J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
8 (1973) 487-510

INVARIANTS CONFORMES GLOBAUX SUR LES VARIETES RIEMANNIENNES

JACQUELINE LELONG-FERRAND

Sur toute boule euclidienne ouverte B, il existe une métrique conformément équivalente à sa métrique initiale, et qui reste invariante dans tout automorphisme conforme de B; la distance géodésique associée est la distance hyperbolique. Dans le cas 2-dimensionnel, toute surface de Riemann hyperbolique simplement connexe possède la même propriété.

Dans cet article, nous montrons qu'il existe une classe très générale $(\mathscr{H}_0)$ de variétés riemanniennes M sur lesquelles on peut définir une distance δ_M entièrement déterminée par la structure conforme de M et par conséquent invariante dans tout automorphisme conforme de M. Mais il est des variétés sur lesquelles une telle distance ne peut exister: c'est le cas si M admet une suite d'automorphismes conformes convergeant vers une application constante; et c'est en particulier le cas de E_n. Si la variété M n'est pas de type $\mathscr{H}_0$ nous montrerons qu'il suffit de lui enlever un point si elle est non compacte, ou deux points si elle est compacte, pour obtenir une variété de type $\mathscr{H}_0$. A chaque triplet (x, y, z) de points d'une variété non compacte, et à chaque quadruplet (x, y, z, t) de points d'une variété compacte, nous pouvons ainsi associer des invariants conformes, entièrement déterminés par la structure conforme de la variété.

L'introduction de ces invariants permet de considérer les homéomorphismes quasi-conformes comme des applications bi-lipschitziennes. Elle permet aussi d'obtenir des renseignements sur le comportement des groupes d'automorphismes conformes d'une variété non compacte; et, dans le cas des variétés compactes, elle permettrait de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Lichnerowicz.

Les résultats obtenus aboutissent à une classification des variétés riemanniennes de dimension quelconque n; et pour $n = 2$, ils sont à rapprocher des classifications connues (cf. [8]).

La méthode utilisée est voisine de celle employée par G. D. Mostow dans [6]; elle est essentiellement fondée sur l'étude d'une classe de fonctions numériques vérifiant à la fois une hypothèse métrique (différentielle généralisée de puissance $n^{\text{ème}}$ sommable) et une hypothèse topologique (principe du

Communicated by J. Eells, Jr., June 28, 1972. Ces résultats ont fait l'objet d'un exposé à l'Université de Warwick (Juin 1972) et à Oberwohlfach (Juillet 1972).

maximum et du minimum). La notion de capacité conforme y jouera aussi un rôle important.

1. Notations et rappels

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par M une variété riemannienne connexe, de classe C^1 et dimension n, non nécessairement complète, mais sans bord (éventuellement, un domaine de $\boldsymbol{R}^n$).

La métrique de M sera notée $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$; la distance géodésique et l'élément de volume associés seront désignés respectivement par d_M et $d\tau_M = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Nous noterons $\beta_M(a, r) = \{x \in M \mid d_M(a, x) < r\}$ la boule géodésique ouverte de centre a et rayon r, par $\bar{\beta}_M(a, r)$ son adhérence; dans l'espace euclidien E_n, ces boules seront désignées par $B(a, r)$ et $\bar{B}(a, r)$.

L'espace $H(M)$. A la variété M nous associerons l'espace vectoriel

$$H(M) = \mathscr{C}(M, \boldsymbol{R}) \cap W_n^1(M)$$

constitué par les fonctions numériques u, continues sur M, dont la différentielle, au sens de la théorie des courants, est une fonction vectorielle mesurable vérifiant:

$$(1) \qquad I(u, M) = \int_M |du|^n d\tau_M < \infty \ , \quad \text{avec}$$

$$|du| = [g^{ij}(\partial u/\partial x^i)(\partial u/\partial x^j)]^{1/2} .$$

L'espace $H(M)$ sera muni de la semi-norme $u \mapsto \|du\|$ définie par

$$\|du\| = \left[\int_M |du|^n d\tau_M\right]^{1/n} .$$

Rappelons (voir par exemple [5]) que $H(M)$ peut être défini directement comme étant l'ensemble des fonctions $u\colon M \to R$, continues, telles que:

i) u est ACL, i.e., absolument continue sur presque toute ligne coordonnée, dans chaque système de coordonnées;

ii) les dérivées partielles de u (qui existent presque partout d'après i) sont localement de puissance $n^{\text{ième}}$ intégrable et vérifient (1).

Voici quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite.

1.1. *Soit $u \in H(M)$, et soit $\theta\colon R \to \boldsymbol{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant: $|\theta'(t)| \leq k$, $\forall t \in R$. Alors $\theta \circ u \in A(M)$ et on a: $\|d(\theta \circ u)\| \leq k\|du\|$.*

Cela résulte immédiatement de la définition directe de $A(M)$.

1.2. *Soit $u \in H(M)$; et soit $E_0 = \{x \in M \mid u(x) = 0\}$; on a alors $\int_{E_0} |du|^n d\tau_M = 0$.*

Démonstration. On sait que u admet des dérivées partielles presque partout; et en tout point de densité de E_0 où ces dérivées partielles existent, elles sont nécessairement nulles. On a donc $du = 0$ presque partout sur E_0.

1.3. *Soit (u_α) une suite de fonctions appartenant à $H(M)$, convergeant uniformément sur tout compact de M, telle que la suite $(I(u_\alpha, M))$ soit majorée. Alors la fonction $u = \lim_{\alpha\to\infty}(u_\alpha)$ appartient à $H(M)$, et on a:*

$$I(u, M) \leq \liminf_{\alpha\to\infty} I(u_\alpha, M) \ .$$

Démonstration. Sur chaque compact K de M, les fonctions u_α sont également bornées; nous pouvons donc appliquer à K le théorème 2.3 de [5] et nous avons:

$$I(u, K) \leq \liminf_{\alpha\to\infty} I(u_\alpha, K) \ .$$

Le résultat annoncé en découle.

1.4. *Pour chaque $u \in H(M)$, la fonction $u^+ =$ sup $(u, 0)$ appartient à $H(M)$ et vérifie $I(u^+, M) \leq I(u, M)$.*

Démonstration. La fonction $\theta\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $x \to x^+ = \sup(x, 0)$ est la limite uniforme pour $\varepsilon \to 0$, des fonctions $\theta_\varepsilon\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ définies par: $\theta_\varepsilon|x| = x^+$ pour $|x| > \varepsilon$, $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{4}(x + \varepsilon)^2/\varepsilon$ pour $(x) \leq \varepsilon$. Donc u^+ est limite uniforme, pour $\varepsilon \to 0$, des fonctions $u_\varepsilon = \theta_\varepsilon \circ u$. Or, pour chaque $\varepsilon > 0$, θ_ε est de classe C^1 sur $\boldsymbol{R}$ et vérifie $|\theta'_\varepsilon| \leq 1$. D'après 1.1. on a donc $u_\varepsilon \in H(M)$, avec $I(u_\varepsilon, M) \leq I(u, M)$; le résultat découle alors de la proposition 1.3.

2. Inegalite de base

Nous rappellerons d'abord un résultat connu[1].

2.1. *Dans l'espace euclidien E_n, soit D la couronne sphérique définie par $R_1 < |x| < R_2$; soit $u \in H(D)$; et, pour chaque $r \in \,]R_1, R_2[$, soit $\delta(r)$ l'oscillation de u sur la sphère $S_r = \{x \,|\, |x| = r\}$. On a:*

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta^n(r)}{r} dr \leq A_n I(u, D) \ , \tag{1}$$

où A_n désigne une constante ne dépendant que de n.

Pour adapter ce résultat au cas des fonctions définies sur une variété riemannienne quelconque, nous établirons d'abord un lemme.

2.2. *Soit M une variété riemannienne. A chaque réel $k > 1$ on peut associer un nombre $\rho_K > 0$ tel que, pour chaque $a \in K$, il existe un voisinage Ω_a de a et un difféomorphisme θ_a de Ω_a sur la boule euclidienne $B(0, \rho_K)$ satisfaisant à:*

[1] Cf. G. D. Mostow [6, lemmes 4.1. et 4.3]. Dans un autre article nous étendrons ce résultat aux fonctions prenant leurs valeurs dans une variété riemannienne.

i) $\theta_a(a) = 0$,

ii) $1/k \leq |\theta_a(y) - \theta_a(x)|/d_M(x, y) \leq k \qquad \forall x, y \in \Omega_a$.

Démonstration. Pour chaque $a \in M$ il existe un voisinage U_a de a et un difféomorphisme $h_a\colon U_a \to \boldsymbol{R}^n$ tel que $h_a(a) = 0$, définissant des coordonnées locales (x^i) ; et on peut choisir h_a de manière que $g_{ij}(a) = \delta_i^j$. La continuité du tenseur métrique entraîne l'existence d'un nombre $r_a > 0$ tel que l'inégalité $\sum (x^i)^2 \leq r_a^2$ entraîne, pour tout $u \in \boldsymbol{R}^n$:

$$k^{-2} \leq g_{ij}(x)u^i u^j / \sum (u^i)^2 \leq k^2 .$$

Les points de U_a dont les coordonnées vérifient $\sum (x^i)^2 < r_a^2$ constituent un voisinage V_a de a, et on a:

$$1/k \leq |h_a(x) - h_a(y)|/d_M(x, y) \leq k \qquad \forall x, y \in V_a .$$

Il nous suffit donc de montrer que l'on peut choisir r_a indépendant de a sur K.

Posons $W_a = \{x \in U_a \,|\, h_a(x) < \frac{1}{2}r_a\}$. Le compact K peut être recouvert au moyen d'un nombre fini d'ouverts $W_{a_1}, \cdots, W_{a_p}$; posons $\rho_K = \inf_{1\leq i\leq p} (\frac{1}{2}r_{a_i})$. Si a désigne un point quelconque de K, contenu dans un ouvert W_{a_i}, l'ensemble

$$\Omega_a = \{x \in U_{a_i} \,||h_{a_i}(x) - h_{a_i}(a)| < \rho_K\}$$

est un voisinage de a contenu dans V_{a_i} ; et l'application $\theta_a\colon \Omega_a \to B(0, \rho_K)$, $x \mapsto h_{a_i}(x) - h_{a_i}(a)$ vérifie les conditions imposées.

Nous pouvons maintenant établir:

2.3. *Soit M une variété riemannienne de dimension n. Pour chaque compact $K \subset M$, il existe un nombre $R_K > 0$ tel qu'à chaque $a \in M$ on puisse associer une famille $C_r(a)$, $0 < r < R_K$, de compacts de M difféomorphes à des boules, vérifiant les conditions suivantes*:

i) *si* $r' > r$, $\quad C_{r'}(a) \supset C_r(a)$,

ii) $\beta_M(a, r) \subset C_r(a) \subset \beta_M(a, 2r)$,

iii) *pour toute fonction $u \in H(M)$, l'oscillation $\delta(r)$ de u sur la frontière de $C_r(a)$ vérifie*

$$(2) \qquad \int_0^{R_K} \frac{\delta^n(r)}{r} dr \leq 2^n A_n I(u, M) ,$$

où A_n désigne la même constante que dans (2.1).

Démonstration. Reprenons les notations du lemme 2.2 en choisissant $k = \sqrt{2}$; pour chaque $a \in K$ et chaque $r \in]0, \rho_K/\sqrt{2}[$ posons $C_r(a) = \theta_a^{-1}[\bar{B}(0, r\sqrt{2})]$. Le compact $C_r(a)$ est contenu dans Ω_a et difféomorphe à une boule ; d'après la condition ii) du lemme 2.2 il vérifie $\beta_M(a, r) \subset C_r(a) \subset \beta_M(a, 2r)$; enfin $C_r(a)$ croit avec r.

Pour chaque $a \in K$ et chaque $u \in H(M)$, considérons la fonction $v_a = u \circ \theta_a^{-1} \colon B(0, \rho_K) \to \boldsymbol{R}$. Du fait que θ_a vérifie la condition ii) du lemme 2.2 avec $k = \sqrt{2}$, on déduit que θ_a et θ_a^{-1} sont 2-quasi-conformes (i.e. de dilatation extérieure $\leq 2^n$) et on a donc $v_a \in H[B(0, \rho_K)]$ avec $I[v_a, B(0, \rho_K)] \leq 2^n \cdot I(u, M)$. L'oscillation de u sur la frontière de $C_r(a)$ est égale à celle de v_a sur la sphère $|x| = r\sqrt{2}$. Par application de la proposition 2.1, on a donc en posant $R_K = \rho_K/\sqrt{2}$:

$$\int_0^{R_K} \frac{\delta^n(r)}{r} dr \leq A_n I[v_a, B(0, \rho_K)] \leq 2^n A_n I(u, M) \ .$$

Remarque. La proposition 2.3 ne nous donne qu'une majoration de l'oscillation de u sur la frontière de $C_r(a)$. Pour avoir un module de continuité de u, il faudrait connaître une majoration de l'oscillation de u sur l'ensemble $C_r(a)$ lui-même. Pour pouvoir établir un lien entre l'oscillation de u sur un ensemble, et l'oscillation de u sur la frontière de cet ensemble, nous sommes amenés à faire une hypothèse topologique qui va être précisée dans les sections suivants.

3. Applications semi-ouvertes

Définition 3.1.[2] E, F désignant deux espaces topologiques séparés, nous dirons qu'une application $f \colon E \to F$ est *semi-ouverte* si, pour tout compact $K \subset E$, la frontière de $f(K)$ est contenu dans l'image de la frontière de K, soit:

$$\partial f(K) \subset f(\partial K) \ . \tag{1}$$

Si E est localement compact, les applications continues et semi-ouvertes ne sont autres que les transformations quasi-ouvertes introduites par Whyburn (cf. [10, théorème 4.4, p. 111]). D'autre part, si $F = \boldsymbol{R}$, et si E est localement connexe (ce qui sera le cas dans la suite de cet article) la notion d'application semi-ouverte est très voisine de celle de "fonction monotone au sens de Lebesgue" (cf. [6, p. 66]).

On a en effet:

3.1. *Soit E un espace séparé. Pour qu'une fonction numérique continue $f \colon E \to \boldsymbol{R}$ soit semi-ouverte, il faut que, pour toute partie ouverte connexe et relativement compacte U de E, on ait*:

$$\sup_{x \in U} f(x) = \sup_{x \in \partial U} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in U} f(x) = \inf_{x \in \partial U} f(x) \, ; \tag{2}$$

et cette condition est suffisante si E est localement connexe.

[2] On obtient des variantes de cette définition en imposant au compact K des conditions supplémentaires, ou en remplaçant les compacts par des ouverts.

Démonstration. a) Supposons f semi-ouverte et continue. Alors $f(\bar{U})$ est un compact connexe de $\boldsymbol{R}$, c'est-à-dire un intervalle compact $[a, b]$. D'après l'hypothèse, les points a, b appartiennent à $f(\partial\bar{U})$, donc à $f(\partial U)$, d'où (2).

b) Réciproquement, supposons que f soit continue et vérifie la condition énoncée.

Soit K un compact de E, et soit $b \in \partial f(K)$, ce qui implique $b \in f(K)$. Il s'agit de prouver que $b \in f(\partial K)$. Si $f^{-1}(b)$ ne possède aucun point intérieur à K, c'est évident; sinon $b \in f(\mathring{K})$. Désignons alors par (V_α) la famille des composantes connexes de $\mathring{K}$, et soit α tel que $b \in f(V_\alpha)$. Alors, nécessairement $b \in \partial f(V_\alpha)$: en d'autres termes b est une des bornes de l'intervalle $f(V_\alpha)$, c'est-à-dire une borne de f sur V_α. Or, si E est localement connexe, V_α est ouvert: par application de (2) à l'ouvert connexe relativement compact V_α, on voit que b est égal à l'une des bornes de f sur le compact ∂V_α. Donc $b \in f(\partial V_\alpha)$; enfin on a $\partial V_\alpha \subset \partial K$ (car tout point intérieur à K appartient à un seul ouvert V_α) d'où $b \in f(\partial K)$. q.e.d.

Rappelons qu'une fonction numérique $f\colon E \to \boldsymbol{R}$ est dite monotone au sens de Lebesgue si pour tout ouvert connexe $U \subset E$ tel que $\partial U \neq \emptyset$, on a:

$$\sup_{x \in U} f(x) \leq \sup_{x \in \partial U} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in U} f(x) \geq \inf_{x \in \partial U} f(x)\ .$$

A l'aide de 3.1 nous pouvons établir:

3.2. *Soit E un espace localement connexe. Pour qu'une fonction numérique continue $f\colon E \to \boldsymbol{R}$ soit semi-ouverte, il faut et il suffit que pour tout $a \in \boldsymbol{R}$, et tout compact K de E tel que $\partial K \subset f^{-1}(a)$, on ait $f = C^{te} = a$ sur K.*

Démonstration. a) Si f est semi-ouverte, et si $\partial K \subset f^{-1}(a)$, on a $\partial f(K) \subset \{a\}$. Le compact $f(K)$ ayant une frontière non vide dans $\boldsymbol{R}$, cette frontière se réduit au point a, ce qui exige $f(K) = \{a\}$. La condition énoncée est donc nécessaire.

b) Réciproquement supposons f continue, vérifiant la condition énoncée. Soit U un ouvert relativement compact de E, et soit $b = \sup_{x \in \partial U} f(x)$. L'ensemble $B = \{x \in \bar{U} \mid f(x) \geq b\}$ est un compact, dont la frontière est contenue dans $\partial U \cup f^{-1}(b)$; mais, sur ∂B, on a nécessairement $f(x) \geq b$; et sur ∂U, on a $f(x) \leq b$; donc $\partial B \subset f^{-1}(b)$, ce qui entraîne $B \subset f^{-1}(b)$. En d'autres termes, on a: $\sup_{x \in U} f(x) = \sup_{x \in \partial U} f(x)$. On établirait de même la seconde des relations (2).

Exemples. Toute application ouverte est semi-ouverte. La composée d'applications semi-ouvertes et continues est semi-ouverte.

Si f est semi-ouverte sur un espace topologique E, la restriction de f à tout ouvert U de E est semi-ouverte (car la frontière d'un compact K contenu dans U est la même dans U et dans E).

Toute fonction numérique monotone et continue sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{R}$ est semi-ouverte sur $\boldsymbol{I}$. Toute fonction harmonique sur un ouvert U de $\boldsymbol{R}^n$ est semi-ouverte.

Si E est un espace topologique connexe et non compact, les fonctions numériques constantes sont semi-ouvertes sur E (cela tient à ce qu'aucun compact de E n'a une frontière vide). Par contre, si E est compact, il n'existe pas de fonction numérique semi-ouverte sur E.

Nous établissons maintenant un résultat fondamental pour la suite:

Théorème 3.3.[3] *Soient E, F, deux espaces topologiques séparés, l'espace F étant supposé localement connexe et régulier; soit $\mathscr{S}(E, F)$ l'ensemble des applications semi-ouvertes de E dans F, et soit $\overline{\mathscr{S}(E, F)}$ son adhérence pour la topologie compacte-ouverte. Alors, toute application continue $\varphi \in \overline{\mathscr{S}(E, F)}$ est semi-ouverte.*

En conséquence: l'ensemble des applications semi-ouvertes et continues de E dans F est fermé pour la topologie compacte-ouverte.

Démonstration.[4] Soit $\varphi: E \to F$ une application continue qui ne soit pas semi-ouverte. Nous allons montrer que φ admet, dans $\mathscr{F}(E, F)$, un voisinage ϕ ne rencontrant pas $\mathscr{S}(E, F)$.

Puisque $\varphi \notin \mathscr{S}(E, F)$, il existe un compact $K \subset E$ et un point $b \in \partial\varphi(K)$ tel que $b \notin \varphi(\partial K)$; et puisque φ est continue, il existe un point $a \in K$ tel que $\varphi(a) = b$. D'après les hypothèses faites sur F, les voisinages connexes et fermés de b constituent une base de voisinages de b. L'ensemble $\varphi(\partial K)$ étant fermé, il existe donc un voisinage connexe et fermé V de b tel que $V \subset F \backslash \varphi(\partial K)$; et puisque $b \in \partial\varphi(K)$, il existe un point $c \in V \cap [F \backslash \varphi(K)]$. Les applications $\psi: E \to F$ vérifiant: i) $\psi(a) \in \mathring{V}$, ii) $\psi(K) \subset F \backslash \{c\}$, iii) $\psi(\partial K) \subset F \backslash V$ forment un voisinage Φ de φ dans $\mathscr{F}(E, F)$. S'il existait une application semi-ouverte $\psi \in \Phi$, l'ensemble connexe V joindrait le point $\psi(a)$ de $\psi(K)$ au point c de $F \backslash \psi(K)$, et rencontrerait $\partial\psi(K)$, donc $\psi(\partial K)$, ce qui serait en contradiction avec iii).

Redressement des applications. En adaptant une démonstration due à G. D. Mostow [6, p. 67] on a:

3.4. *Soient E un espace topologique localement connexe, et U un ouvert propre de E. A toute fonction numérique f continue et bornée sur E, on peut associer une fonction numérique g, continue et bornée sur E, prenant mêmes valeurs que f sur $E \backslash U$, et dont la restriction à U est semi-ouverte.*

Principe de la démonstration. Pour chaque $a \in R$, et chaque fonction numérique f continue sur E, soit aDf la réunion des composantes connexes relativement compactes de $U \backslash f^{-1}(a)$ dont la fermeture est dans U; et soit $T_a(f)$ la fonction définie sur E par:

$$T_a(f)(x) = a \text{ si } x \in aDf; \qquad T_a(f)(x) = f(x) \text{ si } x \notin aDf .$$

Désignant par $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ une suite dense dans $\boldsymbol{R}$ on forme la suite (f_n) définie par les relations de récurrence $f_0 = f, f_n = T_{a_n}(f_{n-1})$; et on

[3] Ce théorème généralise un résultat de Whyburn [10].

[4] Dans le cas où F=R et où E est localement connexe, on peut donner une démonstration plus rapide en utilisant (3.1).

démontre que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction g vérifiant les conditions imposées. La démonstration est fondée sur la proposition 3.2.

Cas où E est une variété. Gardant les notations précédentes, supposons que E soit une variété riemannienne de dimension n et que la fonction f appartienne à $H(E)$. En s'appuyant sur la proposition 2.1, on démontre facilement que, pour chaque $a \in E$, on a $T_a(f) \in H(E)$ et que:

$$I(T_a(f), E) = \int_{aDf} |df|^n d\tau_M \leq I(f, E) \ .$$

Par passage à la limite (prop. 1.3) on en déduit que la fonction g, précédemment construite, appartient à $H(E)$, et vérifie $I(g, E) \leq I(f, E)$. Nous énoncerons:

3.5. *Soient M une variété riemannienne, et U un ouvert propre de M. A toute fonction numérique $f \in H(M)$, bornée, on peut associer une fonction numérique $g \in H(M)$, bornée, satisfaisant à $I(g, M) \leq I(f, M)$, prenant mêmes valeurs que f sur $E \backslash U$, et dont la restriction à U soit semi-ouverte.*

4. Autres proprietes des fonctions numeriques semi-ouvertes

Nous groupons ici quelques résultats utiles pour la suite.

4.1. *Soit $u: E \to \boldsymbol{R}$ une fonction numérique semi-ouverte et continue sur un espace localement connexe E. Alors les fonctions $u^+ = \sup(u, 0)$ et $u^- = \sup(-u, 0)$ sont semi-ouvertes sur E.*

Démonstration. La fonction u^+ [resp. u^-] est la composée de u avec la fonction $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $x \mapsto x^+$ [resp. $x \to x^-$]. Or les fonctions $x \mapsto x^+$ et $x \mapsto x^-$ sont monotones et continues, donc semi-ouvertes. D'après une remarque antérieure (cf. exemples § 3) les fonctions u^+ et u^- sont semi-ouvertes.

En vue des développements qui suivent, nous introduirons la notion de *continu relatif*.

Définition 4.1. Une partie fermée C d'un espace topologique E sera appelée *continu relatif* s'il n'existe aucun compact non vide $K \subset C$ tel que $C \backslash K$ soit fermé.

Un continu relatif est évidemment non compact. D'autre part, tout continu non compact de E est un continu relatif.

4.2. *Si u est une fonction numérique semi-ouverte sur un espace localement compact E, l'ensemble $F = \{x \in E \,|\, u(x) \geq 0\}$ est un continu relatif.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un compact non vide K tel que $F \backslash K$ soit fermé. Il existerait alors un ouvert relativement compact U, contenant K, tel que $\bar{U}$ ne rencontre pas $F \backslash K$. La frontière de $\bar{U}$ ne rencontrant pas F, on aurait $u(x) < 0$ sur $\partial \bar{U}$. D'autre part, puisque $\bar{U}$ contient K, on a $M = \sup_{x \in \bar{U}} u(x) \geq 0$. Le point M appartenant à la frontière de $u(\bar{U})$, l'inclusion $\partial u(\bar{U}) \subset u(\partial \bar{U})$ ne pourrait être vérifiée.

Remarque. En changeant u en $-u$ ou en $u - m$ (avec $m = Cte$) on voit que pour tout $m \in \boldsymbol{R}$, les ensembles

$$F_m = \{x \in E \mid u(x) \geq m\} , \qquad F'_m = \{x \in E \mid u(x) \leq m\}$$

possèdent la même propriété que F.

4.3. *Dans un espace localement connexe E, soient C_0, C_1 deux continus relatifs. Soit, d'autre part, u une fonction numérique continue sur E, semi-ouverte sur l'ouvert $C = E \backslash (C_0 \cup C_1)$ et vérifiant $u = 0$ sur C_0, $u = 1$ sur C_1, $0 \leq u(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$. Alors u est semi-ouverte sur E.*

Démonstration. Soit U un ouvert connexe relativement compact quelconque de E, et soit $M = \sup_{x \in U} u(x)$.

a) Si $\bar{U}$ ne rencontre pas C_1, désignons par a un point de $\bar{U}$ tel que $u(a) = M$. Si $a \in C_0$, on a $M = 0$, donc $u = Cte = 0$ sur U, ce qui implique $u = 0$ sur $\bar{U}$.

Si $a \notin C_0$, soit V la composante connexe de a dans $U \backslash C_0$. L'ouvert relativement compact V est contenu dans C, et puisque u est semi-ouverte sur C, on a:

$$M = u(a) = \sup_{x \in V} u(x) = \sup_{x \in \partial V} u(x) .$$

Mais, dans ce cas, on a $\partial V \subset C_0 \cup \partial U$, d'où, dans tous les cas:

$$M = \sup_{x \in U} u(x) = \sup_{x \in \partial U} u(x) . \tag{3}$$

b) Si $\bar{U}$ rencontre C_1, on a $M = 1$.

Si u ne prenait pas la valeur 1 sur ∂U, l'ensemble $K = \{x \in U \mid u(x) = 1\}$ serait un compact contenu dans U; l'ensemble $K_1 = K \cap C_1$ serait un compact contenant $\bar{U} \cap C_1$, donc non vide; et l'ensemble $C_1 \backslash K_1 = C_1 \cap (E \backslash U)$ serait fermé: ceci étant en contradiction avec les hypothèses, on a, encore ici: $\sup_{x \in \partial U} u(x) = M$, d'où (3).

On établirait de même les relations $\inf_{x \in U} u(x) = \inf_{x \in \partial U} u(x)$; d'où le résultat.

Corollaire 1 (*lemme des deux continus*). *Dans un espace localement connexe E, soient C_0, C_1 deux continus non compacts disjoints*; *et soit u une fonction numérique continue sur E, semi-ouverte sur $C = E \backslash (C_0 \cup C_1)$ satisfaisant à $u = 0$ sur C_0, $u = 1$ sur C_1 et $0 < u < 1$ partout. Alors u est semi-ouverte sur E.*

En effet, C_0 et C_1 sont des continus relatifs.

Corollaire 2. *Dans un espace localement connexe M, soient C_0, C_1 deux continus disjoints quelconques*; *et soit u une fonction numérique continue sur M, semi-ouverte sur l'ouvert $C = M \backslash (C_0 \cup C_1)$, satisfaisant à $u = 0$ sur C_1, $u = 1$ sur C_1, et $0 \leq u \leq 1$ partout. Alors quels que soient les points $a_0 \in C_0$ et $a_1 \in C_1$, la fonction u est semi-ouverte sur l'ouvert $E = M \backslash \{a_0, a_1\}$.*

Démonstration. Pour chaque $i = 0, 1$, l'ensemble $C'_i = C_i \backslash \{a_i\}$ est fermé dans E. S'il existait un compact non vide K_i de E contenu dans C'_i et tel que l'ensemble $F_i = C'_i \backslash K_i$ soit fermé dans E, le continu C_i serait la réunion des deux ensembles disjoints non vides K_i et $F_i \cup \{a_i\}$, qui sont tous deux fermés dans M, ce qui est impossible.

Il suffit donc d'appliquer 4.3 à l'espace E et aux continus relatifs C'_0, C'_1.

On peut aussi établir directement ce résultat, par une démonstration analogue à celle de 4.3.

Remarque. Dans le cas des espaces localement compacts, la proposition suivante ramène la notion de continu relatif à celle de continu ordinaire.

4.4. *Soit $\hat{E}$ le compactifié d'Alexandroff d'un espace localement compact E. Pour qu'une partie C de E soit un continu relatif, il faut et il suffit que $C \cup \infty$ soit un continu de E.*

Démonstration. a) Si $C \cup \infty$ admet une partition en deux fermés F_1 et F_2, l'un d'eux, soit F_1, contient ∞. Alors F_2 est un compact non vide contenu dans C, et C n'est pas un continu relatif.

b) S'il existe un compact non vide $K \subset C$ tel que $F = C \backslash K$ soit fermé, $C \cup \infty$ est la réunion des fermés disjoints K et $F \cup \infty$, donc $C \cup \infty$ n'est pas un continu.

5. Modules de continuite

Notations. Pour chaque variété riemannienne M nous désignerons désormais par $H^*(M)$ l'ensemble des fonctions numériques $u \in H(M)$ qui sont semi-ouvertes sur M (s'il en existe). L'existence de telles fonctions sera discutée au § 6.

Nous commencerons par étendre aux variétés riemanniennes un résultat de G. D. Mostow [6, p. 73]:

Théorème 5.1. *Soit M une variété riemannienne ouverte de dimension n. Pour tout compact $K \subset M$, il existe un nombre $\alpha_K > 0$, ne dépendant que de K, tel que pour toute fonction $u \in H^*(M)$, tout $a \in K$, et tout $x \in M$ vérifiant $d_M(a, x) < \alpha_K$, on ait:*

$$(1) \qquad |u(x) - u(a)| \leq B_n(I(u, M)/|\operatorname{Log} d_M(a, x)|)^{1/n} ,$$

où B_n désigne une constante ne dépendant que de n.

Démonstration. Reprenons les notations de la proposition 2.3 et soit $a \in K$. Du fait que u est semi-ouverte, l'oscillation de u sur $C_r(a)$ est une fonction croissante de r. D'autre part, pour tout $r < \inf(1, R_K^2)$, l'inégalité (2) du § 2 entraîne l'existence d'un nombre $R \in [r, \sqrt{r}]$ tel que l'on ait:

$$\delta^n(R) \int_r^{\sqrt{r}} \frac{dt}{t} \leq 2^n A_n I(u, M) ,$$

d'où

$$(2) \qquad \delta^n(r) \leq \delta^n(R) \leq 2^{n+1}A_n I(u, M)/|\mathrm{Log}\, r| \ .$$

Soit alors $x \in M$ tel que $d_M(a, x) < \inf(1, R_K^2)$. D'après les conditions ii) énoncées dans 2.3, on a: $x \in C_r(a)$ d'où $|u(x) - u(a)| \leq \delta(r)$.

Finalement, l'inégalité $d_M(a, x) < \inf(1, R_K^2)$ implique $|u(x) - u(a)|^n \leq 2^{n+1}A_n I(u, M)/|\mathrm{Log}\, d_M(a, x)|$; on a donc l'inégalité (1) avec $B_n = (2^{n+1}A_n)^{1/n}$ et $\alpha_K = \inf(1, R_K^2)$. q.e.d.

Par une méthode analogue, on obtient:

Théorème 5.2. *Toute fonction $u \in H^*(M)$ est presque partout différentiable sur M.*

Démonstration. Il suffit d'établir que u est presque partout différentiable sur un voisinage de chaque point a de M. Or, pour chaque $a \in M$, il existe un difféomorphisme φ: $B(0, R) \to \Omega$ d'une boule euclidienne ouverte sur un voisinage Ω de a, vérifiant

$$1/\sqrt{2} \leq d_M[\varphi(x), \varphi(y)]/|y - x| \leq \sqrt{2} \qquad \forall x, y \in B(0, R) \ ,$$

(cf. lemme 2.2). Une telle application φ est 2-quasi-conforme (i.e., de dilatation extérieure $\leq 2^n$); et pour tout $u \in H^*(M)$, la fonction $v = u \circ \varphi$ vérifie $I[v, B(0, R)] \leq 2^n I(u, M)$. D'autre part v est semi-ouverte, comme composée d'applications semi-ouvertes; donc $v \in H^*[B(0, R)]$ et la différentiabilité de u équivaut à celle de v. Il suffit donc de prouver que v est presque partout différentiable sur $B(0, R)$.

Pour tout $x \in B(0, R)$ et tout $r < R - |x|$, la boule $B(x, r)$ est contenue dans $B(0, R)$. D'autre part, puisque v est semi-ouverte, l'oscillation de v sur $B(x, r)$, soit $\delta_x(r)$, est égale à l'oscillation de v sur la sphère de centre x et rayon r. D'après la proposition 2.1, on a donc, pour tout $\rho < R - |x|$:

$$\int_0^\rho \frac{\delta_x^n(r)}{r} dr < A_n I[v, B(x, \rho)] \ .$$

Or, pour presque tout $x \in B(0, R)$, on a:

$$\limsup_{\rho \to 0} \rho^{-n} \int_{B(x,\rho)} |dv|^n dy < \infty \ .$$

Pour presque tout $x \in B(0, R)$, il existe donc un nombre $k(x)$ tel que, pour $\rho > 0$ assez petit, on ait:

$$\int_0^\rho \frac{\delta_x^n(r)}{r} dr \leq k(x)\rho^n \ .$$

Si r est assez petit, on en déduit l'existence d'un nombre $R \in [r, 2r]$ tel que:

$$\delta_x(r) \leq \delta_x(R) \leq 2r(k(x)/\mathrm{Log}\, 2)^{1/n} ,$$

d'où $\lim\sup_{r\to 0} (\delta_x(r)/r) < \infty$, soit, en d'autres termes:

$$\limsup_{y\to x} [|v(y) - v(x)|/|y - x|] < \infty .$$

Il résulte alors du théorème de Rademacher-Stepanoff que v est presque partout différentiable sur $B(0, R)$.

Remarque. Le théorème 4.2 généralise un théorème de J. Vaïsala [9] relatif aux applications ouvertes de classe ACL^n.

6. Condensatures et capacites

Définition 6.1. Sur une variété riemannienne M un *condensateur* est défini par la donnée de deux fermés disjoints C_0, C_1 et de l'ouvert complémentaire C.

Définition 6.2. Soit $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ un condensateur sur la variété M. Nous dirons qu'une fonction numérique u est *admissible* pour Γ si $u \in H(M)$, et si on a $u = 0$ sur C_0, $u = 1$ sur C_1 et $0 \leq u(x) \leq 1$ pour tout $x \in M$. L'ensemble des fonctions admissibles pour Γ étant noté $\alpha(\Gamma)$, la *capacité conforme* de Γ est le nombre

$$(1) \qquad \mathrm{cap}\,(\Gamma) = \inf_{u \in \alpha(\Gamma)} I(u, M) ,$$

avec la convention $\mathrm{cap}\,(\Gamma) = +\infty$ si $\alpha(\Gamma)$ est vide.

On a tout d'abord:

6.1. *On ne change pas la valeur de* $\mathrm{cap}\,(\Gamma)$ *si on remplace* $\alpha(\Gamma)$ *par l'ensemble* $\alpha_0(\Gamma)$ *des fonctions* $u \in H(M)$ *qui vérifient seulement* $u \leq 0$ *sur* C_0 *et* $u \geq 1$ *sur* C_1, *ou par l'ensemble* $\alpha_1(\Gamma)$ *des fonctions* $u \in H(M)$ *qui vérifient* $u = 0$ *sur* C_0 *et* $u = 1$ *sur* C_1 *(sans vérifier nécessairement* $0 \leq u \leq 1$ *sur* M).

Démonstration. Les inclusions $\alpha(\Gamma) \subset \alpha_1(\Gamma) \subset \alpha_0(\Gamma)$ impliquent:

$$(2) \qquad \inf_{u \in \alpha_0(\Gamma)} I(u, M) \leq \inf_{u \in \alpha_1(\Gamma)} I(u, M) \leq \inf_{u \in \alpha(\Gamma)} I(u, M) .$$

D'autre part si $u \in \alpha_0(\Gamma)$, considérons la fonction v définie par $v(x) = u(x)$ si $0 \leq u(x) \leq 1$; $v(x) = 0$ si $u(x) \leq 0$ et $v(x) = 1$ si $u(x) \geq 1$. D'après 1.4 on a $v \in H(M)$, avec $I(v, M) \leq I(u, M)$, d'où $v \in \alpha(\Gamma)$. On a donc

$$\inf_{v \in \alpha(\Gamma)} I(v, M) \leq \inf_{u \in \alpha_0(\Gamma)} I(u, M)$$

de sorte que les inégalités (2) sont, en fait des égalités. q.e.d.

D'autre part la capacité d'un condensateur $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ ne change évidemment pas si l'on échange C_0 et C_1.

6.2. *Pour que le condensateur* $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ *ait une capacité conforme finie, il suffit que l'un des ensembles* C_0, C_1 *soit compact.*

Démonstration. Supposons C_0 compact; et, pour tout $x \in M$, soit $f(x) = \inf_{y \in C_0} d_M(x, y)$ la distance géodésique de x à C_0. Pour tous $x, y \in M$, on a $|f(y) - f(x)| \leq d_M(x, y)$; donc f est presque partout différentiable et vérifie $|df| \leq 1$.

Le nombre $\delta = \inf_{x \in C_1} f(x)$ étant > 0, posons $K = \{x \in M \mid f(x) \leq \delta\}$. L'ensemble K étant compact, on a $\int_K |df|^n d\tau_M < \infty$. La fonction $u\colon M \to R$, $x \mapsto \inf(f(x)/\delta, 1)$ vérifie $u = 0$ sur C_0, $u = 1$ sur $M \backslash K$ (donc $u = 1$ sur C_1) et coïncide avec f/δ sur K. On en déduit que u est admissible pour Γ, d'où $\operatorname{cap}(\Gamma) < \infty$.

6.3. *Soit C_1 une partie fermée de la variété M telle que $M \backslash C_1$ soit non vide, et soit $a \in M \backslash C_1$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il, existe un voisinage V de a, ne rencontrant pas C_1, tel que, pour tout fermé C_0 contenu dans V, le condensateur $\Gamma = (M \backslash (C_0 \cup C_1), C_0, C_1)$ vérifie* $\operatorname{cap}(\Gamma) < \varepsilon$.

Démonstration. Soit A un voisinage compact de a, ne rencontrant pas C_1, tel qu'il existe un difféomorphisme θ de A sur une boule fermée $\bar{B}(0, R)$ de E_n, vérifiant:

$$1/\sqrt{2} \leq |\theta(y) - \theta(x)|/d_M(x, y) \leq \sqrt{2} \qquad \forall x, y \in A ,$$

(cf. lemme 2.2). On peut évidemment supposer $R < 1$. Pour chaque $r \in]0, R[$, soit v_r la fonction numérique définie sur $\bar{B}(0, R)$ par:

$$v_r(x) = \begin{cases} \operatorname{Log}(|x|/r^2) & \text{si } r^2 \leq |x| \leq r , \\ 0 & \text{si } |x| < r^2 , \\ 1 & \text{si } |x| > r . \end{cases}$$

La fonction $u_r = v_r \circ \theta$ vérifie $u_r = 0$ sur l'ensemble $V_r = \{x \in A \mid |\theta(x)| \leq r^2\}$ et $u_r = 1$ sur ∂A. Nous pouvons la prolonger en une fonction continue sur M en posant $u_r = 1$ sur $M \backslash A$, ce qui implique $u_r = 1$ sur C_1. La fonction u_r est admissible pour tout condensateur $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ tel que le fermé C_0 soit contenu dans V_r; et (puisque θ est 2-quasi-conforme) on a:

$$I(u_r, M) = I(u_r, A) \leq 2^n I(V_r, B(0, R)) \quad \text{avec} \quad n = \dim(M)$$

soit, par un calcul facile:

$$I(u_r, M) \leq 2^n \omega_{n-1} (\operatorname{Log} r^{-1})^{1-n} ,$$

où ω_{n-1} désigne la mesure $(n - 1)$-dimensionnelle de la sphère unité de E_n.

Pour r assez petit, on a donc $\operatorname{cap}(\Gamma) \leq I(u_r, M) \leq \varepsilon$ pour tout condensateur $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ tel que $C_0 \subset V_r$; et V_r est un voisinage de a. q.e.d.

Il en résulte que si $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ est un condensateur tel que C_0 ou C_1 se réduise à un point, on a cap $(\Gamma) = 0$.

Par extension du théorèm 5.1 de [6], on a enfin:

Théorème 6.5. *Sur une variété riemannienne M, soit $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ un condensateur de capacité finie tel que C_0 et C_1 soient des continus non réduits à un point ou des continus relatifs (voir fin* § 4). *Il existe alors une fonction unique u, admissible pour Γ et semi-ouverte sur C, telle que $I(u, M) =$* cap (Γ). *Cette fonction u sera appelée extrémale relative à Γ. Si C_0 et C_1 sont des continus relatifs, u est semi-ouverte sur tout M.*

Démonstration. Soit (u_α) une suite de fonctions admissibles pour Γ telles que $\lim_{\alpha\to\infty} I(u_\alpha, M) = \text{cap}(\Gamma)$. Pour chaque $\alpha \in N$, la proposition 3.5 assure l'existence d'une fonction numérique v_α, continue sur M et semi-ouverte sur C, prenant mêmes valeurs que u sur C_0 et C_1, satisfaisant à $I(v, M) \leq I(u_\alpha, M)$ et $0 \leq v_\alpha \leq 1$ sur M.

Les fonctions v_α sont admissibles pour Γ, et on a aussi $\lim_{\alpha\to\infty} I(v_\alpha, M) =$ cap (Γ).

Si C_0 et C_1 sont de vrais continus, non réduits à un point, nous fixerons arbitrairement un point a_0 dans C_0 et un point a_1 dans C_1. D'après le corollaire 2 de 4.3 les fonctions v_α sont semi-ouvertes sur $M\backslash\{a_0, a_1\}$; et d'après le théorème 5.1 elles forment une famille uniformément équicontinue sur tout compact de $M\backslash\{a_0, a_1\}$. On peut donc en extraire une suite $(w_\lambda) = (v_{\alpha_\lambda})$ convergeant uniformément sur tout compact de $M\backslash\{a_0, a_1\}$. Mais si $b_0 \in C_0$ et $b_1 \in C_1$ sont deux autres points, les fonctions v_α sont aussi semi-ouvertes sur $M\backslash\{b_0, b_1\}$; et elles forment une famille uniformément équicontinue sur chaque compact de $M\backslash\{b_0, b_1\}$. On en déduit que la suite (w_λ) est uniformément convergente sur chaque compact de M. D'après 1.3 la fonction $u = \lim_{\lambda\to\infty} (w_\lambda)$ appartient à $H(M)$ et vérifie

$$I(u, M) \leq \liminf_{\lambda\to\infty} I(w_\lambda, M) ,$$

soit $I(u, M) \leq \text{cap}(\Gamma)$; d'autre part, on a $u = 0$ sur C_0 et $u = 1$ sur C_1. Donc u est admissible pour Γ, et on a nécessairement $I(u, M) = \text{cap}(\Gamma)$.

Enfin, d'après le théorème 3.3, u est semi-ouverte sur C, comme les fonctions v_α.

Si C_0 et C_1 sont des continus relatifs, la démonstration est simplifiée du fait que les fonctions v_α sont semi-ouvertes sur tout M (prop. 4.3) donc uniformément équicontinues sur tout compact de M. La fonction limite u est alors semi-ouverte sur M.

On traiterait de même le cas où l'un des ensembles C_0, C_1 est un continu relatif, et l'autre un continu non réduit à un point.

Dans tous les cas l'unicité de u se démontre, comme dans le cas euclidien, par application de l'inégalité de Clarkson (cf. [6, lemme 5.1]).

Corollaire. *Si $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ est un condensateur tel que C_0 et C_1 soient* *des continus relatifs ou des continus non réduits à un point, on a* cap $(\Gamma) > 0$.

Démonstration. La fonction extrémale u relative à Γ est non constante; on a donc cap $(\Gamma) = I(u, M) > 0$.

7. Variétés de type $\mathscr{H}_0$, distance conforme

Définition 7.1. Une variété riemannienne M sera dite de type $\mathscr{H}_0$ si la famille $H^*(M)$ sépare les points de M.

On voit immédiatement que la classe $(\mathscr{H}_0)$ est invariante par tout homéomorphisme quasi-conforme.

Exemples. 1) Tout domaine borné D de E_n est de type $\mathscr{H}_0$. En effet les fonctions coordonnées sont semi-ouvertes sur tout domaine de $\boldsymbol{R}^n$; et, si D est borné, elles appartiennent à $H(D)$, donc à $H^*(D)$.

2) E_n n'est pas de type $\mathscr{H}_0$. En effet si $\delta(r)$ désigne l'oscillation, sur la sphère $|x| = r$, d'une fonction $u \in H^*(E_n)$, on doit avoir:

$$\int_0^\infty \frac{\delta^n(r)}{r} dr \leq A_n I(u, E_n)$$

(cf. lemme 2.1); et puisque u est semi-ouverte la fonction δ est croissante: cela n'est possible que si on a $\delta(r) = 0$ pour tout $r > 0$, c'est-à-dire $u = C^{te}$. L'ensemble $H^*(E_n)$ se réduit donc aux fonctions constantes.

3) Enfin il est évident qu'une variété compacte M ne peut être de type $\mathscr{H}_0$ puisque, dans ce cas $H^*(M)$ est vide.

Théorème 7.1. *Si M est une variété de type $\mathscr{H}_0$ et de dimension n, on obtient une distance δ_M sur M en posant*:

$$(1) \qquad \delta_M(x, y) = \sup_{u \in H^*(M)} \{|u(x) - u(y)| / [I(u, M)]^{1/n}\}$$

soit

$$(2) \qquad \delta_M(x, y) = \sup_{u \in H_1^*(M)} |u(x) - u(y)|$$

en désignant par $H_1^*(M)$ l'ensemble des $u \in H^*(M)$ vérifiant $I(u, M) = 1$.

Démonstration. Tout d'abord on a $\delta_M(x, y) = 0$ si, et seulement si, on a $u(x) = u(y)$ pour tout $u \in H^*(M)$, c'est-à-dire si $x = y$ (puisque $H^*(M)$ sépare les points de M). D'autre part l'inégalité triangulaire $\delta_M(x, z) \leq \delta_M(x, y) + \delta_M(y, z)$ est évidente. Il reste à montrer que $\delta_M(x, y)$ est *fini*, quels que soient $x, y \in M$.

Les points x, y étant donnés, soit γ un arc compact joignant x à y dans M. D'après le théorème 4.1 il existe un nombre $\alpha < 1$ tel que, pour tous $a, b \in \gamma$ vérifiant $d_M(a, b) \leq \alpha$, on ait, pour tout $u \in H^*(M)$:

$$|u(a) - u(b)| \leq B_n[I(u, M) / |\text{Log}\, d_M(a, b)|]^{1/n} .$$

Il existe alors une chaîne finie $a_0 = x, a_1, \cdots, a_p = y$ de points de γ vérifiant pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$, $d_M(a_{i-1}, a_i) \leq \alpha$; et on a, pour tout $u \in H^*(M)$:

$$|u(x) - u(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |u(a_i) - u(a_{i-1})| \leq pB_n[I(u, M)/|\operatorname{Log} \alpha|]^{1/n} ,$$

d'où $\delta_M(x, y) \leq pB_n/|\operatorname{Log} \alpha|^{1/n}$. q.e.d.

Pour des raisons évidentes d'homogénéité, l'intégrale $I(u, M)$ reste invariante si on remplace la métrique riemannienne de M par une métrique conformément équivalente. La distance δ_M ne dépend donc que de la structure conforme de M. Nous l'appellerons *distance conforme*. Cette distance reste invariante dans tout automorphisme conforme de M; et, plus généralement, on a:

7.2. *Si $\varphi: M \to N$ est un homéomorphisme k-quasiconforme de variétés riemanniennes de type $(\mathscr{H}_0)$, on a, pour tous $x, y \in M$:*

$$\delta_N[\varphi(x), \varphi(y)] \leq k\delta_M(x, y) .$$

On a d'autre part:

7.3. *Si M est une variété de type $\mathscr{H}_0$, chaque sous variété ouverte V de M est de type $\mathscr{H}_0$; et, pour tous $x, y \in V$, on a:*

$$\delta_V(x, y) \geq \delta_M(x, y) .$$

Cela résulte immédiatement du fait que les traces sur V des fonctions $u \in H^*(M)$, appartiennent à $H^*(V)$.

Remarque. Si M, N sont deux variétés de type $\mathscr{H}_0$, les homéomorphismes quasi-conformes de M sur N sont lipschitziens, ainsi que leurs réciproques, pour la distance conforme. Il est probable que cette propriété les caractérise; mais la démonstration exigerait une évaluation plus précise de la distance conforme que celle que nous avons pu obtenir jusqu'ici.

Nous étudions maintenant la structure topologique définie par la distance conforme.

7.4. *La structure topologique définie par la distance conforme δ_M est moins fine que la structure topologique initiale de M (associée à la distance géodésique d_M); et, sur toute partie compacte K de M (au sens de la topologie initiale) ces deux topologies coïncident.*

Démonstration. Pour montrer que la δ-topologie est moins fine que la d-topologie, il suffit de prouver que chaque δ-boule contient une d-boule de même centre. Or, pour chaque $a \in M$, le théorème 4.1 montre qu'il existe un nombre $\alpha \in]0, 1[$ tel que l'inégalité $d_M(a, x) \leq \alpha$ entraîne, pour tout $u \in H^*(M)$:

$$|u(x) - u(a)| \leq B_n[I(u, M)/|\operatorname{Log} d_M(a, x)|]^{1/n} .$$

L'inégalité

$$d_M(a, x) \leq \inf [\alpha, \exp(-(B_n/\varepsilon)^n)]$$

entraîne donc $\delta_M(a, x) \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

D'autre part, si (x_n) est une suite de points d'un compact K telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_M(a, x_n) = 0$, on a, pour tout $u \in H^*(M)$: $\lim_{n\to\infty} [u(a) - u(x_n)] = 0$; la suite (x_n) ne peut donc avoir d'autre valeur d'adhérence que a pour la topologie initiale, et on a: $\lim_{n\to\infty} d_M(a, x_n) = 0$. La seconde partie de 7.4 en résulte.

Corollaire. *La fonction δ_M est continue sur $M \times M$ (pour la topologie initiale de M).*

Nous verrons plus loin que, sur les sous-variétés propres d'une variété non compacte, la topologie conforme coïncide avec la topologie initiale. La question se pose évidemment de savoir si cette propriété est vraie pour toute variété de type $\mathscr{H}_0$. Nous ne l'avons pas résolue jusqu'ici.

Pour clore ce section nous allons montrer que la distance conforme possède une propriété qui n'est vérifiée par la distance géodésique que sur certaines variétés (par exemple, sur les variétés simplement connexes de courbure négative; cf. [4, lemme 6.1]).

7.5. *Sur une variété riemannienne M de type $\mathscr{H}_0$, le diamètre conforme d'un compact quelconque K est égal au diamètre de sa frontière.*

Démonstration. Pour toute fonction numérique u continue et semi-ouverte sur M, l'inclusion $\partial u(K) \subset u(\partial K)$ entraîne:

$$\sup_{x,y\in K} |u(x) - u(y)| = \sup_{x,y\in \partial K} |u(x) - u(y)| ,$$

d'où, si $I(u, M) = 1$:

$$\sup_{x,y\in K} |u(x) - u(y)| \leq \sup_{x,y\in \partial K} \delta_M(x, y) ;$$

et enfin:

$$\sup_{x,y\in K} \delta_M(x, y) \leq \sup_{x,y\in \partial K} \delta_M(x, y) . \qquad \text{q.e.d.}$$

On peut aussi montrer que le complémentaire d'une δ_M-boule ouverte est un continu relatif de M.

8. Expression de la distance conforme au moyen de capacites, cas d'une boule euclidienne

On a tout d'abord:

8.1. *Soient x, y deux points distincts quelconques d'une variété M de type $\mathscr{H}_0$, et soit A_{xy} l'ensemble des fonctions $u \in H^*(M)$ telles que $u(x) = 1$, $u(y) = 0$. Posant $n =$ dim (M), on a alors:*

$$\delta_M(x, y) = \sup_{u \in A_{xy}} [I(u, M)]^{-1/n} ; \tag{1}$$

et il existe une fonction $u \in A_{xy}$ telle que

$$\delta_M(x, y) = [I(u, M)]^{-1/n} . \tag{2}$$

Démonstration. La relation (1) résulte immédiatement de la définition de δ_M (cf. théorème 7.1).

Considérons alors une suite $u_\alpha \in A_{xy}$ telle que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} I(u_\alpha, M) = [\delta_M(x, y)]^{-n} .$$

D'après le théorème 5.1 la suite (u_α) est uniformément équicontinue sur tout compact de M; on peut en extraire une suite partielle convergeant uniformément sur tout compact de M; et la limite u de cette suite vérifie (2) à cause de la semi-continuité de $I(u, M)$ (prop. 1.3).

8.2. *Soient x, y deux points distincts quelconques d'une variété M de type $\mathscr{H}_0$; il existe alors deux continus relatifs disjoints C_0, C_1, tels que $x \in C_0$, $y \in C_1$ et tels que la fonction extrémale v relative au condensateur $\Gamma = (M \backslash (C_0 \cup C_1), C_0, C_1)$ vérifie*

$$I(v, M) = [\delta_M(x, y)]^{-n} . \tag{3}$$

Démonstration. Soit u la fonction dont la proposition 7.1 affirme l'existence. D'après 4.2 nous savons que les ensembles

$$C_0 = \{z \in M \mid u(z) \leq 0\} \quad \text{et} \quad C_1 = \{z \in M \mid u(z) \geq 1\}$$

sont des continus relatifs (voir fin § 4); et il résulte de 6.1 que le condensateur Γ, défini par ces deux fermés, a une capacité finie. La fonction extrémale v, relative à ce condensateur, vérifie

$$I(v, M) \leq I(u, M) \leq [\delta_M(x, y)]^{-n} , \tag{4}$$

d'autre part v est semi-ouverte sur M d'après 6.5; donc $v \in H^*(M)$, en on a:

$$\delta_M(x, y) \geq |v(y) - v(x)| / [I(v, M)]^{1/n} = [I(v, M)]^{-1/n} ,$$

d'où, par comparaison avec (4), l'égalité (3).

Théorème 8.3. *Si x, y sont deux points distincts quelconques d'une variété M de type $\mathscr{H}_0$, et si γ_{xy} désigne l'ensemble des condensateurs (C, C_0, C_1) tels que C_0 et C_1 soient des continus relatifs disjoints vérifiant $x \in C_0$, $y \in C_1$, on a:*

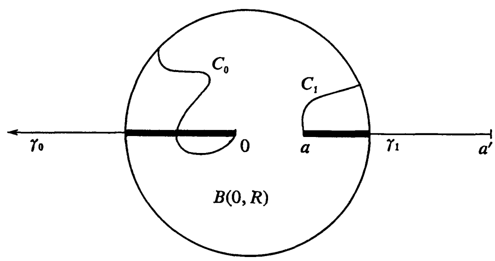
$$\delta_M(x, y) = \sup_{\Gamma \in \gamma_{xy}} [\operatorname{cap}(\Gamma)]^{-1/n} .$$

Démonstration. Si $\Gamma \in \gamma_{xy}$ est un condensateur de capacité finie, et si u désigne l'extrémale relative à Γ, on a $u(x) = 0$, $u(y) = 1$ et $u \in H^*(M)$ (par application de 4.3) d'où

$$\delta_M(x, y) \geq [I(u, M)]^{-1/n} = [\mathrm{cap}\,(\Gamma)]^{-1/n} .$$

D'autre part, d'après 8.2, il existe un condensateur $\Gamma \in \gamma_{xy}$ tel que $\delta_M(x, y) = [\mathrm{cap}\,(\Gamma)]^{-1/n}$; d'où le résultat.

Cas d'une boule euclidienne. Nous savons déjà que toute boule de E_n est de type $\mathscr{H}_0$ (puisque c'est un ouvert borné). Pour calculer la distance conforme de deux points de la boule $B(0, R)$ nous pouvons nous remener au cas où l'un des points est au centre de la boule, l'autre point a étant quelconque. Soit alors $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ un condensateur de $B(0, R)$ défini par deux continus relatifs C_0, C_1 passant respectivement par $0, a$. Pour tout $r \in [0, R[$, la sphère $|x| = r$ rencontre C_0, et pour tout $r \in [|a|, R[$, cette sphère coupe C_1 (voir figure). Le procédé de symétrisation sphérique de Pólya-Szegö [7, p. 205] montre que le minimum de cap (Γ) est atteint lorsque C_0 est le rayon passant par le point $-a$, et C_1 le segment $[a, Ra/|a|]$.



Une symétrie par rapport à la sphère $|x| = R$ permet ensuite de prouver que ce minimum est égal à la moitié de la capacité du condensateur Γ' défini, dans E_n, par la donnée de la demi-droite γ_0, d'origine 0, passant par le point $-a$, et du segment γ_1 joignant les points inversee a, $a' = aR^2/|a|^2$. Or Γ' se déduit du condensateur de Teichmüller par une similitude (cf. [6, p. 81]) ; et par un calcul facile, on a:

$$\mathrm{cap}\,(\Gamma') = \frac{\omega_{n-1}}{(\mathrm{mod}\,\Gamma')^{n-1}} = \frac{\omega_{n-1}}{|\mathrm{Log}\,\Psi_n[|a|^2/(R^2 - |a|^2)]|^{n-1}}$$

en désignant par Ψ_n la fonction de Teichmüller et par ω_{n-1} la mesure $(n-1)$-dimensionnelle de la sphère unité de E_n. Nous énoncerons:

8.4. *Si M est la sous variété de E_n constituée par la boule ouverte $B(0, R)$, on a, pour tout $a \in M$:*

$$\delta_M(0, a) = (2/\omega_{n-1})^{1/n} |\mathrm{Log}\,\Psi_n[|a|^2/(R^2 - |a|^2)]|^{1-1/n} ,$$

où Ψ_n désigne la fonction de Teichmüller.

Rappelons que la distance hyperbolique des points $0, a$ est égale à $\operatorname{Log}[(R + |a|)/(R - |a|)]$.

Les propriétés de la fonction Ψ_n (cf. [6, lemme 7.3]) montrent que la fonction $r \mapsto (R^2 - r^2)\Psi_n[r^2/(R^2 - r^2)]$ est croissante sur $[0, R[$. On en déduit que $\delta_M(0, a)$ est une fonction croissante de $|a|$, et que: $\lim_{|a| \to R} \delta_M(0, a) = +\infty$. Cela permet de montrer que la distance δ_M est compatible avec la topologie de $M = B(0, R)$.

Application: Majoration de la distance conforme au voisinage d'un point. Revenons au cas d'une variété quelconque M de type $\mathscr{H}_0$, et soit $a \in M$. En procédant comme au § 2, on voit facilement qu'il existe un voisinage U de a admettant un difféomorphisme θ sur une boule euclidienne $B = B(0, R)$, vérifiant $\theta(a) = 0$ et:

$$\tfrac{1}{2} \leq |\theta(y) - \theta(x)|/d_M(x, y) \leq 1 \qquad \forall x, z \in U .$$

D'après 7.3 on a $\delta_M(a, x) \leq \delta_U(a, x)$ pour tout $x \in U$; et puisque θ^{-1} est 2-quasi-conforme, on a, d'après 7.2:

$$\delta_U(a, x) \leq 2\delta_B[0, \theta(x)]$$

avec $|\theta(x)| < d_M(a, x)$.

Si on pose $\varphi_n(t) = [\operatorname{Log} \Psi_n(t^2/(1 - t^2))]^{1-1/n}$, on a donc, d'après l'étude qui précède:

$$\delta_M(a, x) \leq (2/\omega_{n-1})^{1/n}\varphi_n(d_M(a, x)/R) .$$

Nous obtenons ainsi, au voisinage de a, une majoration qu'il n'est pas possible en général d'améliorer.

En s'appuyant sur le fait que la suite Ψ_n est décroissante (cf. [1] et [2]) et sur le développement asymptotique de Ψ_2 qui se déduit de l'étude faite dans [3], on voit ainsi qu'au voisinage de a, on a:

$$\delta_M(a, x) = 0\,([\operatorname{Log}(R/d_M(a, x))]^{1-1/n}) .$$

9. Ecarts conformes sur une variété non compacte

Théorème 9.1. *Soit M une variété riemannienne non compacte quelconque. Pour chaque $a \in M$, la variété $M_a = M \backslash \{a\}$ est de type $\mathscr{H}_0$; la distance conforme de M_a est compatible avec sa topologie, et, pour tout $y \in M_a$, on a:*

$$(1) \qquad \lim_{x \to a} \delta_{M_a}(x, y) = +\infty .$$

Démonstration. Soient x, y deux points distincts dans M_a. On peut tout d'abord joindre x à a par un continu compact γ_0 tel que $M \backslash \gamma_0$ soit connexe (par exemple un arc simple); et on peut ensuite construire un continu non compact γ_1, contenant y et ne rencontrant pas γ_0 (on pourra considérer une suite (y_n) de points de $M \backslash \gamma_0$, tendant vers l'infini dans M, telle que $y_0 = y$, et, pour chaque $n \in N$, joindre y_n à y_{n+1} par un arc C_n contenu dans $M \backslash \gamma_0$. La réunion des C_n donne le continu cherché).

Les deux continus disjoints γ_0, γ_1 déterminent un condensateur Γ de M dont la capacité est finie (puisque γ_0 est compact). D'autre part les ensembles $\gamma_0 \backslash \{a\}$ et γ_1 sont des continus relatifs de M_a. Si u est l'extrémale relative à Γ, on en déduit que sa restriction à M_a, soit u_a, est semi-ouverte sur M_a. Donc $u_a \in H^*(M_a)$ et vérifie $u_a(x) = 0$, $u_a(y) = 1$: la famille $H^*(M_a)$ sépare donc les points de M_a, et M_a est de type $\mathscr{H}_0$.

Montrons maintenant que, pour tout $y \in M_a$, on a: $\lim_{x \to a} \delta_{M_a}(x, y) = +\infty$. Désignons par γ_1 un continu non compact tel que $y \in \gamma_1$ et $a \notin \gamma_1$. D'après le lemme 6.3 on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de a tel que tout condensateur $\Gamma = (C, \gamma_0, \gamma_1)$ de M vérifiant $\gamma_0 \subset V_\varepsilon$ ait une capacité inférieure à ε.

Nous pouvons supposer que V_ε est connexe et ne rencontre pas γ_1. Pour tout $x \in V_\varepsilon$ il existe alors un continu compact γ_0 joignant x à a dans V_ε; et le condensateur Γ associé vérifie:

$$\delta_{M_a}(x, y) \geq (\operatorname{cap} \Gamma)^{-1/n} \geq \varepsilon^{-1/n} ,$$

ce qui établit (1).

Montrons enfin que la topologie définie par la distance conforme δ_{M_a} est plus fine que la topologie de sous variété de M_a. Sinon, il existerait un point x de M_a et une suite (x_n) de points de M_a, ne convergeant pas vers x, vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} \delta_{M_a}(x, x_n) = 0 . \tag{2}$$

D'après (1) une telle suite (x_n) ne pourrait admettre a pour valeur d'adhérence; d'autre part elle ne pourrait admettre dans M_a d'autre valeur d'adhérence que x; car, d'après (2) on devrait avoir $u(x) = u(y)$ pour toute valeur d'adhérence y de cette suite et tout $u \in H^*(M_a)$. La suite (x_n) ne serait donc contenue dans aucun compact de M, et on pourrait en extraire une suite (x_{n_p}) tendant vers l'infini dans M.

Désignant par γ_0 un continu compact joignant a à x dans M, et tel que $M \backslash \gamma_0$ soit connexe, on pourrait construire un continu γ_1, disjoint de γ_0 et contenant une infinité de points (x_{n_p}); le continu γ_1 serait non compact; le condensateur Γ déterminé par γ_0 et γ_1 aurait une capacité finie; et pour tout point x_{n_p} appartenant à γ_1 on aurait:

$$\delta_{M_a}(x, x_{n_p}) \geq (\operatorname{cap} \Gamma)^{-1/n} ,$$

ce qui est en contradiction avec (2).

Le δ_{M_a}-topologie est donc à la fois plus fine et moins fine que la topologie de M_a (cf. prop. 7.4); d'où le résultat. q.e.d.

On en déduit:

9.2. *Sur une variété riemannienne non compacte quelconque M, on obtient une famille d'écarts e_a ($a \in M$) en posant:*

$$e_a(x, y) = \delta_{M_a}(x, y) \quad si \quad x, y \in M\backslash\{a\} ,$$
$$e_a(x, a) = +\infty \quad si \quad x \neq a , \quad e_a(a, a) = 0 .$$

Si $\mathscr{E}_a$ désigne la topologie définie par e_a, la topologie de M est la borne inférieure des topologies $\mathscr{E}_a$.

En effet, les ouverts de la topologie $\mathscr{E}_a$ sont les ouverts de M et l'ensemble $\{a\}$.

Si M est de type $\mathscr{H}_0$, on établit facilement l'égalité $\delta_M = \inf_{a \in M} e_a$.

9.3. *Si M est une variété non compacte quelconque, chaque sous-variété ouverte propre V de M est de type $\mathscr{H}_0$, et la distance conforme de V est compatible avec sa topologie de sous-variété.*

Démonstration. Si a est un point de $M\backslash V$, on peut considérer V comme une sous-variété de $M_a = M\backslash\{a\}$. D'après 7.3, V est de type $\mathscr{H}_0$ et vérifie $\delta_V \geq \delta_{M_a}$. Cette inégalité montre que la topologie définie par δ_V est plus fine que la topologie définie par δ_{M_a}, donc plus fine que la topologie $\mathscr{E}$ de sous-variété de V; et d'après 7.4 la δ_V-topologie est moins fine que $\mathscr{E}$, d'où le résultat.

10. Invariants conformes

A chaque couple (x, y) de points d'une variété M de type ($\mathscr{H}_0$) nous avons associé l'invariant conforme $\delta_M(x, y)$.

A chaque triplet (x, y, z) de points d'une variété non compacte quelconque, la construction du § 9 permet d'associer le nombre (fini ou égal à $+\infty$): $i(x, y, z) = e_z(x, y)$; ce nombre ne dépend que de la structure conforme de M, et des points x, y, z. C'est encore un invariant conforme, tel que:

$$i(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x = y \quad \text{et}$$
$$i(x, y, z) = +\infty \Longleftrightarrow (x = z \text{ et } y \neq z) \quad \text{ou} \quad (y = z \text{ et } z \neq y) .$$

Si x, y, z, t sont quatre points d'une variété M quelconque, et si $z \neq t$, la variété $M_{zt} = M\backslash\{z, t\}$ est de type $\mathscr{H}_0$ (puisqu'elle se déduit de la variété non compacte $M\backslash\{z\}$ en enlevant le point t). On obtient donc un invariant conforme attaché aux quatre points x, y, z, t, en posant $j(x, y, z, t) = \delta_{M_{zt}}(x, y)$.

Désignons par $A(x, y, z, t)$ l'ensemble des condensateurs $\Gamma = (C, C_0, C_1)$ de M définis par la donnée d'un continu C_0 joignant x à z ou t et d'un continu C_1, disjoint de C_0, joignant y à t ou z. Si la variété M est compacte on obtient facilement par application du théorème 8.3, la relation:

$$j(x, y, z, t) = \sup_{\Gamma \in A(x,y,z,t)} [\mathrm{cap}\,(\Gamma)]^{-1/n} .$$

Or l'ensemble $A(x, y, z, t)$ ne change pas si on permute les couples (x, y) et (z, t). On a donc alors $j(x, y, z, t) = j(z, t, x, y)$.

Nous énoncerons:

10.1. *Si M est une variété compacte, il existe une fonction numérique positive j sur M^4, ne dépendant que de la structure conforme de M, et par conséquent invariante dans tout homéomorphisme conforme, telle que*:

i) $j(x, y, z, t) = j(y, x, z, t) = j(t, z, x, y)$,

ii) $(j(x, y, z, t) = 0) \Longleftrightarrow (x = y$ *ou* $z = t)$,

iii) $j(x, y, z, t)$ *est une fonction continue du couple* (x, y) *sur* $M^2 \backslash \{(z, t), (t, z)\}$; *et* $j(x, y, z, t)$ *tend vers* $+\infty$ *si* (*les points* y, z, t *restant fixes*) x *tend vers* z *ou* t.

Lorsque M est la sphère de Riemann, l'invariant conforme $j(x, y, z, t)$ est évidemment une fonction du rapport anharmonique des points x, y, z, t.

L'existence et les propriétés de cet invariant permettraient d'obtenir un résultat voisin de la proposition 7.3 de [4] et d'en déduire une nouvelle démonstration de la conjecture de Lichnérowicz.

Dans le cas des variétés non compactes, l'existence d'invariants conformes permet d'obtenir des résultats nouveaux. Par exemple, si $C_0(M)$ désigne la composante connexe du groupe des automorphismes conformes de M, nous avons:

Théorème 10.1. *Soit M une variété riemannienne non compacte telle que $C_0(M)$ admette deux orbites $0_1, 0_2$ d'adhérences disjointes. Alors M est la réunion de sous-variétés ouvertes sur chacune desquelles il existe une distance conforme, compatible avec sa topologie de sous-variété et invariante par $C_0(M)$.*

Démonstration. M est la réunion des composantes connexes des ouverts $U_i = M \backslash \bar{O}_i$ $(i = 1, 2)$; et chacune de ces composantes est une sous-variété ouverte propre V de M, donc une variété de type $\mathscr{H}_0$, invariante par $C_0(M)$. D'après 7.4 la distance conforme de V est compatible avec sa topologie, et cette distance est invariante par $C_0(M)$. q.e.d.

On a d'autre part:

Théorème 10.2. *Soit ξ un champ de vecteurs conforme engendrant un groupe global sur une variété M de type $\mathscr{H}_0$. On a alors $\delta\xi = 0$ en tout point où $\xi = 0$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $a \in M$ tel que $\xi(a) = 0$ et $\delta\xi(a) \neq 0$; et, pour fixer les idées, supposons $\delta\xi(a) > 0$. Il existe alors un voisinage V de a tel que l'orbite de tout point de V passe par a, et tel que le groupe $t \rightarrow \varphi(t, x)$ engendré par ξ vérifie:

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t, x) = a \qquad \forall x \in V ,$$

(cf. par exemple, A. Avez, *Transformations conformes des variétés rieman-*

niennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris **259** (1964) 4469–4472).

Or, pour tous $x, y \in V$ et tout $t \in R$, on a:

$$\delta_M[\varphi(t,x), \varphi(t,y)] = \delta_M(x,y) , \qquad \lim_{t \to -\infty} \delta_M[\varphi(t,x), \varphi(t,y)] = \delta_M(a,a) = 0 .$$

En supposant $x \neq y$ on aboutit à une contradiction. q.e.d.

On a de même:

Théorème 10.3 *Soit ξ un champ de vecteurs conforme engendrant un groupe global sur une variété non compacte M. Il existe alors au plus un point a de M tel que $\xi(a) = 0$ et $\delta\xi(a) \neq 0$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux points $a, b \in M$ vérifiant cette condition; et soit toujours $t \mapsto \varphi(t,x)$ le groupe engendré par ξ. L'écart e_b défini par la distance conforme de $M \setminus \{b\}$ est invariant par φ, et on raisonne comme dans le cas précédent, en remplaçant δ_M par e_b.

Conclusion. Les résultats obtenus ne sont qu'un premier pas dans le problème de la réduction du groupe $C(M)$ des automorphismes conformes à un groupe d'isométries; et la première question qui se pose set de savoir si, sur une variété de type $\mathscr{H}_0$, il existe une métrique riemannienne conformément invariante.

Quoiqu'il en soit, l'existence de la distance conforme δ_M montre que le groupe $C(M)$ d'une variété type de $\mathscr{H}_0$ se comporte "comme un groupe d'isométries" et il est probable qu'il est effectivement réductible à un groupe d'isométries.

Bibliographie

[1] P. Caraman, C. W. Grötsch O. Teichmüller, *Rings in plane and* n-*space,* Proc. Remanian-Finnish Seminar, Brosov, 1969.

[2] F. Gehring, *Extremal length definitions for the conformal capacity of rings in space,* Michigan Math. J. **9** (1962) 137–150.

[3] P. Lehto & K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen,* Springer, Berlin, 1965.

[4] J. Lelong-Ferrand, *Transformations conformes et quasi-conformes des variété riemanniennes compacts (Démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz),* Mém. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, **39** (1971).

[5] ——, *Étude d'une classe d'applications liées à des homéomorphismes d'algèbres, de fonctions,* Duke Math. J. **40** (1973) 163–186.

[6] G. D. Mostow, *Quasiconformal mappings in* n-*space and the rigidity of hyperbolic space forms,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 34 (1968) 53-104.

[7] G. Pólya & G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics,* Annals of Math. Studies, No. 27, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[8] L. Sario & M. Nakai *Classification theory of Riemann surfaces,* Springer, Berlin, 1970.

[9] J. Vaïsala, *Two new characterizations for quasiconformality,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I, **362** (1965) 1–12.

[10] G. T. Whyburn, *Topological analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1958.

UNIVERSITÉ DE PARIS