisissons les courbes de Whitney telles que $C_1 \subset \{\theta_1 = 0\} \times T^{n-1}$; comme φ est constante au voisinage de $\{0\} \times T^{n-1}$ et que g ne dépend que de θ_1,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ind\,Hess}(g + \varphi f)(p_2) - \mathrm{ind\,Hess}(g + \varphi f)(p_1) \\ &\quad = \mathrm{ind\,Hess}(f)(p_2) - \mathrm{ind\,Hess}(f)(p_1) = 1. \end{aligned}$$

Il est donc clair qu'il existe une partition de tous les points doubles de L en paires admettant une courbe de Whitney d'indice de Maslov 1. Soit maintenant $i: T_2^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ un plongement lagrangien de classe de

Maslov $(2, 0, \cdots, 0)$, qu'on étend à un plongement symplectique $\tilde{i}$ d'un voisinage tubulaire de la section nulle $T_2^n \hookrightarrow T^*T_2^n$. Notons $j\colon T_1^n \to T^*T_2^n$ le paramétrage évident de L; évidemment $\mu(j) = 0$ et on a:

$$\mu(\tilde{i} \circ j) = \mu(j) + \pi^*(\mu(i)) = \pi^*(\mu(i)) = (2k, 0, \cdots, 0),$$

où $2k > n+1$. L'obstruction de Viterbo s'applique, il n'existe donc pas de plongement lagrangien dans la classe d'homotopie régulière lagrangienne de $\tilde{i} \circ j$. D'autre part, comme il existe, pour l'immersion $\tilde{i} \circ j$, des lacets de $H_1(T_1^n; \mathbb{Z})$ d'indice de Maslov nul et d'aire symplectique non nulle, il est clair qu'après composition éventuelle avec ces lacets, les courbes de Whitney déterminées plus haut auront une aire positive et admettront des prolongements de Whitney. Si la capacité lagrangienne n'était pas rigide, le Théorème 1 permettrait de supprimer tous les points doubles, ce qui est absurde.

3. Bouteilles de Klein et noeuds lagrangiens

Démonstration de la Proposition 1. Ceci est en fait une généralisation du Théorème 4 de [6]. Soit $j\colon V \to T^*V$ un plongement lagrangien et $m > 0$ un entier tel $0 \neq m\mu(j) \in f^*(H^1(V; \mathbb{Z}))$. Donc $\mu(j) = kf^*(\beta)$, où $k > 0$ et β est une classe primitive de $H^1(V; \mathbb{Z})$. Si $\mu(j) = k'\alpha$, où $k' > 0$ et α est une classe primitive de $H^1(V; \mathbb{Z})$, alors $f^*(\beta) = k''\alpha$, $k'' > 0$. Supposons qu'il existe un plongement lagrangien $i\colon V \to \mathbb{C}^n$ et posons $\mu(i) = l\gamma$, où $l > 0$ et γ est une classe primitive de $H^1(V; \mathbb{Z})$. Soit φ un difféomorphisme de V tel que $\varphi^*(\gamma) = \beta$. Notons $\widetilde{i \circ \varphi}$ le plongement symplectique d'un voisinage de la section nulle de T^*V prolongeant $i \circ \varphi$. Alors le plongement lagrangien $(\widetilde{i \circ \varphi}) \circ j\colon V \to \mathbb{C}^n$ a pour classe de Maslov

$$\begin{aligned}\mu((\widetilde{i \circ \varphi}) \circ j) &= \mu(j) + f^*(\mu(i \circ \varphi)) = k'\alpha + f^*(l\beta) \\ &= k'\alpha + lk''\alpha = (k' + lk'')\alpha.\end{aligned}$$

Il est clair qu'on obtient, en itérant cette construction, des classes de Maslov de plongements lagrangiens de V dans $\mathbb{C}^n$ qui sont des multiples arbitrairement grands de la classe α, contredisant l'obstruction de Viterbo.

Remarque. Ceci pose de fortes contraintes, en particulier sur les plongements lagrangiens $j\colon T^n \to T^*T^n$: si $(\mu_1, \cdots, \mu_i, 0, \cdots, 0) \neq 0$ sont les valeurs de $\mu(j)$ sur les générateurs $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de $H_1(T^n; \mathbb{Z})$, l'application composée

$$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_i \rangle \hookrightarrow H_1(T^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_1(T^n; \mathbb{Z}) \\ \to H_1(T^n; \mathbb{Z})/f_*\langle \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n \rangle \qquad (f = \pi \circ j)$$

ne peut être injective. Quand $i = n$, on obtient: f_* injective $\Rightarrow \mu(j) = 0$.

Démonstration du Corollaire 1. Si $V \simeq K_1 \backslash G/K_2$, alors tout plongement lagrangien exact $j: V \to T^*V$ est tel que $\mathrm{ind}((\pi \circ j)_\#: \pi_1(V) \to \pi_1(V)) = 1$ par le Théorème 1 de [6]. Donc $(\pi \circ j)^*: H^1(V; \mathbb{Z}) \to H^1(V; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et le corollaire se déduit de la Proposition 1.

Démonstration du Théorème 3. (a) et (b). On obtient un plongement lagrangien de K^n pour tout n impair par chirurgie d'indice 1 sur le seul point double de la sphère de Whitney S^n, en choisissant celle des deux chirurgies qui inverse l'orientation. Quand n est pair, les deux chirurgies sur le point double de S^n produisent un plongement de $S^1 \times S^{n-1}$ puisque le signe du point double de la sphère de Whitney est négatif (il n'est pas difficile de voir que la formulae du nombre algébrique de points doubles $d(i) = -\chi(L)/2$ dans le cas orientable de dimension paire interdit l'existence d'une chirurgie lagrangienne d'indice 1 (plongée) respectant l'orientation pour un point double de signe positif). On peut quand même construire une immersion lagrangienne $j_n: K^n \to \mathbb{C}^n$ en se donnant deux copies de la sphère de Whitney S_1 et S_2 translatées l'une par rapport à l'autre de manière à ce qu'elles se coupent transversalement en deux points p_1 et p_2. Comme l'intersection homologique est nulle, p_1 et p_2 sont de signes opposés, et n'importe quelle des deux chirurgies en p_1 et p_2 produit une immersion lagrangienne de K^n dans $\mathbb{C}^n$. Si, avant chirurgie, on éloigne S_2 de S_1 de façon à rapprocher p_1 et p_2, il existe avant disjonction de S_1 et S_2 une courbe de Whitney C joignant p_1 à p_2 dans $S_1 \cup S_2$ qui est clairement d'indice 1 (selon la première définition d'indice d'une courbe de Whitney). Orientons C et pratiquons la chirurgie dans l'ordre entrant-sortant (§2) en p_1 et p_2: le résultat est une immersion lagrangienne $j_n: K^n \to \mathbb{C}^n$ de classe de Maslov 1 (puisque les deux définitions de l'indice d'une courbe de Whitney coïncident) avec une seule paire de points doubles qui satisfait aux conditions (1) et (2) du Théorème 1.

(c) Soit $f: T^2 \to K^2$ let revêtement à deux feuillets, et soit $\{a_1, b_1\}$ une base de $H_1(T^2; \mathbb{Z})$ avec $f_*(a_1) = 2a$ et $f_*(b_1) = b$, où b est de torsion et a est une classe primitive sans torsion. Soit $\{a_1^*, b_1^*\}$ la base duale de $H^1(T^2; \mathbb{Z})$ et $\theta \in H^1_{\mathrm{DR}}(T^2)$ la forme différentielle correspondant à b_1^* par l'isomorphisme de DeRham. Si $\mathrm{gr}\,\theta: T^2 \to T^*T^2$ désigne le graphe de θ, le composé $j: T^2 \xrightarrow{\mathrm{gr}\,\theta} T^*T^2 \xrightarrow{T^*f} T^*K^2$ est un plongement lagrangien qui relève f. Il est clair que $f^*(H^1(K^2; \mathbb{Z})) \subset 2H^1(T^2; \mathbb{Z})$ et que $\mu(j) = 0$. Alors si $i: K^2 \to \mathbb{C}^2$ est un plongement lagrangien et si $\mu(i) = xa^*$, où a^* engendre $H^1(K^2; \mathbb{Z})$, on a: $\mu(\tilde{i} \circ j) = \mu(j) + f^*(\mu(i)) = 2xa_1^*$ et par conséquent $x = \pm 1$ par le théorème de Viterbo. Donc tout plongement lagrangien de K^2 a pour classe de Maslov $\mu(i) = \pm a^*$. D'autre part, K^2 est un $K(\pi, 1)$ et le h-principe montre que les classes d'homotopie régulière des immersions lagrangiennes de K^2 dans $\mathbb{C}^2$ sont déterminées par leur classe de Maslov, c'est-à-dire par un nombre entier. La seule classe, à automorphisme près de K^2, qui puisse contenir un plongement lagrangien est celle correspondant à $\mu = 1$, c'est-à-dire celle de l'immersion j_2 donnée plus haut.

Ceci montre également que tout plongement lagrangien de K^2 est obtenu comme limite quand $t \to 1$ d'un homotopie régulière lagrangienne partant en $t = 0$ du plongement lagrangien standard du tore de classe de Maslov $(2, 0)$: quand $t \to 1$, deux feuilles d'orientation opposée du tore s'identifient sur la bouteille de Klein, et la famille d'indice 1 (indice géométrique, après quotient par le groupe conforme) de disques holomorphes sur T^2 donne lieu à une famille de même indice sur K^2 de bord $\pm 2a^* \in H_1(K^2; \mathbb{Z})$.

Démonstration de la Proposition 2. On a d'abord besoin du lemme suivant:

Lemme 2 (lissage lagrangien). *Soient L_1 et L_2 deux sous-variétés lagrangiennes de $\mathbb{C}^n$ contenant une même courbe simple orientée γ. Il existe deux voisinages tubulaires compacts $V \subsetneq W$ de γ dans L_2 et une isotopie lagrangienne exacte φ_t de L_2 égale à l'identité sur γ et hors de W, et telle que $\varphi_0 = \mathrm{id}$ et $\varphi_1(V) \subset L_1$ si et seulement si les indices de Maslov $\mu_{L_1}(\gamma)$ et $\mu_{L_2}(\gamma)$ sont égaux.*

Démonstration. À difféomorphisme hamiltonien près, on peut supposer que γ est un graphe au-dessus d'un cercle C dans $\langle x_1, x_2 \rangle$. Supposons d'abord que $\mu_{L_1}(\gamma) = \mu_{L_2}(\gamma) = 0$: comme dans la preuve du Théorème 1, on peut perturber L_1 et L_2 par difféomorphismes hamiltoniens de manière à ce que les plans tangents à L_i $(i = 1, 2)$ le long de γ se projettent bien sur $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$. Alors L_i s'exprime comme graphe d'une forme fermée α_i au voisinage de C, et comme $\int_\gamma (\alpha_2 - \alpha_1) = 0$, $\alpha_2 - \alpha_1$ est la différentielle d'une fonction f_0 avec $df_0|_C = 0$ et donc $f_0|_C = 0$ pour un bon choix de primitive. Soit f_t une homotopie C^1-proche de f_0 fixe hors d'un voisinage de C et dont le 1-jet est fixe sur C, et telle que $f_1 \equiv 0$ sur un voisinage plus petit; alors $\mathrm{gr}(\alpha_1 + df_t)$ est une isotopie exacte vérifiant les conclusions du lemme.

Si $\mu_{L_i}(\gamma) \neq 0$, on se ramène par le théorème de Weinstein dans le cotangent de L_1 où l'indice de Maslov de L_2 sur γ est maintenant nul. q.e.d.

Démontrons maintenant la Proposition 2. On remarque d'abord que si $\gamma \in \mathrm{Tor}(H_1(K^2; \mathbb{Z}))$, alors $\int_\gamma \lambda = 0$, et il existe une surface P complète et lagrangienne, difféomorphe à un plan, contenant γ. Maintenant, les conditions $\mu(\gamma) = 0 = \int_\gamma \lambda$ sont exactement celles qui permettent de réaliser l'opération inverse de la chirurgie de Morse d'indice 1: on peut remplacer un collier T de γ dans K^2, de bord $\partial T = \gamma \cup \gamma'$, par deux disques lagrangiens D et D' se coupant en un point et dont les bords coïncident avec le bord de T: $\partial D = \gamma$ et $\partial D' = \gamma'$. On procède de la façon suivante: soit $f(x) = \frac{1}{2}\log(x_1^2 + x_2^2)$ la fonction dont la différentielle définit la chirurgie d'indice 1. Notons C'_r le cercle de $\mathrm{gr}(df)$ au-dessus du cercle $C_r \subset \langle x_1, x_2\rangle$ de rayon r centré à l'origine, P'_r le plan passant par C'_r, et donnons à P'_r l'orientation canonique de $\langle x_1, x_2\rangle$ rappellée sur P'_r par la projection. Puisque $\int_\gamma \lambda = 0$, on peut supposer à difféomorphisme symplectique près que $\gamma = C'_{r_1}$ et $P = P'_{r_1}$. Comme $\mu(\gamma) = 0$, on peut, en appliquant le Lemme 2, faire coïncider $K^2 = L_2$ et $\mathrm{gr}(df) = L_1$ au-dessus d'un voisinage ouvert d'un anneau $\{x \in \langle x_1, x_2\rangle | r_2 \leq \|x\| \leq r_1\}$ par un lissage C^0-petit. De la même manière, on peut lisser $\mathrm{gr}(df)|_{r \geq r_1}$ sur P'_{r_1} (dont la fonction génératrice est une forme quadratique d'indice de Morse 0) et $\mathrm{gr}(df)|_{r \leq r_2}$ sur P'_{r_2}, le lissage respectant les orientations dans le premier cas et les inversant dans le second.

Cette opération inverse de la chirurgie d'indice 1 donne lieu à une sphère lagrangienne $S = (K^2 \backslash T) \cup D \cup D'$. Donnons à S une orientation arbitraire $\mathscr{O}$; comme K^2 est non orientable, l'orientation $\mathscr{O}(D)$ est transportée le long de S à une orientation $\mathscr{O}(D')$ opposée à l'orientation $\mathscr{O}'(D')$ obtenue en transportant $\mathscr{O}(D)$ le long de $\mathrm{gr}(df)$. Comme on l'a vu plus haut (définition de la chirurgie d'indice 1), la paire $(\mathscr{O}(D), \mathscr{O}'(D'))$ donne à $p = D \cap D'$ un signe négatif, et par conséquent le point p, en tant que point double de S, a signe positif. Puisque le nombre algébrique de points doubles d'une sphère lagrangienne de $\mathbb{C}^2$ est -1, S possède deux autres points doubles qui ne peuvent appartenir qu'à $(K^2 \backslash T) \cap D$ ou à $(K^2 \backslash T) \cap D'$. Comme on a pu choisir P'_{r_1} et P'_{r_2} arbitrairement près, les cardinalités de ces deux ensembles sont les mêmes. On en déduit la première partie de la proposition: K^2 coupe la composante bornée de $P \backslash \gamma$.

La deuxième partie de la proposition s'obtient par une construction analogue en inversant les lissages: au lieu d'aplanir K^2 sur P'_{r_i} $(i = 1, 2)$ vers l'origine $0 \in P'_{r_i}$, on aplanit cette fois K^2 asymptotiquement sur P'_{r_i}. Si K^2 ne coupe pas la composante non bornée de $P'_{r_i} \backslash C'_{r_i}$, on obtient ainsi une anse lagrangienne plongée reliant P'_{r_1} à P'_{r_2}, c'est-à-dire, après changement de coordonnées, une anse reliant $\langle x_1, x_2 \rangle$ à $\langle y_1, y_2 \rangle$ respectant ces orientations. On disposerait alors de deux chirurgies de Morse d'indice 1, l'une reliant P à P' et l'autre P à $-P'$, quelle que soit la paire de plans distincts P, $P' \in \Lambda^{\mathrm{or}}(2)$. Ceci permettrait par exemple de plonger lagrangiennement toutes les surfaces orientables de genre impair dans $\mathbb{C}^2$ en pratiquant l'une ou l'autre chirurgie sur les points d'intersection de k copies du tore standard $T_1, T_2, \cdots, T_k$ avec $\#(T_i \cap T_j) = 0$ si $|i-j| > 1$ et 2 si $|i-j| = 1$. Mais ceci est interdit par la formule de points doubles des immersions lagrangiennes [2].

Remerciements

L'auteur remercie le Département de Mathématiques de l'Université Harvard pour un séjour durant lequel ce travail a été entrepris, Daniel Bennequin et Dusa McDuff pour les échanges au cours de la préparation de cet article, et Leonid Polterovich pour des informations bibliographiques utiles.

Références

[1] V. I. Arnold, *Cobordismes lagrangiens et legendriens.* I *et* II, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **14** (1980), No. 3, 1–130, et No. 4, 8–17.

[2] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv. **63** (1988) 593–623.

[3] J. J. Duistermaat, *On the Morse index in variational calculus*, Advances in Math. **21** (1976) 173–195.

[4] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985) 307–347.

[5] ——, *Partial differential relations*, Springer, Berlin, 1986.

[6] F. Lalonde & J.-C. Sikorav, *Sous-variétés lagrangiennes des fibrés cotangents*, Comment. Math. Helv. (1990).

[7] L. Polterovitch, *The surgery of Lagrangian submanifolds*, preprint, Tel Aviv, 1990.

[8] C. Viterbo, *Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987) 361–390.

[9] ——, *A new obstruction to embedding Lagrangian tori*, Invent. Math. **100** (1990) 301–320.

[10] H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space*, Ann. of Math. (2) **45** (1944) 220–244.

Université du Québec à Montréal