J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
7 (1972) 489-518

SUR QUELQUES PROPRIETES DES G-STRUCTURES

P. MOLINO

Introduction

Le développement, à partir des travaux fondamentaux de Spencer (voir [12] et [13]), de la théorie des déformations et des systèmes différentiels sur les variétés, les résultats récents de Bott (voir [4]), les travaux de Chern (voir [5]), Guillemin-Sternberg (voir [7]), Singer-Sternberg (voir [11]) et d'autres, laissent espérer aujourd'hui pour la théorie des G-structures de nouvelles extensions. Le but du présent travail est d'avancer quelques idées et des résultats partiels dans cette direction.

Voici l'essentiel du contenu des différents chapitres:

Chapitre I. Structures transitives, structures subordonnées. Sur une variété V donnée on étudie la famille des structures (locales ou globales) formellement équivalentes à une G-structure transitive "modèle". On montre que ces structures "admissibles" correspondent aux sections du fibré des G-structures sur V qui sont solutions d'un "système différentiel fondamental" relatif à la classe de G-structures admissibles considérée.

Plus généralement, on se restreint pour traiter le problème précédent au cas des G-structures subordonnées à une H-structure donnée (avec $G \subset H$). L'existence (locale) de structures admissibles subordonnées impose un certain nombre (fini) de conditions, portant sur les tenseurs de structure successifs de la H-structure. Si ces conditions sont vérifiées, les G-structures cherchées sont définies par les sections du fibré des G-structures subordonnées à la H-structure qui sont solutions du système différentiel induit par le système fondamental.

On montre que le système différentiel fondamental peut être interprêté à l'aide des équations classiques de Maurer-Cartan.

Sur l'espace fibré des G-structures (respectivement des G-structures subordonnées à une H-structure donnée) on définit un pseudogroupe de Lie transitif de transformations projetables sur V, dont les éléments échangent entre elles les G-structures de la classe de G-structures admissibles considérée. Le pseudogroupe sera dit "pseudogroupe des déformations simultanées" (respectivement "des déformations simultanées réduites").

Chapitre II. Sous-structures de codimension finie. Le théorème démontré dans ce chapitre est le suivant: Si $E(V, H)$ est une H-structure transitive, admettant localement (au voisinage de chaque point) une G-structure admis-

Communicated by A. Lichnerowicz, March 17, 1971.

sible subordonnée, et si la structure subordonnée est de codimension finie dans $E(V, H)$ (du point de vue des algèbres formelles), alors E admet une G-structure admissible globale subordonnée (en supposant V simplement connexe).

Ce théorème, qui admet un analogue pour le cas des structures presque admissibles, peut encore s'énoncer: si Γ est un pseudogroupe de Lie transitif sur V, tout sous-pseudogroupe de Lie transitif local γ de Γ de codimension finie s'étend en un sous-pseudogroupe de Lie transitif global $\tilde{\gamma}$ ayant même algèbre de Lie que γ. Ceci généralise un résultat classique relatif aux groupes de Lie.

On en déduit des théorèmes d'existence de structures subordonnées à une structure donnée. En particulier on retrouve un résultat démontré directement dans [2] pour les structures plates ou formellement plates.

Chapitre III. G-structures et classes caractéristiques. L'étude du tenseur de structure d'ordre 2 d'une G-structure fournit dans certains cas des renseignements sur les classes caractéristiques de la G-structure.

En particulier, pour les structures plates (ou simplement 2-plates) on obtient des résultats déjà signalés dans [10]. Par exemple, on obtient ainsi les théorèmes de Bott relatifs aux obstructions à l'intégrabilité de champs d'éléments de contact réel ou complexe (voir [4]).

Plus généralement, on définit la notion de G-structure "lisse", en prenant comme modèles des structures transitives invariantes à gauche sur un groupe de Lie, avec pour G un groupe d'automorphismes de l'algèbre de Lie. On démontre que les structures lisses (ou simplement 2-lisses) ont les mêmes propriétés, en ce qui concerne les classes caractéristiques, que les structures plates.

Chapitre IV. Géométrie intrinsèque des G-structures. On généralise de manière naturelle la géométrie riemannienne en définissant, pour toute G-structure, un champ d'éléments "canonique" qui jouera le rôle de la connexion de Levi-Civita. Celle-ci est l'unique connexion sans torsion sur une $0(n)$-structure. Le champ d'éléments canonique sera le sous-espace engendré en chaque point par la réunion des éléments de contact horizontaux associés au premier prolongement de la structure. Pour l'étude détaillée de ce champ canonique, on pourra se référer à N. Boyom [3].

En général le champ d'éléments canonique n'est pas invariant à droite—On notera que c'est le cas si la structure est 1-plate—Ce cas généralise directement la géométrie riemannienne. La *courbure intrisèque* de la G-structure sera la courbure du champ d'éléments canonique. Elle généralise la courbure d'une structure riemannienne.

Chapitre V. Classification des G-structures homotopes. On a déjà donné dans [9] la construction d'un espace universel pour les G-structures. C'est un G-fibré principal $\mathscr{E}_0(\mathscr{B}_G, G)$, muni d'une forme fondamentale θ_0 à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$, qui permet d'obtenir toute G-structure sur une variété arbitraire V à l'aide d'une immersion de V dans $\mathscr{B}_G$, transverse au champ d'éléments de contact défini par θ_0.

En améliorant légèrement cette construction, on peut faire en sorte que $\mathscr{B}_G$ soit un classifiant pour les G-structures homotopes en le sens suivant: deux G-structures sur V induites par les immersions transverses f_1, f_2: $V \to \mathscr{B}_G$ seront homotopes si et seulement si il existe une homotopie d'immersions transverses reliant f_1 et f_2.

I. STRUCTURES TRANSITIVES. STRUCTURES SUBORDONNEES

Dans tout ce qui suit, différentiable signifiera C^∞; V sera une variété différentiable de dimension n, G un sous-groupe de Lie fermé de $GL(n, \boldsymbol{R})$.

On se limitera en général à l'étude des structures d'ordre 1, mais on pourrait sans difficultés généraliser aux structures d'ordre supérieur.

I.1. Système différentiel fondamental

a) *Soit V_0 une variété différentiable* de dimension n munie d'une G-structure "modèle" $e_0(V_0, G)$, transitive.

$R(V, GL(n, \boldsymbol{R}))$ étant l'espace des repères linéaires de V, soit $F_G = R/G$ le fibré des G-structures sur V. Une G-structure est définie par une section de ce fibré. Notons $e_s(V, G)$ la G-structure associée à la section s: $V \to F_G$.

L'équivalence locale entre e_s et e_0 suppose l'égalité des tenseurs de structure (en fait, il sera inutile de vérifier cette égalité au delà de l'ordre de stabilité k_0 de l'algèbre de Lie g de G pour la cohomologie de Spencer). Si cette égalité est vérifiée, e_s est formellement équivalente à e_0.

Pour simplifier la terminologie, on dira que e_s est une G-structure *admissible* (respectivement *presque admissible*) si e_s est équivalente (resp. formellement équivalente) à la structure modèle e_0.

Lemme I.1.1. *Les tenseurs de structure jusqu'à l'ordre k de e_s en un point ne dépendent que du jet d'ordre k de s au point correspondant.*

La démonstration est évidente pour $k = 1$. On remarque par ailleurs que le jet d'ordre k de s détermine le jet d'ordre $k - 1$ de la section associée au premier prolongement de e_s. D'où le résultat.

Ceci étant, les k-jets de sections de F_G qui déterminent des tenseurs de structure jusqu'à l'ordre k égaux à ceux de la G-structure modèle e_0 forment un sous-fibré F^k_{adm} du fibré F^k_G des k-jets de sections de F_G.

F^k_{adm} définit sur le fibré $F_G \to V$ un système différentiel (non linéaire) d'ordre k qui sera dit "système différentiel d'ordre k pour les G-structures admissibles". Pour $k \geq k_0$ on obtiendra le *système différentiel fondamental* pour les G-structures admissibles sur V. On aura:

Proposition I.1.2. *Les G-structures presque admissibles sur V sont définies par les sections du fibré $F_G \to V$ qui sont solutions du système différentiel fondamental.*

Remarques. a) si e_0 est une G-structure de type elliptique, les G-structures presque admissibles seront admissibles, donc les solutions du système différentiel fondamental détermineront les G-structures admissibles sur V.

Exemple. $n = 2m$, $G = GL(m, \boldsymbol{C})$, considéré comme sous-groupe de $GL(2m, \boldsymbol{R})$, $V_0 = \boldsymbol{C}^m$, e_0 ètant la structure analytique complexe standard sur $\boldsymbol{C}^m$. Il vient alors:

Les structures analytiques complexes sur V correspondent aux solutions globales du système différentiel fondamental (d'ordre 1) sur le fibré des structures presque complexes $F_{GL(M,C)} \to V$.

b) Le résultat précédent met en évidence la différence de nature entre les deux problèmes: 1-existence d'une G-structure sur V; 2-existence d'une G-structure admissible sur V, par exemple d'une structure plate. La solution de 1 dépend de l'existence d'une section du fibré $F_G \to V$; celle du second problème de l'existence d'une solution globale du système différentiel fondamental sur le même fibré.

c) On remarquera qu'il existe toujours des G-structures locales admissibles sur V. Donc l'existence de solutions locales du système différentiel fondamental est toujours assurée.

d) *Attribuons à la variété modèle* V_0 un point base ω. Soit $R^{(k)}(V, GL_n^{(k)})$ le $k^{\text{ième}}$ prolongement de R, c'est-à-dire le fibré des repères d'ordre $k+1$ de V. On peut encore considérer $R^{(k)}$ comme l'espace des $(k+1)$-jets en ω de difféomorphismes locaux de V_0 dans V.

Si $\varphi^{k+1} = j_\omega^{k+1}\varphi$ est un élément de $R^{(k)}$, φ transporte la G-structure modèle $e_0(V_0, G)$ en une G-structure locale admissible sur V dont le jet d'ordre k en $\varphi(\omega)$ ne dépend que de φ^{k+1}. Le jet d'ordre k en $\varphi(\omega)$ de la structure transportée peut être donc considéré comme un jet de G-structures admissible, élément de F_{adm}^k. Réciproquement, tout jet de G structure admissible peut être obtenu de cette manière. On définit ainsi une fibration: $R^{(k)} \to F_{\text{adm}}^k$, qui est principale et admet pour groupe structural le groupe de Lie $G^{(k)}$, $k^{\text{ième}}$ prolongement de G, formé des $(k+1)$-jets en ω, de but ω, d'automorphismes de la G-structure modèle. $G^{(k)}$ est un sous-groupe de Lie fermé de $GL_n^{(k)}$. On obtient donc:

Proposition I.1.3. *Le système différentiel à l'ordre k pour les G-structures admissibles est le quotient de $R^{(k)}$ par $G^{(k)}$, soit:*

$$F_{\text{adm}}^k = R^{(k)}/G^{(k)} .$$

De plus, si l'on munit $R^{(k)}$ de sa forme fondamentale $\theta^{(k)}$, $R^{(k)} \to F_{\text{adm}}^k$ réalise le prolongement simultané de toutes les G-structures (locales ou globales) presque admissibles sur V, en le sens suivant:

Proposition I.1.4. *Si s est une section de F_G solution de $F_{\text{adm}}^k (k \geq k_0)$,*

$s^k = j^k s$ la section correspondante de F_G^k à valeurs dans $F_{\rm adm}^k$, le $k^{\text{ième}}$ prolongement de la G-structure presque admissible associée e_s est induit par l'application s^k à partir du fibré $R^{(k)} \to F_{\rm adm}^k$ muni de sa forme fondamentale $\theta^{(k)}$; soit:

$$[e_s^{(k)}, \theta_s^{(k)}] = s^{k*}([R^{(k)}, \theta^{(k)}]) \ .$$

Ceci résulte directement de la définition des prolongements d'une G-structure appliquée au cas particulier de structures presque transitives.

Remarque. Dans [9] on a donné une méthode générale de construction simultanée des prolongements de toutes les G-structures (locales ou globales) sur V. La proposition précédente est une simplification dans le cas des G-structures presque admissibles. On notera que dans ce cas (contrairement au cas général) les prolongements successifs sont des fibrés principaux sur la variété V.

I.2. Structures subordonnées

a) *Donnons-nous maintenant sur V* une H-structure $E(V, H)$ où H est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \boldsymbol{R})$ contenant G. On va s'intéresser aux G-structures admissibles subordonnées à cette H-structure. L'existence locale de telles structures subordonnées impose à la H-structure E des conditions que nous allons d'abord étudier.

Exemples. 1. Si $G = \{e\}$ et si la structure modèle e_0 est une structure euclidienne (parallélisme intégrable), l'existence locale de G-structures admissibles subordonnées à E signifie la platitude de E. Les conditions d'existence locale dans ce cas sont les conditions étudiées par Guillemin dans [6].

2. Si $H = GL(n, \boldsymbol{R})$ on retrouve la situation étudiée au paragraphe précédent, où les conditions d'existence locale de G-structures admissibles subordonnées sont, on l'a vu, naturellement vérifiées quelle que soit la structure modèle.

Remarque. Dans l'exemple 1 précédent, l'existence de G-structures admissibles (locales) subordonnées à E entraîne nécessairement la transitivité de la H-structure. Mais en général il n'en est pas ainsi. Autrement dit, le fait pour une H-structure d'admettre une sous-structure transitive n'entraîne pas que la H-structure elle-même soit transitive.

b) *Considérons l'espace des G-structures* subordonnées à E: $F_{(E)G} = E/G$. C'est un sous-fibré de l'espace F_G des G-structures sur V. Les jets d'ordre k de sections de F_G définissant des G-structures presque admissibles subordonnées à E seront des éléments de: $F_{\rm adm}^k \cap J^k F_{(E)G}$.

Définition I.2.1. La H-structure E est dite presque admissible (pour la G-structure modèle considérée e_0) si $F_{\rm adm}^k \cap J^k F_{(E)G}$ est un sousfibré de $J^k F_{(E)G}$ (ou, ce qui revient au même, de $F_{\rm adm}^k$) pour tout entier k.

En fait, on a:

Lemme I.2.2. *Si la projection de $F^k_{\mathrm{adm}} \cap J^kF_{(E)G}$ est, pour tout k, la variété V toute entière, alors la H-structure E est presque admissible.*

En effet, la démonstration se ramène immédiatement au point suivant: montrer l'existence de sections locales à valeurs dans $F^k_{\mathrm{adm}} \cap J^kF_{(E)G}$. Ou encore montrer que cet espace est une sous-variété de $J^kF_{(E)G}$. Sous cette dernière forme, la propriété résulte de la remarque suivante: si l'on construit, suivant la méthode exposée dans [9] les prolongements simultanés des G-structures subordonnées à E, on obtiendra à l'ordre k un fibré:

$$P^k_GE \to J^kF_{(E)G}$$

sur lequel est défini le tenseur t^{k-1}_G de structure d'ordre $k-1$. L'ensemble des points où ce tenseur est égal à celui de la G-structure modèle forme une sous-variété de P^k_GE projetable pour la fibration sur $J^kF_{(E)G}$ (en fait c'est une réunion de fibres) d'où le résultat.

De ce lemme résulte une caractérisation des H-structures presque admissibles: si E_0 est la H-structure sur V_0 qui admet comme sous-structure la structure modèle e_0, considérons en un point quelconque de V_0 (par exemple au point base ω) l'ensemble T^k des valeurs prises au dessus de ce point par le $k^{\text{ième}}$ tenseur de structure de E_0. T^k ne dépend visiblement pas du point choisi, et on obtient:

Théorème I.2.3. *E est presque admissible si et seulement si pour tout k le $k^{\text{ième}}$ tenseur de structure de E est à valeur dans T^k.*

En effet, dire que la projection de $F^k_{\mathrm{adm}} \cap J^kF'_{(E)G}$ est la variété V toute entière c'est dire qu'en chaque point de V il existe un k-jet de G-structure admissible subordonnée à E. Mais cette condition équivaut à l'existence d'un difféomorphisme local établissant en ce point un contact à l'ordre k entre E et la structure (sur V) obtenue par transport de E_0. D'où le résultat.

Il existe un rang fini k_1 (dépendant de G et H) à partir duquel la condition exprimée au théorème précédent est automatiquement vérifiée (si elle l'est jusqu'à ce rang). Ceci résulte de la théorie générale des systèmes différentiels (non linéaires). En effet, appelons *système differentiel à l'ordre k* pour les G-structures admissibles subordonnées le système défini par:

$$F^k_{(E)\mathrm{adm}} = F^k_{\mathrm{adm}} \cap J^kF_{(E)G}$$

sur le fibré $F_{(E)G} \to V$. On sait que si $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ est un sous-fibré de $J^kF_{(E)G}$ pour toutes les valeurs de k jusqu'à un rang assez grand k_1, alors il en est de même ensuite.

Ceci étant, supposons cette condition de régularité vérifiée, i.e., E presque admissible, alors le système différentiel $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ sera dit *système différentiel fondamental réduit* à partir du rang sup (k_0, k_1).

c) *Le fait pour la H-structure E* d'être presque admissible ne garantit nullement l'existence locale de G-structures presque admissibles subordonnées.

Si E est presque admissible, le système fondamental réduit admettra par construction, au-dessus de chaque point de V, des solutions formelles (jets infinis de structures admissibles subordonnées). Mais plusieurs problèmes subsisteront:

—problème de l'existence de solutions locales du système fondamental réduit, c'est-à-dire de G-structures locales presque admissibles subordonnées.

—problème de l'existence de solutions locales admissibles (par exemple, si toute G-structure presque admissible est admissible, comme dans le cas des structures de type elliptique, ce second problème s'identifiera au premier).

Au chapitre II on étudiera un cas où le premier problème admet automatiquement une solution *globale*: c'est le cas où V est simplement connexe, et le système différentiel fondamental réduit de type fini.

I.3. Système fondamental (réduit) et équations de Maurer-Cartan

a) *On conserve les notations du paragraphe* précédent, en supposant de plus la H-structure $E(V, H)$ presque transitive et presque admissible (c'est en particulier le cas si $H = GL(n, \boldsymbol{R})$). Dans ces conditions, la H-structure $E_0(V_0, H)$ sera elle-même presque transitive.

Le $k^{\text{ième}}$ prolongement $E^{(k)}$ de E pourra être défini comme l'espace des $(k + 1)$-jets en ω de difféomorphismes locaux φ_0 de V_0 dans V qui établissent au point $\varphi(\omega)$ un contact d'ordre k entre E et la H-structure transportée $\varphi_* E_0$.

$E^{(k)} \to V$ est une fibration principale dont le groupe structural $H^{(k)}$ est le groupe des $(k + 1)$-jets en ω de difféomorphismes locaux de source et but ω qui respectent E_0 à l'ordre k.

Si $\varphi^{k+1} = j^{k+1}\varphi \in E^{(k)}$, le k-jet en $\varphi(\omega)$ de G-structure admissible défini par transport à partir de la structure modèle e_0 est un élément de $F^k_{(E)\text{adm}}$. Réciproquement, tout élément de $F^k_{(E)\text{adm}}$ peut être défini de cette manière. On obtient donc une fibration:

$$E^{(k)} \to F^k_{(E)\text{adm}}$$

qui est principale de groupe structural $G^{(k)}$.

Si l'on munit $E^{(k)}$ de sa forme fondamentale $\theta^{(k)}$, cet espace réalise le prolongement simultané à l'ordre k de toutes les G-structures presque admissibles subordonnées, soit:

Proposition I.3.1. *Si s est une section de $F_{(E)G}$ solution du système différentiel fondamental réduit, $s^k = j^k s$ la section correspondante de $F^k_{(E)\text{adm}}$, la G-structure presque admissible subordonnée e_s définie par s admet pour $k^{\text{ième}}$ prolongement*:

$$[e_s^{(k)}, \theta_s^{(k)}] = s^{k*}([E^{(k)}, \theta^{(k)}]) .$$

Proposition qui généralise de manière évidente la proposition I.1.4.

b) *Précisons l'étude des formes fondamentales,* en suivant Guillemin-Sternberg (voir [7]) pour la définition de ces formes.

Pour tout entier k, on notera V_k l'espace vectoriel des k-jets formels en ω d'automorphismes infinitésimaux de la G-structure modèle e_0. De même W_k désignera l'espace des k-jets formels en ω d'automorphismes infinitésimaux de E_0.

Si v^k est un vecteur tangent à $E^{(k)}$ en $\varphi^{k+1} = j^{k+1}\varphi$, $v^{k-1} = \pi^k_{k-1}(v^k)$ sa projection sur $E^{(k-1)}$, $\bar{\varphi}^1$ induit un contact d'ordre 1 entre $E^{(k-1)}$ au point $\varphi^k = j^k\varphi$ et $E_0^{(k-1)}$ en un point au-dessus de ω. Donc $\bar{\varphi}^1$ définira une application linéaire: $T_{\varphi^k}E^{(k-1)} \to W_k$ ne dépendant que de $j^{k+1}\bar{\varphi}^1 = (\varphi^{k+1})^{-1}$.

$(\varphi^{k+1})^{-1}[v^{k-1}]$ sera donc un k-jet formel d'automorphisme infinitésimal en ω de E_0. On posera alors:

$$\theta^{(k)}_{\varphi^{k+1}}(v^k) = (\varphi^{k+1})^{-1}(v^{k-1}) \ .$$

On définira:

Définition I.3.2. On appelle sous-espace admissible de $E^{(k)}$ au point φ^{k+1} le sous-espace de l'espace tangent en ce point déterminé par:

$$T^{(k)}_{\mathrm{adm},\varphi^{k+1}} = [\theta^{(k)}_{\varphi^{k+1}}]^{-1}(V_k) \ .$$

Il est clair, d'après la proposition I.3.1, que l'espace tangent au $k^{\text{ième}}$ prolongement d'une G-structure presque admissible subordonnée à E est en chaque point contenu dans le sous-espace admissible. On en déduit:

Proposition I.3.3. *Pour la fibration* $E^{(k)} \xrightarrow{p^k} F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ *le sous-espace admissible en chaque point de* $E^{(k)}$ *est l'image réciproque de sa projection sur* $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$.

Considérons alors le diagramme commutatif de fibrations:

$$\begin{array}{ccc} E^{(k)} & \xrightarrow{p^k} & F^k_{(E)\mathrm{adm}} \\ {\scriptstyle \pi^k_{k-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi^k_{k-1}} \\ E^{(k-1)} & \xrightarrow{p^{k-1}} & F^{k-1}_{(E)\mathrm{adm}} \end{array}$$

Soient $\varphi^{k+1} \in E^{(k)}$, $\varphi^k = \pi^k_{k-1}(\varphi^{k+1})$, $y^k = p^k(\varphi^{k+1})$, $y^{k-1} = p^{k-1}(\varphi^k)$.

y^k définit au point y^{k-1} de $F^{k-1}_{(E)\mathrm{adm}}$ un sous-espace $h^{k-1}_{y^k}$ horizontal pour la fibration $F^{k-1}_{(E)\mathrm{adm}} \to V$. Soit $H_{y^k} = [\psi^k_{k-1}]^{(-1)}(h^{k-1}_{y^k})$. H_{y^k} sera, suivant la terminologie introduite dans [9], *sous-espace canonique* au point y^k.

On a:

Proposition I.3.4. *La projection du sous-espace admissible au point* φ^{k+1} *de* $E^{(k)}$ *est le sous-espace canonique au point* $y^k = p^k(\varphi^{k+1})$ *de* $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$.

En effet, φ^{k+1} définit un isomorphisme de $T_{\varphi^k}(E^{(k-1)})$ sur W_k: c'est l'isomorphisme $\theta^{(k)}_{\varphi^{k+1}}$ défini par la forme fondamentale. Par cet isomorphisme,

$(p^{k-1})^{-1}(h^{k-1}_{y^k})$ correspond à V_k, d'où le résultat compte tenu la commutativité du diagramme précédent.

c) *A l'aide de l'étude qui vient d'être faite*, on peut interpréter le système différentiel fondamental réduit comme traduisant les équations de Maurer-Cartan (au sujet de ces équations pour un pseudogroupe de Lie, voir Guillemin & Sternberg [7]).

Sur $E^{(k)}$ on définira la *forme fondamentale admissible* $\theta^{(k)}_{\mathrm{adm}}$ comme la 1-forme à valeurs dans V_k partiellement définie en tout point φ^{k+1} par restriction de $\theta^{(k)}_{\varphi^{k+1}}$ au sous-espace admissible $T^{(k)}_{\mathrm{adm},\varphi^{k+1}}$.

Soit $\rho\colon V_k \to V_{k-1}$ la projection naturelle. Sur V_k se trouve naturellement défini (à partir du crochet des automorphismes infinitésimaux de e_0) un crochet à valeurs dans V_{k-1}.

On peut donc, en chaque point de $E^{(k)}$, définir sur le sous-espace admissible, la 2-forme:

$$d\rho\, \theta^{(k)}_{\mathrm{adm}} + \tfrac{1}{2}[\theta^{(k)}_{\mathrm{adm}}, \theta^{(k)}_{\mathrm{adm}}] \ .$$

Les 1-jets de sections de $F^k_{(E)\mathrm{adm}} \to V$ appartenant à $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}}$ correspondront aux éléments de contact horizontaux pour cette fibration sur lesquels s'annulera la 2-forme précédente. En effet, sur une section admissible, les équations de Maurer-Cartan se traduisent par la nullité de cette 2-forme. Réciproquement, la nullité de cette 2-forme sur l'espace tangent en un point y^k à une section de $F^k_{(E)\mathrm{adm}} \to V$ signifie qu'en ce point la G-structure correspondante est formellement équivalente avec e_0 jusqu'à l'ordre $k + 1$. On a donc:

Théorème I.3.5. *Les équations de* Maurer-Cartan:

$$d\rho\, \theta^{(k)}_{\mathrm{adm}} + \tfrac{1}{2}[\theta^{(k)}_{\mathrm{adm}}, \theta^{(k)}_{\mathrm{adm}}] = 0$$

sur $E^{(k)}$ *définissent en projection sur* $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ *le système différentiel* $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}} \subset J^1F^k_{(E)\mathrm{adm}}$.

Exemple. Le système différentiel fondamental pour les structures complexes sur $F_{GL(m,C)}$ (voir paragraphe I.1.a) ci-dessus) est défini par la nullité de la 2-forme de torsion du système de Pfaff complexe déterminé sur $F_{GL(m,C)}$ par $[R, \theta]$.

I.4. Pseudogroupe des déformations simultanées

a) Considérons d'abord sur le fibré $F_G \to V$ le système différentiel fondamental pour les G-structures admissibles, F^k_{adm} $(k \geq k_0)$. On appellera *pseudogroupe des déformations simultanées* de G-structures admissibles le pseudogroupe $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{\mathrm{adm}}$ des difféomorphismes locaux de F_G qui respectent à la fois la fibration $F_G \to V$ et le système différentiel fondamental.

Le pseudogroupe des difféomorphismes locaux $\mathscr{D}_0$ de V se relève sur F_G en un sous-pseudogroupe $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_0$ de $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{\mathrm{adm}}$. En fait, si $\mathscr{V}^{\mathrm{sim}}_{\mathrm{adm}}$ désigne le pseudogroupe des déformations simultanées verticales, i.e., se projetant sur V en l'identité, on a la suite exacte de pseudogroupes:

$$e \longrightarrow \mathscr{V}^{\text{sim}}_{\text{adm}} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}} \xrightarrow{\beta} \mathscr{D}_0 \longrightarrow e$$

et le relèvement $\mathscr{D}_0 \xrightarrow{\gamma} \mathscr{D}^{\text{sim}}_0$ définit une scission de cette suite exacte. Par suite, toute déformation simultanée φ peut se mettre de façon unique sous la forme

$$\varphi = \varphi_v \circ \varphi_0 \quad \text{avec} \quad \varphi_v \in \mathscr{V}^{\text{sim}}_{\text{adm}} \text{ et } \varphi_0 \in \mathscr{D}^{\text{sim}}_0 .$$

Il vient $\varphi_0 = \gamma(\beta(\varphi))$, ce qui détermine aussi φ_v.

$\mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}}$ est un *pseudogroupe de Lie transitif* sur F_G. La transitivité résulte du fait que $\mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}}$ contient $\mathscr{D}^{\text{sim}}_0$ qui est luimême transitif.

La terminologie est justifiée par:

Proposition I.4.1. *Toute transformation locale $\varphi \in \mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}}$ transforme une section locale de F_G correspondant à une G-structure presque admissible en une autre section locale ayant la même propriété.*

Ceci est évident par définition même de $\mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}}$. Deux déformations simultanées φ et φ' seront dites *équivalentes* si il existe $\psi_0 \in \mathscr{D}^{\text{sim}}_0$ avec $\varphi' = \varphi \circ \psi_0$.

Il est clair que toute déformation simultanée φ sera équivalente à une déformation simultanée verticale unique $\varphi_v = \varphi \circ [\gamma(\beta(\varphi))]^{-1}$.

La proposition I.4.1 montre que les familles à un paramètre de déformations simultanées induisent sur les structures presque admissibles des familles à un paramètre de déformations (usuelles).

On se posera de manière naturelle le problème suivant: réciproquement toute famille à un paramètre de déformations d'une G-structure admissible donnée peut-elle être prolongée en une famille à un paramètre de déformations simultanées? On pourra essayer d'aborder cette question en étudiant les déformations simultanées infinitésimales (étude esquissée au b)).

Le pseudogroupe $\mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}}$ se prolonge pour tout k en un pseudogroupe de Lie transitif $\mathscr{D}^{\text{sim}(k)}_{\text{adm}}$ de transformations de F^k_{adm}, qui invarie la fibration $F^k_{\text{adm}} \to F^{k-1}_{\text{adm}}$ et le système différentiel d'ordre 1 $F^{k+1}_{\text{adm}} \subset J^1F^k_{\text{adm}}$.

b) *Une déformation infinitésimale simultanée* (pour les G-structures admissibles) sera un $\mathscr{D}^{\text{sim}}_{\text{adm}}$-champ de vecteurs X sur F_G. Un tel champ sera naturellement projetable sur V. Il se relèvera en X^k sur F^k_{adm}.

X^k laissera invariant sur F^k_{adm} le champ le sous-espaces canoniques et le système différentiel d'ordre 1, $F^{k+1}_{\text{adm}} \subset J^1F^{\text{a}}_{\text{adm}}$.

Si X_0 est la projection de X sur V, $\bar{X}_0$ le relèvement de X_0 sur F_G, $X - \bar{X}_0$ est une *déformation infinitésimale simultanée verticale* pour la fibration $F_G \to V$.

On peut à X essayer de faire correspondre une classe de formes tensorielles jouant le rôle du cocycle global associé à une déformation infinitésimale (usuelle) dans la cohomologie de Spencer (voir l'article cité de Guillemin & Sternberg).

Pour cela on relèvera X^k de manière *arbitraire* dans $R^{(k)}$ en un champ de vecteurs $\bar{X}^k$ invariant à droite pour la fibration principale $R^{(k)} \to F^k_{\mathrm{adm}}$.

Ceci étant, on définira à partir de la forme fondamentale $\theta^{(k)}$ la forme de déformation infinitésimale

$$\Omega_{\bar{X}^k} = \mathscr{L}_{\bar{X}^k}\theta^{(k)} .$$

Pour un X donné, la forme précédente est définie modulo une 1-forme arbitraire du type $\mathscr{L}_v\theta^{(k)}$ où v est un champ de vecteurs vertical invariant à droite sur $R^{(k)} \to F^k_{\mathrm{adm}}$.

On vérifiera sans difficultés que, si e_s est une G-structure admissible définie par une section s de $F_G \to V$, la déformation infinitésimale de e_s induite par X admet pour cocycle associé (au sens de Guillemin-Sternberg) le cocycle induit par la classe de formes $\{\Omega_{\bar{X}^k}\}$ au-dessus de la section $s^k = j^k s$ de $F^k_{\mathrm{adm}} \to V$.

La version infinitésimale du problème soulevé au a) est: tout cocycle de déformation infinitésimale de e_s est-il induit par la classe de formes $\{\Omega_{\bar{X}^k}\}$ pour une déformation infinitésimale simultanée X?

c) *La théorie des déformations simultanées* esquissée jusqu'ici peut sans difficultés s'étendre au cas des G-structures admissibles subordonnées à une H-structure presque admissible donnée.

Reprenant les notations du paragraphe I.3, on pourra définir le *pseudogroupe de Lie* $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{(E)\mathrm{adm}}$ *des déformations simultanées réduites* comme le pseudogroupe de Lie transitif des difféomorphismes locaux de $F_{(E)G}$ projetables sur V qui invarient le système différentiel fondamental réduit. Un élément de ce pseudogroupe échangera entre elles les G-structures (locales) presque admissibles subordonnées.

De même, si X est une déformation infinitésimale simultanée réduite, se relevant en X^k sur $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ et en $\bar{X}^k$ invariant à droite sur $E^{(k)} \to F^k_{(E)\mathrm{adm}}$, on définira les formes de déformation infinitésimale simultanée réduite comme la classe de formes:

$$\Omega_{\bar{X}^k} = \mathscr{L}_{\bar{X}^k}\theta^{(k)} \qquad \text{pour tous les relèvements } \bar{X}^k \text{ de } X^k.$$

II. SOUS-STRUCTURES DE CODIMENSION FINIE

II.1. Le théorème d'existence

a) *On se place dans les conditions* du paragraphe I.3: E est supposée presque admissible et presque transitive, E_0 elle-même étant alors presque transitive.

Définition II.1.1. Si la dimension de $H^{(k)}/G^{(k)}$ est bornée supérieurement pour $k \in N$, on dit que la G-structure modèle est de codimension finie dans E_0.

On peut encore exprimer cette propriété en termes d'algèbres formelles: E_0

et e_0 étant toutes deux presque transitives, on peut leur associer des algèbres formelles, respectivement L et L' que l'on pourra définir comme les algèbres de Lie de jets infinis d'automorphismes infinitésimaux formels de ces structures au point base ω. Ceci étant, e_0 est de codimension finie dans E_0 si et seulement si la sous-algèbre de Lie L' de L est de codimension finie dans L.

Supposons *V simplement connexe*. On va alors établir le théorème général d'existence:

Théorème II.1.2. *E étant presque admissible et presque transitive et e_0 de codimension finie dans E_0, il existe sur V une G-structure presque admissible subordonnée à E.*

Autrement dit, sous les hypothèses faites, le système différentiel fondamental réduit admet une solution globale.

La démonstration se décompose en deux étapes:

Lemme II.1.3. *Si e_0 est de codimension finie dans E_0, alors le système fondamental réduit est de type fini, c'est-à-dire qu'il existe un ordre l à partir duquel la projection $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}} \to F^{k}_{(E)\mathrm{adm}}$ est un difféomorphisme.*

En effet, st e_0 est de codimension finie dans E_0, il existe un ordre l à partir duquel la codimension de $G^{(k)}$ dans $H^{(k)}$ est stable. A partir de cet ordre la projection:

$$H^{(k+1)}/G^{(k+1)} \to H^{(k)}/G^{(k)}$$

sera un difféomorphisme. Comme la fibre de $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}} \to V$ est $H^{(k)}/G^{(k)}$, le lemme en résulte.

La seconde partie de la démonstration se ramène à un lemme élémentaire de la théorie des systèmes différentiels (non linéaires):

Lemme II.1.4. *Si V est simplement connexe et $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}}$ de type fini et formellement intégrable, alors ce système différentiel est complètement intégrable et admet des solutions globales.*

Soit en effet $k \geq \sup(k_0, k_1, l)$. La projection:

$$F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}} \to F^{k}_{(E)\mathrm{adm}}$$

est alors un difféomorphisme. Donc pour tout point $y^k \in F^{k}_{(E)\mathrm{adm}}$ il existe en ce point un 1-jet unique de section de $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}} \to V$ appartenant à $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}}$. La famille de 1-jets de sections ainsi obtenue définit un système de Pfaff transverse à la fibration $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}} \to V$. De plus ce système de Pfaff est complètement intégrable car $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}}$ est par hypothèse un système différentiel d'ordre 1 formellement intégrable sur $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}}$. Par chaque y^k dans $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}}$ passera donc une variété intégrale maximale. De plus, le système de Pfaff étant transverse à la fibration $F^{k}_{(E)\mathrm{adm}} \to V$, et V étant simplement connexe, une variété intégrale maximale sera une section du fibré et définira une solution globale du système différentiel fondamental réduit, ce qui démontre le lemme et le théorème.

Si V n'est pas supposée simplement connexe, une variété intégrale maximale du système de Pfaff précédent déterminera en général un revêtement de V muni d'une G-structure presque admissible.

Remarque. On peut sans difficultés étendre le théorème précédent au cas de structures d'ordre supérieur.

b) *Donnons des exemples* où le théorème II.1.2 fournit des résultats sur l'existence globale de structures subordonnées.

Exemple 1. Soit $E(V, H)$ une H-structure formellement plate de type fini. On sait (voir Guillemin [6]) qu'une telle structure est plate. Mais de plus le théorème précédent indique que dans ce cas, si V est simplement connexe, $E(V, H)$ admet un parallélisme intégrable subordonné.

Si V n'est pas simplement connexe, $E(V, H)$ admet un sous-fibré à fibre discrète correspondant à un parallélisme intégrable sur un revêtement de V.

Exemple 2. (résultat démontré directement par Albert-Molino dans [2]), généralise le précédent.

Soit $E(V, H)$ une H-structure formellement plate. h étant l'algèbre de Lie de H, $h^{(k)}$ le $k^{\text{ième}}$ prolongement de cette algèbre de Lie, $h^{(k)}$ est un sous-espace de $h \otimes S^k(\boldsymbol{R}^{n*})$. Soit ρ la contraction naturelle:

$$\rho\colon h^{(k)} \otimes S^k(\boldsymbol{R}^n) \to h \ .$$

L'image de ρ est un idéal h_k de h. Ceci étant on définit suivant Singer-Sternberg (article cité) l'idéal infini de h comme: $h_\infty = \bigcap_k h_k$.

Le théorème II.1.2 permet alors d'affirmer que, si V est simplement connexe, $E(V, H)$ admet une sous-structure $e(V, G)$ formellement plate où le groupe G a pour algèbre de Lie l'idéal infini h_∞ de h. En fait, la condition "V simplement connexe" est ici superflue l'algèbre de Lie de G ne dépendant que de la composante connexe par arcs de l'identité dans G.

On remarquera que h_∞ est la plus petite sous-algèbre de Lie de h qui soit codimension finie en le sens suivant: il existe un ordre à partir duquel ses prolongements coïncident avec ceux de h.

Exemple 3 (*Cas général*). Dans tous les cas, pour utiliser le théorème précédent, on sera amené, étant donnée une algèbre de Lie transitive filtrée L à chercher les sous-algèbres transitives de codimension finie de L.

C'est ce qui a en fait été réalisé dans l'exemple 2, où L était l'algèbre plate:

$$L = \boldsymbol{R}^n \oplus h \oplus h^{(1)} \oplus \cdots \oplus h^{(k)} \oplus \cdots \ .$$

Dans ce cas *la plus petite* sous-algèbre transitive de codimension finie *plate* est:

$$L_\infty = \boldsymbol{R}^n \oplus h_\infty \oplus h_\infty^{(1)} \oplus \cdots \oplus h_\infty^{(k)} \oplus \cdots \ .$$

Plus généralement, L étant une sous-algèbre de Lie transitive quelconque de l'algèbre des dérivations formelles sur $\boldsymbol{R}^n$, soit $\hat{L}$ l'algèbre plate ayant la même graduée associée:

$$\hat{L} = \boldsymbol{R}^n \oplus h \oplus h^1 \oplus \cdots \oplus h^k \oplus \cdots .$$

Soit $h^L_\infty = \bigcap_k \rho(h^k \otimes S^k(\boldsymbol{R}^n))$, et posons:

$$\hat{L}_\infty = \boldsymbol{R}^n \oplus h^L_\infty \oplus h^{L(1)}_\infty \oplus \cdots \oplus h^{L(k)}_\infty \oplus \cdots .$$

Alors pour toute sous-algèbre de Lie transitive L' de codimension finie dans L, on a: $\hat{L}' \supset \hat{L}_\infty$.

Ce qui montre que la graduée associée à L' est comprise entre la graduée associée à L et celle associée à $\hat{L}_\infty$. Il en résulte en particulier que si $h^L_\infty = h$, le théorème II.1.2 ne donne rien, L n'ayant pas d'autre sous-algèbre de Lie transitive de codimension finie qu'elle même.

Exemple 4. Soient $\mathscr{G}$ un gronpe de Lie de dimension n, $E_0(\mathscr{G}, H)$ une G-structure presque transitive invariante à gauche sur $\mathscr{G}$. E_0 admet donc un parallélisme subordonné invariant à gauche, qui sera pris comme structure modèle e_0 $(G = \{e\})$.

Soit $E(V, H)$ une H-structure presque admissible, c'est-à-dire formellement équivalente à E_0.

Si l'algèbre de Lie h de H est de type fini et V simplement connexe, le théorème II.1.2 donne:

E admet une section globale définissant une algèbre de Lie de champs de vecteurs *simplement transitive sur V et isomorphe à l'algèbre de Lie g de $\mathscr{G}$.*

On peut considérer cet exemple comme une généralisation de l'exemple 1. Au chapitre III on étudiera des G-structures d'un type analogue (*G-structures lisses*).

II.2. Structures subordonnées transitives

Ce que nous avons dit au paragraphe précédent a trait aux structures presque transitives. Pour obtenir des résultats d'existence de G-structures *admissibles* subordonnées, on sera amené à faire des hypothèses plus restrictives.

a) *Traitons d'abord le cas des structures d'ordre* 1. On supposera que $E_0(V_0, H)$ est une structure transitive, $e_0(V_0, G)$ une sous-structure transitive de codimension finie. Soit $E(V, H)$ une H-structure *admissible*, c'est-à-dire localement équivalente à E_0. E admet alors nécessairement des G-structures admissibles locales subordonnées. On va établir:

Théorème II.2.1. *Sous les hypothèses faites, si V est simplement connexe, E admet une G-structure admissible subordonnée.*

En effet, on est dans les hypothèses du théorème II.1.2. Reprenant les notations utilisées dans la démonstration de ce théorème, on voit que par tout point de $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$, y^k, passe une section globale unique s^k de $F^k_{(E)\mathrm{adm}} \to V$ qui est le jet d'ordre k d'une solution globale du système différentiel fondamental réduit. Mais par ailleurs, E étant localement équivalente à E_0, par y^k passe une section locale σ^k correspondant à une G-structure locale admissible. Il en résulte $s^k = \sigma^k$

et par suite toute solution du système fondamental réduit définit une G-structure admissible. C'est dire que toute G-structure presque admissible subordonnée est admissible, et le théorème II.2.1 résulte alors du théorème II.1.2. C.Q.F.D.

Dans le cas où V n'est pas simplement connexe, on aura une G-structure admissible sur un revêtement de V.

b) *En étendant le résultat précédent* au cas des Γ-structures d'ordre supérieur, on en déduit pour les pseudogroupes de Lie transitifs:

Théorème II.2.2. *Si Γ est un pseudogroupe de Lie transitif sur V, γ un sous-pseudogroupe de Lie local de Γ localement transitif et de codimension finie dans Γ, alors il existe un sous-pseudogroupe de Lie global $\tilde{\gamma}$ de Γ ayant même algèbre de Lie que γ.*

Ce résultat ne suppose bien entendu pas que V soit simplement connexe. Si de plus V est simplement connexe, on peut énoncer sous les mêmes hypothèses "il existe un sous-pseudogroupe de Lie global (unique) $\tilde{\gamma}$ de Γ prolongeant γ".

c) *Reprenons l'exemple* 2 traité au paragraphe précédent. Si E est une H-structure plate, on pourra appliquer le théorème II.2.1 il vient:

Toute H-structure plate admet une G-structure plate subordonnée, G ayant pour algèbre de Lie l'idéal infini de l'algèbre de Lie de H.

II.3. Déformations simultanées réduites en codimension finie

a) *Reprenons les notations du paragraphe* I.4.c) en codimension finie. $E(V, H)$ sera donc une H-structure presque transitive et presque admissible, $F_{(E)G} \to V$ le fibré des G-structures subordonnées, $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ (pour k assez grand) le système différentiel fondamental réduit. L'hypothèse de codimension finie se traduira par le fait que $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}} \to F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ est un difféomorphisme.

$\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{(E)\mathrm{adm}}$ est le pseudogroupe de Lie des transformations locales de $F_{(E)G}$ projetables sur V et qui laissent invariant le système fondamental réduit. Le $k^{\text{ième}}$ prolongement $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}(k)}_{(E)\mathrm{adm}}$ sera le pseudogroupe de Lie des transformations locales de $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ projetables sur V et qui laissent invariant le système différentiel (d'ordre 1) $F^{k+1}_{(E)\mathrm{adm}} \subset J^1F^k_{(E)\mathrm{adm}}$. Ce système différentiel est complètment intégrable et définit sur $F^k_{(E)\mathrm{adm}} \to V$ un feuilletage transverse à la fibration. $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}(k)}_{(E)\mathrm{adm}}$ sera donc le pseudogroupe de Lie des transformations locales de $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ qui laissent invariants à la fois la fibration et le feuilletage transverse.

Si de plus V est simplement connexe, les feuilles du feuilletage sont des sections globales de $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ et par suite les transformations de $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}(k)}_{(E)\mathrm{adm}}$ seront projetables sur une fibre arbitraire de $F^k_{(E)\mathrm{adm}} \to V$. Si l'on identifie cette fibre à la fibre-type $H^{(k)}/G^{(k)}$, on en déduit immédiatement:

Théorème II.3.1. *Le pseudogroupe de Lie $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}(k)}_{(E)\mathrm{adm}}$ est formé de toutes les transformations locales de $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$ projetables à la fois sur V et sur $H^{(k)}/G^{(k)}$. En particulier le pseudogroupe $\mathscr{V}^{\mathrm{sim}(k)}_{(E)\mathrm{adm}}$ des déformations simultanées réduites verticales s'identifie (à localisation près) au pseudogroupe* Diff $(H^{(k)}/G^{(k)})$ *de* *tous les difféomorphismes de la fibre-type de* $F^k_{(E)\mathrm{adm}}$, *qui échange entre elles les feuilles du feuilletage.*

b) *Dans ce cas il est facile de vérifier* que si $e(V, G)$ est une G-structure admissible subordonnée, toute famille à un paramétre de déformation de e qui reste dans la famille des structures subordonnées est induite par une famille à un paramètre de déformations simultanées réduites: il suffit de définir une famille à un paramètre de transformations de $H^{(k)}/G^{(k)}$ connaissant son action sur un point de cet espace ce qui est toujours possible.

III. G-STRUCTURES ET CLASSES CARACTERISTIQUES

Les classes caractéristiques étudiées dans ce chapitre sont les classes à coefficients réels, définies à partir de la courbure d'une connexion.

III.1. Méthode générale

a) *Pour étudier dans le cadre le* plus général les classes caractéristiques des G-structures en liaison avec leurs prolongements et plus particulièrement leur tenseur de structure d'ordre 2, on utilisera les définitions des prolongements d'une G-structure de Singer-Sternberg (voir [11]).

Soient donc $R(V, GL_n)$ l'espace des repères linéaires de V, $E(V, G)$ une G-structure, $E^{(1)}(E, G^{(1)})$ et $E^{(2)}(E^{(1)}, G^{(2)})$ les prolongements de E d'ordre respectivement 1 et 2.

Pour $z^2 \in E^{(2)}$ de projections z^1 sur $E^{(1)}$, z sur E et x sur V, z^2 définit en z un 1-jet de système de Pfaff transverse à la projection, ou encore un 1-jet de 1-forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie g de G. A ce 1-jet correspond une courbure bien définie $\Omega_{\mathrm{adm}}(z^2)$, bien qu'en général z^2 ne soit pas le 1-jet d'une connexion (qui doit être invariante à droite). Ainsi se trouve définie une application:

$$\Omega_{\mathrm{adm}}\colon E^{(2)} \to g \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*}) \ .$$

Définition III.1.1. La fonction Ω_{adm} sera dite courbure admissible sur $E^{(2)}$. L'image de Ω_{adm} sera dite *espace des courbures admissibles* de la G-structure E et notée $\Omega_{\mathrm{adm}(E)}$.

Exemple. Si la G-structure E est presque transitive, son tenseur de structure d'ordre 2 est constant. Donc le tenseur obtenu à partir des courbures admissibles (considérées comme fonction sur $E^{(2)}$) par passage au quotient dans l'espace du tenseur de structure d'ordre 2 est constant. Soit $g^{(1)}$ le premier prolongement de l'algèbre de Lie g de G. On note:

$$\partial\colon g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*} \to g \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*})$$

l'antisymétrisation naturelle (cobord dans la cohomologie de Spencer de g). Dans ces conditions deux courbures admissibles se déduisent l'une de l'autre par un élément de $\partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*})$. Notons qu'en fait le démonstration précédente utilise seulement le fait que le tenseur de structure d'ordre 2 est constant, la presque transitivité n'intervenant que par cette propriété. Soit:

Proposition III.1.2. *Si le tenseur de structure d'ordre* 2 *de la G-structure $E(V, G)$ est constant, l'espace des courbures admissibles est de la forme*:

$$\Omega_{\mathrm{adm}(E)} = \Omega_0 + \partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*}) .$$

b) *Pour que l'étude du tenseur* de structure d'ordre 2 fournisse des renseignements sur les classes caractéristiques de $E(V, G)$, il faut qu'il existe une connexion sur E correspondant à une section de $E^{(1)} \to E$, ou encore que la structure $E^{(1)} \to E$ soit invariante par les translations à droite de G sur E (cf. Albert [1]).

Définition III.1.3. $E(V, G)$ est dite G-structure à connexion admissible si la structure $E^{(1)} \to E$ est invariante par les translations à droite de G sur E.

Ceci étant, on sait que les classes caractéristiques à coefficients réels de $E(V, G)$ peuvent être obtenues de la manière suivante à partir d'une connexion ω sur E de courbure Ω:

On considère sur l'algèbre de Lie g de G les formes p-linéaires symétriques à valeurs réelles invariantes par adj G. Soit α une telle forme. En substituant la courbure Ω aux p arguments de α on obtient une $2p$-forme réelle (le produit étant remplacé par le produit extérieur) $\alpha(\Omega)$ sur $E(V, G)$ fermée et projetable sur V. La classe de cohomologie sur V de la forme projetée ne dépend pas de la connexion choisie et est par définition la casse caractéristique correspondante à α de $E(V, G)$: $\chi_\alpha(E) \in H^{2p}(V, \boldsymbol{R})$.

Soit π_α: $g \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*}) \to \Lambda^{2p}(\boldsymbol{R}^{n*})$ l'application qui à une 2-forme Ω sur $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs dans g fait correspondre la $2p$-forme réelle $\alpha(\Omega)$.

On a:

Théorème III.1.4. *Si La G-structure $E(V, G)$ est à connexion admissible et si α est une forme p-linéaire symétrique sur g invariante par* adj G *telle que π_α s'annule sur l'espace des courbures admissibles de E, alors* $\chi_\alpha(E) = 0$.

En effet, E étant à connexion admissible, on aura snr E une connexion ω dont la courbure Ω appartiendra partout à l'espace des courbures admissibles. $\alpha(\Omega)$ sera alors nul, d'où le résultat.

Les paragraphes suivants seront consacrés à l'étude de quelques cas particuliers où ce théorème fournit des indications précises.

III.2. Cas des structures plates (ou simplement 2-plates). Théorèmes de Bott

Les résultats de ce paragraphe ont pour l'essentiel été indiqués dans [10].

a) *Soit $E(V, G)$ une G-structure* 2-plate, c'est-à-dire ayant en chaque point un contact d'ordre 2 avec une G-structure plate. Dans ce cas $E(V, G)$ est à connexion sans torsion. De plus le tenseur d'ordre 2 de la structure est constant, donc on peut appliquer la proposition III.1.2 et par suite:

$$\Omega_{\mathrm{adm}(E)} = \Omega_0 + \partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*}) .$$

Mais en fait la 2-platitude entraîne qu'en chaque point on a une courbure admissible nulle, d'où

$$\Omega_{\mathrm{adm}(E)} = \partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*}) .$$

En appliquant alors le théorème III.1.4 on obtient:

Théorème III.2.1. *Soit $E(V, G)$ une G-structure 2-plate. α étant une forme p-linéaire symétrique sur g invariante par* adj G, *si*:

$$\pi_\alpha \circ \partial \colon g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*} \to \Lambda^{2p}(\boldsymbol{R}^{n*})$$

est identiquement nulle, alors la classe caractéristique $\chi_\alpha(E)$ est nulle.

Ce théorème s'applique bien entendu en particulier au cas des structures plates ou formellement plates.

b) *Prenons pour G le sous-groupe* de $GL(n, \boldsymbol{R})$ formé des matrices de la forme:

$$p + q = n . \qquad \begin{array}{cl} \begin{matrix} \overbrace{}^{p} & \overbrace{}^{q} \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{c:c} X & X \\ \hdashline 0 & X \end{array}\right] & \begin{matrix} \}p \\ \}q \end{matrix} \end{array}$$

Une G-structure est alors un système de Pfaff définissant sur V un champ d'éléments de contact de dimension p. Une telle structure est plate dès qu'elle est 1-plate (Théorème de Frobenius) Le théorème III.2.1 fournira donc des propriété des classes caractéristiques pour les structures plates, c'est-à-dire pour les champs d'éléments de contact intégrables.

Soient

$$i, j, k = 1, 2, \cdots, p; \quad \alpha, \beta, \gamma = p + 1, \cdots, n; \quad a, b, c = 1, \cdots, n .$$

$\beta \in g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*}$ s'écrit $\beta = \beta_a \otimes \theta^a$ (avec la convention de sommation des indices d'Einstein) où: $\beta_a \in g^{(1)}$, soit:

$$\beta_a = \left[\begin{array}{c:c} \beta^i_{al} & \beta^i_{a\beta} \\ \hdashline 0 & \beta^\alpha_{a\beta} \end{array}\right] ,$$

où β^i_{aj}, $\beta^i_{a\beta}$ et $\beta^\alpha_{a\beta}$ sont des 1-formes réelles. De plus, par définition de $g^{(1)}$, β^b_{acd} doit être symétrique en c et d; donc en particulier:

$$\beta^{\alpha}_{a\beta i} = 0 = \beta^{\alpha}_{ai\beta} \ .$$

En appliquant l'antisymétrisation ∂ on en déduit que si $\Omega \in \partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*})$,

$$\Omega = [\Omega^{a}_{b,c,d}\, \theta^{c} \wedge \theta^{d}] \ ,$$

alors $\Omega^{\alpha}_{\beta,ij} = 0$ quelquesoient α, β, i, j.

Donc la 2-forme Ω^{α}_{β} vérifie:

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0 \qquad \text{(modulo } \theta^{\gamma}) \ .$$

Or les classes de Pontrjagin réelles $\mathrm{Pont}^{l}(Q)$, où Q est le fibré quotient du fibré tangent à V par le sous-fibré tangent aux éléments de contact, sont des classes caractéristiques de la G-structure, définies à partir des formes $[\Omega^{\alpha}_{\beta}]$. La propriété démontrée entraîne que pour $l > 2q$ toute forme α l-symétrique sur l'algèbre des matrices $[A^{\alpha}_{\beta}]$ s'annulera en substituant la courbure $[\Omega^{\alpha}_{\beta}]$ à ses différents arguments. Soit:

Théorème III.2.2 (*Bott*, *voir* [4]). *Si Q est le fibré vectoriel quotient du fibré tangent à V par le sous-fibré associé à un système de Pfaff intégrable de codimension q, l'anneau de Pontrjagin réel de Q s'annule en dimension $>2q$.*

c) *On peut de façon analogue* déduire du théorème III.2.1 le théorème de Bott relatif aux systèmes de Pfaff complexes (voir [4]). En fait *il n'est nullement besoin de supposer la variété V elle-même munie d'une structure complexe*:

On se donnera sur V, de dimension $n = 2q + p$ un système de Pfaff complexe intégrable de rang (complexe) q, donc de codimension $2q$. C'est une G-structure plate, où G est le groupe des matrices inversibles de la forme:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\;\;}^{p} & \overbrace{\qquad\qquad}^{2q} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|cc} A & \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline 0 & B & C \\ & -C & B \end{array}\right] & \begin{array}{c} p \\ q \\ q \end{array} \end{array}$$

Posons

$$\alpha, \beta, \gamma = p + 1, \cdots, p + q \ ; \qquad i, j, k = 1, \cdots, p \ ;$$
$$\alpha^{*} = \alpha + q \ , \qquad \beta^{*} = \beta + q \ , \qquad \gamma^{*} = \gamma + q \ .$$

Si $\beta \in g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*}$, $\beta = \beta_{a} \otimes \theta^{a}$ on obtient comme dans le cas précédent des propriétés sur les β^{b}_{acd}:

$$\beta^{\alpha}_{a\beta i} = \beta^{\alpha}_{a\beta^{*} i} = \beta^{\alpha^{*}}_{a\beta i} = \beta^{\alpha^{*}}_{a\beta^{*} i} = 0 \ ,$$
$$\beta^{\alpha}_{a\beta\gamma} = \beta^{\alpha^{*}}_{a\beta^{*}\gamma} = \beta^{\alpha^{*}}_{a\gamma\beta^{*}} = -\beta^{\alpha}_{a\gamma^{*}\beta^{*}} = -\beta^{\alpha}_{a\beta^{*}\gamma^{*}} \ ,$$

et de même:

$$\beta^{\alpha}_{\alpha\beta^*\gamma} = -\beta^{\alpha^*}_{\alpha\beta\gamma} = -\beta^{\alpha^*}_{\alpha\gamma\beta} = \beta^{\alpha}_{\alpha\gamma^*\beta} = \beta^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma^*} .$$

Soit alors $\Omega \in \partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*})$, $\Omega = (\Omega^b_{acd}\, \theta^c \wedge \theta^d)$. Posons:

$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\alpha}_{\beta} + \sqrt{-1}\Omega^{\alpha}_{\beta^*} .$$

On aura, compte tenu des relations précédentes:

$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = 0 \qquad (\text{modulo } \theta^{\gamma} - \sqrt{-1}\theta^{\gamma^*}) .$$

Or les classes de Chern réelles $\mathrm{Ch}^l\,(Q)$ du fibré complexe défini par le système de Pfaff sont des classes caractéristiques de la G-structure, définies à partir des formes $(\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta})$. Elles seront donc nulles en dimension réelle $>2q$. Soit:

Théorème III.2.3. *Si Q est le fibré vectoriel complexe défini sur V par un système de Pfaff complexe intégrable de codimension* (*réelle*) $2q$, *l'anneau de Chern réel de Q s'annule en dimension $>2q$.*

III.3. Cas des G-structures lisses

On se propose de généraliser de manière naturelle les cas particuliers traités au paragraphe précédent. On notera pour cela que les propriétés des G-structures plates qui ont été utilisées sont essentiellement les suivantes:

1. elles sont à connexion admissible,
2. leur tenseur de structure d'ordre 2 est constant,
3. admettre en un point une courbure admissible nulle [ou plus géneralement appartenant à $\partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*})$].

C'est l'étude de ces trois conditions qui amene à définir le type de structures que nous allons décrire.

a) *Soit $\mathscr{G}$ un groupe de Lie* de dimension n, qui nous servira de variété modèle. On notera g l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}$. Soit G *un groupe d'automorphismes linéaires de l'algèbre de Lie g respectant le crochet.*

En transportant par les translations à grauche de $\mathscr{G}$ une famille de repères de l'algèbre de Lie g se déduisant l'un de l'autre par une opération de G, on définit sur $\mathscr{G}$ une *G-structure invariante à gauche $E_0(\mathscr{G}, G)$* qui nous servira de structure modèle.

Lemme III.3.1. *$E_0(\mathscr{G}, G)$ est une G-structure transitive.*

En effet, G s'étend en un groupe local d'automorphismes du groupe de Lie $\mathscr{G}$. Ce groupe local et $\mathscr{G}$ (opérant sur lui-même par translations à gauche) engendrent un pseudogroupe de Lie transitif sur E_0.

Définition III.3.2. La G-structure $E_0(\mathscr{G}, G)$ est dite G-structure lisse modèle sur $\mathscr{G}$ de groupe G. Toute G-structure $E(V, G)$ localement équivalente à E_0 sera dite *G-structure lisse de type* $(\mathscr{G}, G)$.

Il est clair que les G-structures lisses ainsi définies généralisent les structures plates.

Exemple. Prenons pour G la représentation adjointe de $\mathscr{G}$ dans son algèbre de Lie: $G = \operatorname{adj} \mathscr{G}$. On obtiendra ainsi une structure lisse particulière qui sera dite de type adjoint. Toute G-structure lisse localement équivalente à celle-ci sera dite *G-structure lisse de type adjoint.*

Plus généralement, si $G \subset \operatorname{adj} \mathscr{G}$, on obtiendra des *G-structures lisses de type intérieur.*

b) *Etudions l'algèbre formelle* d'un pseudogroupe de Lie *lisse* c'est-à-dire localement équivalent au pseudogroupe des automorphismes d'une G-structure lisse modèle.

Soient g et $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie respectives de $\mathscr{G}$ et G.

L'algèbre tronquée à l'ordre 2 est une algèbre de Lie usuelle:

$$L/L_2 = g \oplus \mathfrak{g}\ ,$$

où le crochet est défini sur g et $\mathfrak{g}$ par le crochet usuel des algèbres de Lie, et où le crochet de $A \in \mathfrak{g}$ et $u \in g$ est $A(u)$. On vérifie que l'identité de Jacobi résulte alors du fait que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie d'endomorphismes de g respectant le crochet.

Soit $\mu \in \boldsymbol{R}^n \otimes \Lambda^2 \boldsymbol{R}^{n*}$ la 2-forme qui définit le crochet dans g.

Calculons le tenseur τ^2 de structure d'ordre 2 d'une G-structure lisse modèle. On a une section du premier prolongement de la structure, $E_0^{(1)} \to E_0$ définie par la connexion sans courbure associée au parallélisme invariant à gauche. Si à l'aide de cette section on calcule τ^2, on vérifie immédiatement que ce tenseur ne diffère du tenseur τ_0^2 de structure d'ordre 2 d'une G-structure plate que par sa composante sur $\boldsymbol{R}^n \otimes \Lambda^2 \boldsymbol{R}^{n*}$, qui est précisément la 2-forme μ. Soit:

Proposition III.3.3. *Si $E(V, G)$ est lisse, son tenseur de structure d'ordre 2 vérifie*:

$$\tau^2 = \tau_0^2 + \mu\ ,$$

où $\mu \in \boldsymbol{R}^n \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*})$ est la forme qui définit le crochet dans l'algèbre de Lie du modèle.

On pose alors:

Définition III.3.4. Une G-structure $E(V, G)$ est dite 2-*lisse* si son tenseur de structure d'ordre 2 ne diffère du tenseur d'ordre 2 de la G-structure plate que par un élément de $\boldsymbol{R}^n \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*})$.

On notera que si $E(V, G)$ est 2-lisse, ceci n'implique en rien l'existence d'une G-structure lisse modèle avec laquelle $E(V, G)$ aurait un contact d'ordre 2 en tout point: en fait, les hypothèses n'entrainent nullement que $\tau^2 - \tau_0^2$ définisse sur $\boldsymbol{R}^n$ une structure d'algèbre de Lie.

c) *On obtient pour les classes caractéristiques* des G-structures lisses (ou plus généralement 2-lisses) les mêmes propriétés que pour les structures plates. En effet:

Lemme III.3.5. *Si $E(V, G)$ est 2-lisse, alors*:

1. *elle est à connexion admissible,*
2. *son tenseur de structure d'ordre* 2 *est constant,*
3. *l'espace de ses courbures admissibles est* $\partial(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*})$.

La vérification est immédiate.

On peut alors utiliser le théorème général III.1.4 et il vient (avec les notations de ce théorème):

Théorème III.3.6. *Si* $E(V, G)$ *est* 2*-lisse et si* α *est une forme p-linéaire symétrique sur* g *invariante par* adj G *telle que l'application*:

$$\pi_\alpha \circ \partial : g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^{n*} \to \Lambda^{2p}(\boldsymbol{R}^{n*})$$

soit identiquement nulle, alors la classe caractéristique $\chi_\alpha(E)$ *est nulle.*

Ce résultat généralise le théorème III.2.1 comme la 2-lissité généralise la 2-platitude.

Exemple. Si l'on revient sur l'exemple des champs d'éléments de contact et du théorème de Bott, on voit que *les champs d'éléments de contact* 2*-lisses* possèderont les mêmes propriétés, en ce qui concerne les classes caractéristiques, que celles obtenues par Bott dans le cas intégrable.

Remarque. En ce qui concerne les structures lisses (ou formellement lisses) de type fini, en fait on a un théorème de réduction analogue à celui énoncé au chapitre II pour les structures plates. C'est dire que dans ce cas toutes les classes caractéristiques à coefficients réels sont automatiquement nulles.

IV. GEOMETRIE INTRINSEQUE DES G-STRUCTURES

IV.1. Champs connexes de structures

a) *Dans tout ce paragraphe,* $E(V, G)$ sera une G-structure donnée sur V, H un sous-groupe de Lie fermé de G, $F_{(E)H}$ le fibré E/H des H-structures subordonnées à E.

Définition IV.1. Un champ connexe de H-structures adapté à $E(V, G)$ est un champ d'éléments de contact sur le fibré $F_{(E)H} \to V$ supplémentaires des sous-espaces verticaux.

Autrement dit, la donnée d'un tel champ est équivalente à celle d'une section du fibré:

$$J^1F_{(E)H} \to F_{(E)H}$$

des 1-jets de sections de $F_{(E)H} \to V$.

Il est clair que toute connexion linéaire adaptée à la G-structure $E(V, G)$ définit par projection un champ connexe de structures. Réciproquement, si un champ connexe de H-structures peut être défini de cette manière, il sera dit à *connexion admissible*.

Soit m un champ connexe de H-structures, adapté à E. On notera m_y l'élément horizontal défini par m en un point $y \in F_{(E)H}$. Au champ m on peut faire correspondre son image réciproque $\bar{m}$ sur $E(V, G)$, champ d'éléments de contact dont en chaque point l'intersection avec le sous-espace vertical correspond à la sous-algèbre de Lie h de g. $\bar{m}$ sera dit champ d'éléments de contact sur $E(V, G)$ associé à m.

S'il existe une section s de $F_{(E)H} \rightarrow V$ horizontale pour m, on dit que m admet une H-structure adpatée, qui sera $e_s(V, H)$. Bien entendu, réciproquement, tout H-structure subordonnée à E, $e(V, H)$ définit une section s et il existe une infinité de champs connexes de structures admettant e pour structure adaptée.

b) *En un sens évident*, la notion de champ connexe de H-structures généralise celle de connexion infinitésimale adaptée à $E(V, G)$: une telle connexion sera un champ connexe de $\{e\}$- structures à connexion admissible adapté à E.

On peut généraliser aux champs connexes de H-structures les notions de *torsion, courbure, transport parallèle*.

Sur le H-fibré principal:

$$E \rightarrow F_{(E)H}$$

muni de sa forme fondamentale θ, la donnée du champ m permet de définir un tenseur de structure, à valeurs dans:

$$\boldsymbol{R}^n \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*}) / \partial(h \otimes \boldsymbol{R}^{n*}) \ .$$

Ce tenseur sera obtenu, par projection dans cet espace, de la torsion d'un sous-espace horizontal de E "adapté" à m, c'est-à-dire se projetant sur l'élément de m au point correspondant de $F_{(E)H}$.

On pourra appeler ce tenseur de structure *torsion du champ m*.

Par ailleurs, au champ d'éléments de contact $\bar{m}$ on peut associer une 1-forme ω_m sur E à valeurs dans g/h: si v_z est un vecteur tangent à E en z, on peut d'une infinité de façons décomposer:

$$v_z = v_{zm} + v_{zv}$$

avec $v_{zm} \in \bar{m}_z$ et v_{zv} vertical. v_{zv} définit un élément $u(v_{zv})$ de l'algèbre de Lie g. La projection de $u(v_{zv})$ sur g/h ne dépend que de v_z et de m et sera par définition $\omega_m(v_z)$.

Ceci étant, on définira la *courbure du champ m* comme la 2-forme Ω_m sur E à valeurs dans g/h:

$$\Omega_m(v_z, w_z) = d\omega_m(v_{zm}, w_{zm}) \ .$$

Comme v_{zm} et w_{zm} sont définis modulo un vecteur vertical pour la fibration $E \rightarrow F_{(E)H}$, et que $d\omega_m(u_z, u'_z) = 0$ si u_z est vertical pour cette fibration et $u'_z \in \bar{m}_z$, la 2-forme Ω_m est bien définie.

Enfin, si y_0 est un point de $F_{(E)H}$ de projection x_0 sur V et si x_0x_1 est un chemin de V, le champ connexe de structures m définit au-dessus de x_0x_1 un transport de la fibre de $F_{(E)H}$ en x_0 sur la fibre en x_1. Ce transport de l'espace des H-structures subordonnées à E sera dit *transport structural parallèle* suivant le champ m.

On peut également, en généralisant la terminologie des connexions, appeler *nappe d'holonomie* de m en y_0 l'ensemble des points de $F_{(E)H}$ qui peuvent être atteints à partir de y_0 par un chemin horizontal par rapport à m. *L'espace d'holonomie* de m en y_0 sera l'intersection de la nappe d'holonomie en ce point et de la fibre correspondante.

Si par exemple m admet une section s horizontale, cette section sera une nappe d'holonomie de m, et en chaque point de cette section l'espace d'holonomie de m sera réduit à un point. On notera que ceci implique la nullité de la courbure sur cette section.

IV.2. Champ canonique sur une G-structure

En ce qui concerne l'étude détaillée du champ canonique que l'on va introduire, on pourra se référer à N. Boyom (voir [3]).

a) *On sait que toute* $0(n)$-*structure* a un tenseur de structure d'ordre 1 nul, et qu'il existe sur une telle structure une connexion unique sans torsion, la connexion de Levi-Civita, dont les propriétés caractérisent la structure.

Pour généraliser cette situation, on rappelle que, pour définir suivant Singer-Sternberg (article cité) les prolongements des G-structures on est amené à choisir, g étant l'algèbre de Lie de G, un supplémentaire $\mathscr{C}$ de $\partial(g \otimes \boldsymbol{R}^{n*})$ dans $\boldsymbol{R}^n \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^{n*})$. Ceci étant, sur une G-structure $E(V, G)$, les sous-espaces horizontaux "admissibles" seront ceux dont la torsion appartient à $\mathscr{C}$.

On posera alors:

Définition IV.2.1. Le champ d'éléments canonique M_0 sur $E(V, G)$ sera défini en chaque point $z \in E$ par le sous-espace M_{0z} engendré par la réunion des sous-espaces horizontaux admissibles. M_{0z} sera l'élément de contact canonique de E en z.

On vérifie immédiatement que la partie verticale de M_{0z} correspond à l'idéal de g:

$$h = g_1 = \rho(g^{(1)} \otimes \boldsymbol{R}^n) .$$

Exemples. 1. $G = 0(n)$, $g^{(1)} = 0$ donc $h = 0$ et le champ canonique M_0 est la connexion de Levi-Civita.

2. $n = 2m$, $G = GL(m, \boldsymbol{C})$.

Dans ce cas $g_1 = g$ et par suite M_{0z} est en chaque point l'espace tangent tout entier.

b) *Les principaux problèmes* qui se posent au sujet du champ d'éléments canonique sont:

1. est-il invariant à droite?
2. admet-il une variété intégrale?

Pour l'étude de ces problèmes, voir le travail cité de N. Boyom.

On va se contenter ici de relier cette notion à celle de champ connexe de structures définie au paragraphe précédent. Pour cela on sera amené à faire une hypothèse supplémentaire: on supposera que le sous-groupe de Lie connexe H de G défini par l'idéal $h = g_1$ de g est *fermè dans* G. Ceci étant, on peut se poser la question:

3. le champ canonique est-il le champ d'éléments de contact sur E associé à un champ connexe de H-structures; autrement dit, M_0 *est-il projetable* sur $F_{(E)H}$ en un champ m_0?

Supposons cette condition réalisée. Elle revient à supposer que M_0 est invariant par les translations à droite définies par H dans E. On pose alors:

Définition IV.2.2. m_0 est dit champ connexe de H-structures canonique sur $E(V, G)$. Sa courbure est dite *courbure intrinsèque* de E.

Cette courbire intrinsèque généralisera de façon naturelle la courbure riemannienne dans le cas $G = 0(n)$.

On a:

Proposition IV.2.3. *m_0 est l'unique champ connexe de H-structures sur E dont la torsion soit le tenseur de structure de la G-structure.*

Notons ici la particularité de la situation: h étant un idéal de g, $F_{(E)H} \to V$ est un G/H-fibré principal. On a en fait:

Proposition IV.2.4. *Si $E(V, G)$ est à connexion admissible, m_0 est une connexion infinitésimale sur $F_{(E)H}$ et la courbure intrinsèque de E est l'image réciproque de la courbure de m_0 par la projection $E \to F_{(E)H}$.*

c) *Si la structure considérée* n'est pas 1-plate, la définition du champ M_0 dépend de l'arbitraire du choix du supplémentaire $\mathscr{C}$ de $\partial(g \otimes R^{n*})$ dans $R^n \otimes \Lambda^2(R^{n*})$.

C'est seulement dans le cas d'une G-structure 1-plate (premier tenseur de structure nul) que le champ M_0 est vraiment "canonique". Notons que l'on est alors dans les conditions d'application de la proposition IV.2.4. L'étude de la connexion infinitésimale m_0 généralise alors directement la géométrie riemannienne, c'est-à-dire l'étude de la connexion de Levi-Civita sur une $0(n)$-structure.

d) *En ce qui concerne la courbure intrinsèque*, on peut donner un résultat simple en partant de l'exemple des structures plates:

Si $E(V, G)$ est plate, son champ canonique est complètement intégrable et sa courbure intrinsèque identiquement nulle. En effet, les coordonnées locales définissent des sections locales de E horizontales pour le champ d'éléments canonique. En fait, ce résultat est étroitement lié au théorème II.1.2 relatif aux sous-structures de codimension finie.

Plus généralement, on a:

Théorème IV.2.5. *Si $E(V, G)$ est 2-lisse, son champ canonique est complètement intégrable et sa courbure intrinsèque identiquement nulle.*

En se reportant aux notations du paragraphe III.3.b), soit $\mu = \tau^2 - \tau_0^2$ la torsion de la structure 2-lisse. On supposera que l'on a choisi le supplémentaire de $\partial(g \otimes R^{n*})$ dans $R^n \otimes \Lambda^2(R^{n*})$ de façon à contenir μ:

$$\mu \in \mathscr{C} .$$

Ceci étant, toute connexion sur E de torsion μ sera contenue dans le champ canonique. De plus, sa courbure sera contenue dans $\partial(g^{(1)} \otimes R^{n*})$. Donc ce sera une 2-forme à valeurs dans $g_1 = h$. Comme la courbure intrinsèque peut s'obtenir par projection de la courbure d'une connexion admissible sur l'espace $g/h \otimes \Lambda^2(R^{n*})$, il en résulte que la courbure intrinsèque est nulle. La complète intégrabilité du champ canonique est conséquence de cette nullité.

V. CLASSIFICATION DES G-STRUCTURES HOMOTOPES

V.1. G-structures quotient

a) *Soit W une variété différentiable* de dimension $N \geq n$. G étant toujours un sous-groupe de Lie de $GL(n, \boldsymbol{R})$, une *G-structure quotient* sur W sera un G-fibré principal $E(W, G)$ muni d'une 1-forme tensorielle θ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$ de rang n en tout point (voir [8] et [9]). θ définit sur W un système de Pfaff de rang n, donc un champ d'éléments de contact de codimension n. On notera M_x l'élément de ce champ en un point x de W. Les G-structures usuelles correspondent au cas où $n = N$.

Exemples. 1. Le fibré $R(V, GL(n, \boldsymbol{R}))$ des repères linéaires de V, muni de sa forme fondamentale, définit une G-structure quotient sur l'espace F_G des G-structures sur V.

2. Plus généralement, si $E(V, H)$ est une H-structure sur V, G fermé dans H, $E \to F_{(E)G}$ définit une G-structure quotient sur $F_{(E)G}$.

3. Si $G = GL(m, \boldsymbol{C})$, une G-structure quotient sera un système de Pfaff presque complexe.

b) *Les exemples* 1 *et* 2 *précédents* montrent l'intérêt des sous-variétés transverses au champ d'éléments de contact défini par une G-structure quotient. En effet, par exemple dans 1, une sous-variété transverse est une section de $F_G \to V$ et définit donc une G-structure sur V.

Plus généralement, soit S une sous-variété de dimension n de W transverse en chaque point à l'élément de contact défini par la G-structure quotient (E, θ). Alors (E, θ) induit sur S une G-structure (E_S, θ_S).

De façon un peu plus large, on peut énoncer:

Proposition V.1.1. *Si f: $V \to W$ est une immersion de la n-variété V dans*

W transverse au champ d'éléments de contact défini par (E, θ), alors la G-structure quotient induit par f sur V une G-structure $(f^*E, f^*\theta)$.

c) *Si l'on s'intéresse seulement* aux G-structures "admissibles" au sens de I.1; on pourra chercher à quelle condition la G-structure $(f^*E, f^*\theta)$, induite par l'immersion $f\colon V \to W$ transverse au champ d'éléments de contact $\{M_x\}$ est admissible ou presque admissible. Ce problème généralisera l'étude faite en I.1 du système différentiel fondamental pour les G-structures admissibles. On obtiendra un résultat analogue:

Lemme V.1.2. *Les tenseurs de structure jusqu'à l'ordre k de $(f^*E, f^*\theta)$ en un point $x \in V$ ne dépendent que du jet d'ordre k de f en x.*

Si l'on impose donc à ces tenseurs de structure de prendre les même valeurs que ceux de la structure modèle, on obtiendra une partie $J^k_{(E)\mathrm{adm}}$ de la variété $J^k_{(E)\mathrm{tr}}(V, W)$ des k-jets d'immersions transverses de V dans W. Pour $k \geq k_0$ on obtiendra le *système différentiel fondamental* pour les G-structures admissibles induites sur V à partir de la G-structure quotient (E, θ). Une solution de ce système sera une section de:

$$J^0_{(E)\mathrm{tr}}(V, W) = V \times W \to V ,$$

dont le jet d'ordre k en tout point appartiendra à $J^k_{(E)\mathrm{adm}}$ $(k \geq k_0)$. Une telle section définira une application $f\colon V \to W$ qui sera une immersion transverse au champ $\{M_x\}$ et telle que $(f^*E, f^*\theta)$ soit une G-structure presque admissible.

d) *Sur l'espace W muni de la G-structure* quotient (E, θ) on pourra définir un pseudogroupe $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{(E)\mathrm{adm}}$ de transformations locales de W qui sera dit *pseudogroupe des déformations simultanées de G-structures admissibles induites par (E, θ)*:

$\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{(E)\mathrm{adm}}$ sera le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de W qui respectent le champ d'éléments de contact $\{M_x\}$ et qui laissent invariant, pour tout k, l'espace $S^k_{(E)\mathrm{adm}}$ des k-jets de sous-variétés transverses "admissibles".

Il vient:

Proposition V.1.3. *Toute déformation simultanée transforme une sous-variété transverse sur laquelle (E, θ) induit une G-structure presque admissible en une autre sous-variété transverse ayant la même proproété.*

On posera:

Définition V.1.4. La G-structure quotient $E(V, G)$ est dite régulière (pour les G-structures admissibles) si $\mathscr{D}^{\mathrm{sim}}_{(E)\mathrm{adm}}$ est un pseudogroupe de Lie transitif sur W.

Ainsi, l'exemple 1 précédent est un exemple de G-structure quotient régulière. En général il n'en est pas de même des exemples 2 et 3.

V.2. G-structures quotient universelles et théorème de classification

a) *Soit m un entier $\geq n + 1$.* $GA(n + m, \boldsymbol{R})$ étant le groupe affine, on considère l'espace

$$\mathscr{E}_{0(m)} = GA(n+m, \boldsymbol{R})/GL(m, \boldsymbol{R})$$

et la projection naturelle:

$$\pi_{0(m)}: \mathscr{E}_{0(m)} \to \boldsymbol{R}^{n+m}$$

qui permet de considérer tout point $z \in \mathscr{E}_{0(m)}$ comme le couple (z_1, z_2) d'un m-élément de contact et d'un n-repère supplémentaire au point $y = \pi_{0(m)}(z)$ de $\boldsymbol{R}^{n+m}$.

Ceci étant, si v_z est un vecteur tangent à $\mathscr{E}_{0(m)}$ en z, v_y sa projection par $\pi_{0(m)}$ sur $\boldsymbol{R}^{n+m}$, v_y se décompose en $v_1 + v_2$ à l'aide du m-élément de contact z_1 et du n-repère transverse z_2. Ce n-repère z_2 fait alors correspondre à v_2 un vecteur de $\boldsymbol{R}^n$. On posera:

$$\theta_{0(m)}(v_z) = z_2(v_2) .$$

On obtient ainsi une 1-forme $\theta_{0(m)}$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$, de rang n en tout point. Cette forme est tensorielle pour la fibration principale:

$$\mathscr{E}_{0(m)} \to \mathscr{B}_{0(m)} = GA(n+m, \boldsymbol{R})/GL(n, \boldsymbol{R}) \times GL(m, \boldsymbol{R}) .$$

De même, considérons le G-fibré principal

$$\mathscr{E}_{0(m)} \to \mathscr{B}_{G(m)} = GA(n+m, \boldsymbol{R})/G \times GL(m, \boldsymbol{R}) .$$

Le couple $(\mathscr{E}_{0(m)}, \theta_{0(m)})$ définit une G-structure quotient sur $\mathscr{B}_{G(m)}$.

On vérifie immédiatement:

Proposition V.2.1. *La G-structure quotient* $(\mathscr{E}_{0(m)}, \theta_{0(m)})$ *sur* $\mathscr{B}_{G(m)}$ *est régulière quelle que soit la G-structure modèle choisie.*

En effet, pour tout couple (z_1, s_1) en y d'un m-élément de contact z_1 et d'un n-élément supplémentaire "G-structuré", et pour tout couple analogue (z'_1, s'_1) en y', on peut construire un difféomorphisme local de $\boldsymbol{R}^{n+m}$ envoyant z_1 sur z'_1 et s_1 sur s'_1. Ce difféomorphisme se relève alors en un difféomorphisme local de $\mathscr{B}_{G(m)}$ qui laisse invariant le système différentiel fondamental.

D'autre part, le théorème de plongement de Whitney entraine:

Théorème V.2.2. *Toute G-structure sur une n-variété arbitraire est induite à partir de* $(\mathscr{E}_{0(m)}, \theta_{0(m)})$ *par une immersion transverse de V dans* $\mathscr{B}_{G(m)}$.

En effet, on peut plonger V dans $\boldsymbol{R}^{n+m}$ et la G-structure donnée sur V permet de définir un relèvement de ce prolongement en une immersion transverse $V \to \mathscr{B}_{G(m)}$ répondant à la question.

On obtient donc par cette construction des *G-structures quotient* "universelles" pour tout entier $m \geq n + 1$.

b) On dit que deux G-structures sur la variété V sont homotopes si elles correspondent à des sections homotopes du fibré des G-structures sur V. Il est clair en particulier que deux G-structures homotopes ont les même classes caractéristiques.

On dira par ailleurs que deux immersions transverses $V \to \mathscr{B}_{G(m)}$ sont homotopes s'il existe une famille à un paramètre d'immersions transverses qui les relie entre elles.

Il est clair que, si f_1, f_2 sont deux immersions transverses homotopes de V dans $\mathscr{B}_{G(m)}$ (ou plus généralement dans la base d'une G-structure quotient), les G-structures induites correspondantes sont homotopes.

Supposons maintenant $m \geq n + 2$ et soient f_1 et f_2 deux immersions transverses de V dans $\mathscr{B}_{G(m)}$ telles que les G-structures induites correspondantes soient homotopes.

f_1 et f_2 se projettent en deux immersions φ_1 et φ_2 de V dans $\boldsymbol{R}^{n+m}$. On peut alors relier φ_1 et φ_2 par une famille φ_t d'immersions. Cette famille se relève dans $\mathscr{B}_{G(m)}$ en une famille à un paramètre d'immersions transverses partant de f_1 et aboutissant à $\tilde{f}_1$. On est ramené, pour prouver que f_1 et f_2 sont homotopes à prouver que $\tilde{f}_1$ et f_2, qui se projettent toutes deux suivant φ_2 sur $\boldsymbol{R}^{n+m}$, le sont.

En fait, on peut homotoper $\tilde{f}_1$ en $\tilde{\tilde{f}}_1$ de même projection φ_2 et telle que f_2 et $\tilde{\tilde{f}}_1$ aient la même projection sur $\mathscr{B}_{0(m)}$. Il suffit pour cela de remarquer que deux champs d'éléments de contact de $\boldsymbol{R}^{n+m}$ sur $\varphi_2(V)$ supplémentaires de l'espace tangent à $\varphi_2(V)$ sont nécessairement homotopes.

Ceci étant, f_2 et $\tilde{\tilde{f}}_1$ sont nécessairement homotopes puisqu'elles ont même projection sur $\mathscr{B}_{0(m)}$ et induisent des G-structures homotopes.

Il vient donc:

Théorème V.2.3. *Pour toute variété de dimension n, les classes d'homotopies de G-structures sur V correspondent biunivoquement aux classes d'homotopie d'immersions transverses de V dans* $\mathscr{B}_{G(m)}$, *avec* $m \geq n + 2$.

Bibliographie

[1] C. Albert, *Connexions sur les pseudogroupes de Lie,* Montpellier.

[2] C. Albert & P. Molino, *Réductions des* G-*structures formellement plates,* C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970) 384–387.

[3] N. Boyom, *Champ d'éléments canonique sur une* G-*structure,* Montpellier.

[4] R. Bott, *On topological obstructions to integrability*, Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, Vol. 1, 1971, 27–36.

[5] S. S. Chern, *The geometry of* G-*structures,* Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966) 167–219.

[6] V. Guillemin, *The integrability problem for* G-*structures,* Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965) 544–560.

[7] V. Guillemin & S. Sternberg, *Deformation theory of pseudogroup structures,* Mem. Amer. Math. Soc. No. 64, 1966.

[8] P. Molino, *Application des structures infinitésimales quotient à l'étude des problèmes d'existence pour les* G-*structures; définition d'un espace universel pour les* G-*structures,* C. R. Acad. Sci. Paris **266** (1968) 1243–1245.

[9] ——, *Sur la* G-*géométrie des variétés différentiables,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **23** (1969) 461–481.

[10] ——, *G-structures plates et classes caractéristiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **269** (1969) 917–919.
[11] I. M. Singer & S. Sternberg, *On the infinite groups of Lie and Cartan, Part* I (*The transitive groups*), J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.
[12] D. C. Spencer, *Deformations of structures on manifolds defined by transitive pseudogroups*. I, II, Ann. of Math. **76** (1962) 306–445.
[13] ——, *Overdetermined systems of linear partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 179–239.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER, FRANCE