J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1972) 357-373

SUR LA STRUCTURE DES EQUATIONS DE LIE: I. LE TROISIEME THEOREME FONDAMENTAL

HUBERT GOLDSCHMIDT

Dans [1], [2], Elie Cartan démontre le troisième théorème fondamental de la théorie des pseudogroupes de Lie, l'analogue du troisième théorème de Lie: "Toute algèbre de Lie de dimension finie sur $\boldsymbol{R}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie".

Nous donnons un énoncé du troisième théorème fondamental de Cartan dans le cadre de la nouvelle version ([9] et [10]) de la théorie des équations de Lie et des déformations de structures de Spencer ([15], [16] et [18]) élaborée par Malgrange et Spencer. D'autre part, la théorie des algèbres de Lie transitives de Guillemin-Sternberg [7] nous permet de formuler l'analogue exact du troisième théorème de Lie pour les pseudogroupes transitifs:

Toute algèbre de Lie transitive abstraite est isomorphe à l'algèbre de Lie transitive des solutions formelles en un point d'une équation de Lie analytique formellement intégrable et formellement transitive

qui découle du corollaire 6.1 et des résultats de Guillemin-Sternberg [7].

Cartan associe à tout pseudogroupe d'ordre 1 la famille d'algèbres de Lie des groupes d'isotropie linéaires et des fonctions de structure c_{ijk} qui vérifient deux équations qu'on appelle les équations de Cartan du pseudogroupe. Si le pseudogroupe est transitif, ces algèbres de Lie sont toutes isomorphes et les fonctions de structure sont des constantes; si le pseudogroupe provient d'un groupe de Lie, ces fonctions sont les constantes de structure du groupe. Si l'on se donne une algèbre de Lie involutive et des constantes c_{ijk} vérifiant les équations de Cartan, alors le troisième théorème fondamental de Cartan pour les pseudogroupes transitifs nous donne l'existence d'un pseudogroupe transitif analytique d'ordre 1 dont les constantes de structure sont les constantes données c_{ijk} et dont l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie linéaire est l'algèbre de Lie donnée.

Nous procédons comme Cartan et déterminons au § 1 d'abord les équations de Cartan d'une équation de Lie R'_k d'ordre k. Pour ce faire, nous sommes obligés de prendre une autre équation de Lie R_k d'ordre k et de supposer que R'_k est reliée à R_k par un automorphisme diagonal ϕ selon (1.3); on appellera R'_k l'équation R_k tordue par l'automorphisme ϕ. La première équation (1.1)

Received June 25, 1971. Due to its length this paper is being published in two parts; Part II will appear in the first issue of the next volume.

de Cartan de R'_k par rapport à R_k exprime que toute solution formelle d'ordre k de R'_k peut se relever en une solution formelle d'ordre $k+1$ (théorème 1.1). Si cette équation est satisfaite, la seconde équation (1.2) est alors bien définie et toujours vérifiée. En fait, si ces équations sont vraies pour R'_k, c'est l'automorphisme ϕ qui détermine une solution α des équations de Cartan par rapport à R_k.

Notre version du troisième théorème fondamental (théorème 2.1) peut s'énoncer ainsi: tout germe de solution analytique α des équations de Cartan par rapport à une équation de Lie R_k analytique dont le symbole est 3-acyclique provient d'une équation de Lie R'_k analytique formellement intégrable et égale à l'équation R_k tordue par un automorphisme diagonal ϕ. Il s'agit de trouver une solution ϕ d'une certaine équation différentielle non-linéaire N_1 analytique à l'aide de la théorie formelle des équations différentielles non-linéaires de [5]. Les méthodes de [5] montrent que l'opérateur $\hat{\mathscr{D}}_1$ du complexe non-linéaire de Spencer

$$\tilde{\mathscr{Q}}_k \xrightarrow{\hat{\mathscr{D}}} \hat{\mathscr{B}}^1_k \xrightarrow{\hat{\mathscr{D}}_1} \mathscr{B}^2_k$$

est la condition de compatibilité de $\hat{\mathscr{D}}$, ce qui nous permet de calculer la première obstruction à l'intégrabilité de N_1 et de vérifier qu'elle est nulle si α est une solution des équations de Cartan. La 3-acyclicité du symbole de R_k implique que le symbole de N_1 est 2-acyclique; l'intégrabilité formelle de N_1 et l'existence de la solution analytique cherchée ϕ découle alors de [5].

La seconde partie de cet article est consacrée à l'étude des équations de Lie formellement transitives. Elle comporte des résultats préliminaires au § 3 sur les connexions et les opérations dans les fibrés vectoriels et au § 4 sur la théorie des algèbres de Lie transitives sous la forme qui nous sera utile par la suite; en particulier, au § 4 nous introduisons les sous-algèbres de Lie tronquées qui, dans le cas des pseudogroupes d'ordre 1, sont les objets abstraits correspondants aux algèbres de Lie d'isotropie et aux constantes de structure. Au § 5, nous examinons la structure d'une équation de Lie R_k formellement transitive, et nous définissons son tenseur de structure c qui est une section d'un fibré affine, généralisant la construction classique du tenseur de structure des équations de Lie d'ordre 1 (cf. [14]). Les équations de Cartan peuvent s'écrire et l'intégrabilité de R_k peut s'interpréter directement à l'aide de c sans avoir recours à une équation de Lie auxiliaire. Toute solution formelle d'ordre k de R_k se relève en une solution formelle d'ordre $k+1$ si et seulement si la première équation de Cartan de R_k est vérifiée, c'est-à-dire si c est une "constante" et si c est invariant par l'algèbre de Lie d'isotropie $R^0_{k,x}$ d'un point x (corollaire 5.1). Si la première équation de Cartan est vraie pour R_k, alors la seconde équation de Cartan

$$\tfrac{1}{2}[c, c] = 0 ,$$

une expression quadratique en c généralisant l'équation (20) de [1] ou (4.5) de [7], est automatiquement vérifiée.

Au § 6, nous donnons la version du troisième théorème fondamental pour les pseudogroupes transitifs et ses applications à la structure des équations de Lie formellement transitives. L'analogue de la version donnée par Cartan nous dit que toute sous-algèbre de Lie tronquée d'ordre k, dont le symbole est 3-acyclique, provient d'une équation de Lie R'_k analytique d'ordre k formellement intégrable et formellement transitive (théorème 6.1). Il en découle que toute algèbre de Lie transitive est isomorphe à l'algèbre de Lie transitive déterminée par une équation de Lie analytique formellement intégrable et formellement transitive (corollaire 6.1), d'où le résultat cité plus haut et la généralisation aux équations de Lie analytiques formellement intégrables et formellement transitives (corollaire 6.2) du théorème classique suivant: toute sous-algèbre de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de G.

Donnons à titre d'exemple de nos méthodes l'esquisse de la démonstration du résultat suivant: pour toute équation de Lie R'_k d'ordre k formellement intégrable et formellement transitive, sur un voisinage d'un point x quelconque, il existe une équation de Lie *analytique* R''_k formellement intégrable et un automorphisme diagonal ϕ tels que R''_k soit l'équation R'_k tordue par ϕ et tels que $\phi(R'_k) = R''_k$. Pour montrer l'existence de R''_k, on peut supposer sans perte de généralité que le symbole de R'_k est 3-acyclique; on construit d'abord une équation de Lie analytique R_k dont l'algèbre de Lie d'isotropie au point x est égale à celle de R'_k. L'équation de Lie R'_k nous fournit alors une solution α sur un voisinage de x des équations de Cartan par rapport à R_k, qui est nécessairement analytique. Le théorème 2.1 nous dit que le germe de α en x provient d'un automorphisme diagonal analytique ψ; l'équation R_k tordue par ψ est analytique et vérifie les conditions requises.

Enfin, on montre que, pour démontrer le deuxième théorème fondamental pour les équations de Lie formellement intégrables et formellement transitives, on est ramené à examiner le cas des équations analytiques. En particulier, on peut supprimer l'hypothèse d'analyticité dans les résultats de Malgrange [9], [10]; le deuxième théorème fondamental est donc vrai pour une équation de Lie elliptique formellement intégrable et formellement transitive (théorème 7.1) et une telle équation est nécessairement analytique (théorème 7.2).

Le § 8 est consacré à l'application au problème d'équivalence des équations de Lie formellement transitives des résultats des § 5 et 6 et de la théorie du prolongement de [6].

Nous supposons connus les résultats de la théorie des équations de Lie exposée dans [9] ou [10] et nous employons en général la terminologie et les notations de [4] et de [10]. Nous joignons ci-dessous un index des principales notations pour faciliter la tâche du lecteur.

Je tiens à remercier vivement B. Malgrange et D. C. Spencer pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée tout au long de ce travail. Je suis tout particulièrement heureux de dédier cet article à S. S. Chern et à D. C. Spencer qui m'ont initié aux travaux d'Elie Cartan sur les pseudogroupes.

Index des principales notations

T : fibré tangent de la variété différentiable X

T^* : fibré cotangent de X

E : fibré sur X

$\mathscr{E}$: faisceau de germes de sections de E

$V(E)$: fibré des vecteurs verticaux de E

$J_k(E)$: fibré des jets d'ordre k de E

$p_l(\varphi)$: application de $J_{k+l}(E)$ dans $J_l(E')$ qui est le l-ième prolongement d'un morphisme $\varphi\colon J_k(E) \to E'$ de fibrés

$J_k(\mathscr{E})$: faisceau de germes de sections de $J_k(E)$

$\tilde{J}_k(T)$: fibré de "champs de vecteurs diagonaux" d'ordre k sur X (on identifiera $\tilde{J}_0(T)$ et T)

$\tilde{J}_k(\mathscr{T})$: faisceau de germes de sections de $\tilde{J}_k(T)$

$\check{J}_k(T)$: fibré de "champs de vecteurs sur $X \times X$ projetables par rapport à la première projection pr_1 de $X \times X$ sur X" d'ordre k sur X qui est la somme de ses sous-fibrés $J_k(T)$ et $\tilde{J}_k(T)$

$\check{J}_k(\mathscr{T})$: faisceau de germes de sections de $\check{J}_k(T)$

π_k : projection de $J_{k+l}(T)$ sur $J_k(T)$ ou de $\tilde{J}_{k+l}(T)$ sur $\tilde{J}_k(T)$

ν : isomorphisme canonique $\tilde{J}_k(T) \to J_k(T)$

$J_k^0(T)$: noyau de $\pi_0\colon J_k(T) \to J_0(T)$ égal à $J_k(T) \cap \tilde{J}_k(T)$

$J_k^0(\mathscr{T})$: $J_k(\mathscr{T}) \cap \tilde{J}_k(\mathscr{T})$

$S^kJ_0(T)^* \otimes J_0(T)$: sera identifié au noyau de $\pi_k\colon J_k(T) \to J_{k-1}(T)$ puisque l'isomorphisme canonique commute aux applications diagonales

$\mathscr{L}$: dérivée de Lie

D : opérateur différentiel $\wedge^p\mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T}) \to \wedge^{p+1}\mathscr{T}^* \otimes J_{k-1}(\mathscr{T})$

$\bar{D}$: opérateur différentiel $\wedge^p J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}) \to \wedge^{p+1}J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_{k-1}(\mathscr{T})$

δ : morphisme $\wedge^pT^* \otimes S^kJ_0(T)^* \otimes J_0(T) \to \wedge^{p+1}T^* \otimes S^{k-1}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ induit par $-D$

$\bar{\delta}$: morphisme
$\wedge^pJ_0(T)^* \otimes S^kJ_0(T)^* \otimes J_0(T) \to \wedge^{p+1}J_0(T)^* \otimes S^{k-1}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$
induit par $-\bar{D}$

χ : section de $J_0(T)^* \otimes \check{J}_k(T)$ induite par la connexion canonique de $pr_1\colon X \times X \to X$

B_k^p : $\dfrac{\wedge^pJ_0(T)^* \otimes \tilde{J}_k(T)}{\bar{\delta}(\wedge^{p-1}J_0(T)^* \otimes S^{k+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$

$B_k^{p,0}$: $\dfrac{\wedge^pJ_0(T)^* \otimes J_k^0(T)}{\bar{\delta}(\wedge^{p-1}J_0(T)^* \otimes S^{k+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$

$\hat{D}$: opérateur différentiel $\mathscr{B}_k^p \to \mathscr{B}_k^{p+1}$

$\check{B}_k^1$: $\dfrac{J_0(T)^* \otimes \check{J}_k(T)}{\bar{\delta}(S^{k+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$

$\hat{B}_k^1$: l'ensemble des $\alpha \in B_k^1$ dont la projection $\pi_0(\alpha)$ dans $J_0(T)^* \otimes T$ vérifie: "$\nu^{-1} - \pi_0(\alpha)$ est inversible"

$\bar{A}_k$: $\dfrac{J_0(T)^* \otimes J_k(T)}{\bar{\delta}(S^{k+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$

A_k : fibré affine formé des éléments $u \in \bar{A}_k$ tels que $\pi_0 u = \mathrm{id} \in J_0(T)^* \otimes J_0(T)$

R_k : équation différentielle linéaire dans $J_k(T)$

R_{k+l} : l-ième prolongement $(R_k)_{+l}$ de R_k $(l \geq 0)$

$\tilde{R}_{k+l}$: $\nu^{-1}(R_{k+l})$

$\tilde{\mathscr{R}}_{k+l}$: $\nu^{-1}(\mathscr{R}_{k+l})$

R_{k+l}^0 : noyau de $\pi_0 \colon R_{k+l} \to J_0(T)$

R_∞ : $\varprojlim R_{k+l}$

$(h_k)_{+l}$: sous-fibré à fibre variable de $S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$, le l-ième prolongement du sous-fibré à fibre variable h_k de $S^kJ_0(T)^* \otimes J_0(T)$

g_{k+l} : noyau de $\pi_{k+l-1} \colon R_{k+l} \to J_{k+l-1}(T)$, égal à $(g_k)_{+l}$ pour $l \geq 0$

$H^{k+l,j}(g_k)$: groupe de cohomologie du symbole de R_k

C_k^p : image de $\wedge^p J_0(T)^* \otimes \tilde{R}_k$ dans B_k^p

$C_k^{p,0}$: image de $\wedge^p J_0(T)^* \otimes R_k^0$ dans $B_k^{p,0}$

$\hat{C}_k^1$: $\hat{B}_k^1 \cap C_k^1$

$A(R_k^0)$: fibré affine quotient de A_k par $C_k^{1,0}$

Q_k : ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to X$ que l'on considérera sauf mention expresse du contraire comme fibré sur X par la projection "source"

$Q_k(a)$: ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to X$ de source a

$Q_k(a, b)$: ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to X$ de source a et de but b

$\tilde{\mathscr{Q}}_k$: sous-faisceau des éléments inversibles de $\mathscr{Q}_k$

$Q_{(l,k)}$: fibré des jets d'ordre l de sections étales de Q_k

τ_k : application qui fait correspondre à toute section de $\tilde{J}_k(T)$ un champ de vecteurs invariant à droite sur $Q_k(a)$

$I_k(a)$: jet d'ordre k en a de l'identité $X \to X$

I_k : la section $a \mapsto I_k(a)$ de Q_k

Q_k^0 : $\{F \in Q_k \mid \pi_0 F = I_0(a), \text{ si } a = \text{source } F\}$

$Q_{k+1}^k(a)$: ensemble des $G \in Q_{k+1}(a)$ avec $\pi_k G = I_k(a)$

$Q_{(l,k)}^0(a)$: $\{F \in Q_{(l,k)} \mid \pi_0 F = I_k(a)\}$

∂ : injection $Q_{(1,k)}^0(a) \to T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_a$

Aut (X) : faisceau de germes d'applications étales $X \to X$

$\tilde{j}_k$: injection canonique de Aut (X) dans $\tilde{\mathscr{Q}}_k$

$\tilde{\mathscr{D}}$: opérateur différentiel $\tilde{\mathscr{Q}}_{k+1} \to J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$

$\hat{\mathscr{D}}$: opérateur différentiel $\tilde{\mathscr{Q}}_k \to \mathscr{B}_k^1$
$\hat{\mathscr{D}}_1$: opérateur différentiel $\mathscr{B}_k^1 \to \mathscr{B}_k^2$
P_k : forme finie d'une équation de Lie R_k dans $J_k(T)$
$\tilde{\mathscr{P}}_k$: $\mathscr{P}_k \cap \tilde{\mathscr{Q}}_k$
$\tilde{\mathscr{P}}_{k,x}^0$: $\{F \in \tilde{\mathscr{P}}_{k,x} \mid F(x) = I_k(x)\}$
$\hat{\mathscr{Z}}_{k,x}^1$: $\{u \in \hat{\mathscr{C}}_{k,x}^1 \mid \hat{\mathscr{D}}_1 u = 0\}$
$\hat{H}^1(\mathscr{P}_{k,x})$: $\hat{\mathscr{Z}}_{k,x}^1 / \tilde{\mathscr{P}}_{k,x}^0$

1. Equations de Lie

Soit X une variété différentiable de dimension n. Nous noterons $\mathscr{O}_X$ le faisceau de germes de fonctions différentiables à valeurs réelles sur X et $\mathscr{O}_U$ la restriction de $\mathscr{O}_X$ à un ouvert $U \subset X$. Soient T le fibré tangent de X et T^* le fibré cotangent de X. Si E est un fibré sur X, que l'on ne supposera pas nécessairement localement trivial, $\mathscr{E}$ sera le faisceau de germes de sections de E, et E_x (resp. $\mathscr{E}_x$) la fibre de E (resp. $\mathscr{E}$) en $x \in X$; le fibré des vecteurs verticaux de E sera noté $V(E)$ et le fibré des k-jets de E sera noté $J_k(E)$.

Soit $R_k \subset J_k(T)$ une équation différentielle linéaire dans $J_k(T)$. On lui associe les prolongements $R_{k+l} \subset J_{k+l}(T)$ qui sont des fibrés à fibre variable et les faisceaux $\mathscr{R}_{k+l} \subset J_{k+l}(\mathscr{T})$. Rappelons que les $\mathscr{R}_{k+l}$ se déterminent par récurrence de la manière suivante: un élément u de $J_{k+l+1}(\mathscr{T})$ appartient à $\mathscr{R}_{k+l+1}$ si et seulement si $\pi_{k+l} u \in \mathscr{R}_{k+l}$ et $Du \in \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l}$ (cf. [4] et [10]). La limite projective $R_\infty = \varprojlim R_{k+l}$ est le sous-ensemble de $J_\infty(T) = \varprojlim J_{k+l}(T)$ des solutions formelles de l'équation différentielle R_k. Nous noterons $\tilde{R}_{k+l}$ (resp. $\tilde{\mathscr{R}}_{k+l}$) l'image de R_{k+l} (resp. $\mathscr{R}_{k+l}$) par ν^{-1} et R_{k+l}^0 (resp. g_{k+l}) le noyau de π_0: $R_{k+l} \to J_0(T)$(resp. π_{k+l-1}: $R_{k+l} \to J_{k+l-1}(T)$). Le groupe de cohomologie $H^{k+l,j}(g_k)$ du symbole de R_k est le groupe de cohomologie du complexe

$$\wedge^{j-1} J_0(T)^* \otimes g_{k+l+1} \xrightarrow{\bar{\delta}} \wedge^j J_0(T)^* \otimes g_{k+l}$$
$$\xrightarrow{\bar{\delta}} \wedge^{j+1} J_0(T)^* \otimes S^{k+l-1} J_0(T)^* \otimes J_0(T) .$$

Nous renvoyons le lecteur à [4] et [6] pour la théorie formelle des équations différentielles linéaires.

Posons

$$B_{k+l}^p = \frac{\wedge^p J_0(T)^* \otimes \tilde{J}_{k+l}(T)}{\bar{\delta}(\wedge^{p-1} J_0(T)^* \otimes S^{k+l+1} J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$$

et

$$B_{k+l}^{p,0} = \frac{\wedge^p J_0(T)^* \otimes J_{k+l}^0(T)}{\bar{\delta}(\wedge^{p-1} J_0(T)^* \otimes S^{k+l+1} J_0(T)^* \otimes J_0(T))} ;$$

soit $\mathscr{C}^p_{k+l}$ l'image de $\wedge^p J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_{k+l}$ dans $\mathscr{B}^p_{k+l}$.

Définissons $\kappa\colon \tilde{\mathscr{R}}_{k+l} \to \mathscr{B}^1_{k+l}/\mathscr{C}^1_{k+l}$ de la manière suivante. Si $\xi \in \tilde{\mathscr{R}}_{k+l}$, on prend un relèvement $\xi' \in \tilde{J}_{k+l+1}(\mathscr{T})$ de ξ; alors $\kappa(\xi)$ est la classe de $\bar{D}\xi'$ dans $\mathscr{B}^1_{k+l}/\mathscr{C}^1_{k+l}$. Il est facile de voir que κ est $\mathscr{O}_X$-linéaire et que

Proposition 1.1. *La suite des $\mathscr{O}_X$-modules*

$$\tilde{\mathscr{R}}_{k+l+1} \xrightarrow{\pi_{k+l}} \tilde{\mathscr{R}}_{k+l} \xrightarrow{\kappa} \mathscr{B}^1_{k+l}/\mathscr{C}^1_{k+l}$$

est exacte.

Remarque. Cette proposition se généralise de manière évidente aux équations différentielles dans un fibré quelconque; si R_{k+l} est un fibré vectoriel, l'obstruction à la surjectivité de $\pi_{k+l}\colon R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ peut être définie "fibre par fibre", ce qu'on fera pour les équations non-linéaires au § 2.

Soit C^p_k l'image de $\wedge^p J_0(T)^* \otimes \tilde{R}_k$ dans B^p_k; c'est un fibré vectoriel à fibre variable. Si g_{k+1} est un fibré vectoriel, C^1_k l'est aussi; si g_{k+1} et g_{k+2} sont des fibrés vectoriels et $H^{k,2}(g_k)=0$, alors C^2_k est aussi un fibré vectoriel et l'on a

$$C^2_k = \frac{\wedge^2 J_0(T)^* \otimes \tilde{R}_k}{\delta(J_0(T)^* \otimes g_{k+1})} \qquad \text{(cf. [4])} .$$

Définition. Une équation différentielle R_k dans $J_k(T)$ est une *équation de Lie* si l'on a $[\tilde{\mathscr{R}}_k, \tilde{\mathscr{R}}_k] \subset \tilde{\mathscr{R}}_k$. Nous dirons qu'elle est *formellement transitive* si $\pi_k\colon R_k \to J_0(T)$ est surjectif.

Rappelons que si R_{k+1} est un fibré vectoriel et R_k est une équation de Lie, on a

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{R}_k] \subset \mathscr{R}_k , \qquad [R_{k+1}, R_{k+1}] \subset R_k$$

(cf. [10, proposition 4.4]).

Posons

$$\check{B}^1_k = \frac{J_0(T)^* \otimes \check{J}_k(T)}{\bar{\delta}(S^{k+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$$

et notons aussi χ la section de $\check{B}^1_k$ image de la section χ de $J_0(T)^* \otimes \check{J}_k(T)$.

Soit $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie. Nous supposerons que g_{k+1} est un fibré vectoriel et que $H^{k,2}(g_k) = 0$; alors g_{k+2} et C^2_k sont aussi des fibrés vectoriels (cf. [5, lemme 6.5]). Soit α une section de B^1_k/C^1_k sur X et $\bar{\alpha}$ un représentant quelconque de α dans $\Gamma(X, B^1_k)$. Considérons la section $\bar{\alpha} - \chi$ de $\check{B}^1_k$ et sa classe $\alpha - \chi \in \Gamma(X, \check{B}^1_k/C^1_k)$, en notant aussi χ la classe de χ dans $\Gamma(X, \check{B}^1_k/C^1_k)$. Si $\xi \in \tilde{\mathscr{R}}_k$, alors $\mathscr{L}(\xi)(\bar{\alpha} - \chi) \in \mathscr{B}^1_k$; l'on a $\mathscr{L}(\xi)(\alpha - \chi) = 0$ si et seulement si $\mathscr{L}(\xi)(\bar{\alpha} - \chi) \in \mathscr{C}^1_k$. Si la première équation de Cartan de α

$$\text{(1.1)} \qquad \mathscr{L}(\xi)(\alpha - \chi) = 0 \qquad \text{pour tout } \xi \in \tilde{\mathscr{R}}_k$$

est satisfaite, on a $[\bar{\alpha} - \chi, \mathscr{C}_k^1] \subset \mathscr{C}_k^2$ et le crochet

$$\tfrac{1}{2}[\alpha - \chi, \alpha - \chi] \in \Gamma(X, B_k^2/C_k^2)$$

est donc bien défini et égal à la classe de la section

$$\tfrac{1}{2}[\bar{\alpha} - \chi, \bar{\alpha} - \chi] = -(\hat{D}\bar{\alpha} - \tfrac{1}{2}[\bar{\alpha}, \bar{\alpha}])$$

de B_k^2, et on peut écrire la seconde équation de Cartan de α

$$\tfrac{1}{2}[\alpha - \chi, \alpha - \chi] = 0 \, . \tag{1.2}$$

Si (1.1) est vrai, on a toujours

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi})(\tfrac{1}{2}[\alpha - \chi, \alpha - \chi]) = 0 \qquad \text{pour tout } \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k$$

d'après l'identité de Jacobi.

Soit $\hat{B}_k^1$ l'ensemble des $\alpha \in B_k^1$ dont la projection $\pi_0(\alpha)$ dans $J_0(T)^* \otimes T$ vérifie: "$\nu^{-1} - \pi_0(\alpha)$ est inversible". Si U est un ouvert de X, posons

$$\mathrm{Cart}\,(U, R_k) = \left\{ \alpha \in \Gamma(U, B_k^1/C_k^1) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ est la classe d'un élément } \bar{\alpha} \in \Gamma(U, \hat{B}_k^1)\,; \\ \text{les équations (1.1) et (1.2) sont vraies} \end{array} \right\} .$$

Soit $\phi \in \Gamma(X, \tilde{\mathscr{Q}}_k)$; on définit une équation de Lie $R'_k \subset J_k(T)$ par

$$\tilde{R}'_k = \phi(\tilde{R}_k) \, . \tag{1.3}$$

Notons que $R'^0_k = \phi(R^0_k)$ et que $g'_{k+l} = \phi(g_{k+l})$, pour $l \geq 0$, et que la cohomologie de g'_k est isomorphe à celle de g_k. En outre, si g_{k+l} (ou R_k^0) est un fibré vectoriel g'_{k+l} (ou R'^0_k) l'est aussi. Donc g'_{k+1}, C'^1_k, C'^2_k sont des fibrés vectoriels.

Posons

$$\bar{\alpha} = \hat{\mathscr{D}}\phi \in \Gamma(X, \hat{B}_k^1)$$

et

$$\hat{D}_\alpha \tilde{\xi} = \hat{D}\tilde{\xi} - [\bar{\alpha}, \tilde{\xi}] \, , \qquad \text{pour } \tilde{\xi} \in \tilde{J}_k(\mathscr{T}) \, .$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J}_k(\mathscr{T}) & \xrightarrow{\hat{D}_\alpha} & \mathscr{B}_k^1 \\ \Big\downarrow \phi & & \Big\downarrow \phi \\ \tilde{J}_k(\mathscr{T}) & \xrightarrow{D} & \mathscr{B}_k^1 \end{array}$$

est alors commutatif, ce qui est une conséquence directe de l'équation (5.6) de

[10]. Définissons une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\kappa'\colon \tilde{\mathscr{R}}'_k \to \mathscr{B}^1_k/\mathscr{C}^1_k$ par

$$\kappa'(\tilde{\xi}) = \mathscr{L}(\phi^{-1}(\tilde{\xi}))(\alpha - \bar{\chi}) \,, \qquad \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}'_k \tag{1.4}$$

où α est la classe de $\bar{\alpha}$ dans $\Gamma(X, B^1_k/C^1_k)$. Puisque $[\tilde{\mathscr{R}}_k, \mathscr{C}^1_k] \subset \mathscr{C}^1_k$, on a

$$\kappa'(\tilde{\xi}) = \phi^{-1}\kappa(\tilde{\xi}) \,, \qquad \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}'_k \,,$$

où κ est l'application de la proposition 1.1. La suite de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\tilde{\mathscr{R}}'_{k+1} \xrightarrow{\pi_k} \tilde{\mathscr{R}}'_k \xrightarrow{\kappa'} \mathscr{B}^1_k/\mathscr{C}^1_k$$

est donc exacte et

Théorème 1.1. *L'application $\pi_k\colon R'_{k+1} \to R'_k$ est surjective si et seulement si $\mathscr{L}(\tilde{\xi})(\alpha - \bar{\chi}) = 0$ pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k$.*

On appelle (1.1) la première équation de Cartan de R'_k par rapport à R_k; elle ne dépend que de R_k et de α. Si la première équation de Cartan est satisfaite, alors la seconde équation de Cartan (1.2) de R'_k par rapport à R_k est toujours vérifiée, puisque $\hat{\mathscr{D}}_1\mathscr{D}\phi = \hat{\mathscr{D}}_1\bar{\alpha} = 0$. Donc, dans ce cas, $\alpha \in \mathrm{Cart}\,(X, R_k)$.

2. Le troisième théorème fondamental

Nous généralisons maintenant la proposition 1.1 à certaines équations différentielles non-linéaires; nous employons la théorie formelle des équations différentielles non-linéaires et les notations de [5]. La proposition 2.1 complètera la théorie de [5].

Soient E, E' des fibrés sur X. Soit $\varphi\colon J_k(E) \to E'$ un morphisme de fibrés sur X de rang localement constant, et soit s' une section de E' sur X telle que $s'(X) \subset \varphi(J_k(E))$. Alors $N_k = \mathrm{Ker}_{s'}\,\varphi$ est une équation différentielle d'ordre k sur E déterminée par φ et s'. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
N_{k+1} & \longrightarrow & J_{k+1}(E) & \xrightarrow{p_1(\varphi)} & J_1(E') \\
\big\downarrow{\scriptstyle \pi_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\
N_k & \longrightarrow & J_k(E) & \xrightarrow{\varphi} & E'
\end{array}$$

est commutatif; la suite exacte de fibrés vectoriels à fibre variable sur N_k

$$0 \longrightarrow h_{k+1} \longrightarrow S^{k+1}T^* \otimes_{N_k} V(E) \xrightarrow{\varphi_* \circ \delta} T^* \otimes_{N_k} V(E') \xrightarrow{\tau} W \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

définit W et τ, où $h_{k+1} = (h_k)_{+1}$ avec $h_k = V(N_k) \cap \{S^kT^* \otimes_{N_k} V(E)\}$. On considère ici $V(E')$ comme un fibré vectoriel sur N_k au moyen de l'application $\varphi\colon N_k \to E'$.

Proposition 2.1. *Il existe une section Ω de W telle que la suite*

$$N_{k+1} \xrightarrow{\pi_k} N_k \overset{\Omega}{\underset{0}{\rightrightarrows}} W$$

soit exacte.

Démonstration. Pour tout élément u de N_k, posons

$$\Omega(u) = \tau(u, p_1(\varphi)v - j_1(s')(x)) ,$$

où $x = \pi(u)$, et v est un élément quelconque de $J_{k+1}(E)$ tel que $\pi_k(v) = u$. Puisque

$$\pi_0 p_1(\varphi)v = \varphi(u) = s'(x) = \pi_0 j_1(s')(x) ,$$

l'élément $p_1(\varphi)v - j_1(s')(x)$ de $T^*_x \otimes V_{\varphi(u)}(E')$ est bien défini, et $\Omega(u)$ appartient à W_u. Si v_1 est un autre élément de $J_{k+1}(E)$ tel que $\pi_k(v_1) = u$, d'après la proposition 5.6 de [5] l'on a:

$$p_1(\varphi)v_1 - p_1(\varphi)v = (\varphi_* \circ \delta)(v_1 - v) ;$$

il suit donc que:

$$p_1(\varphi)v_1 - j_1(s')(x) = (p_1(\varphi)v - j_1(s')(x)) + (\varphi_* \circ \delta)(v_1 - v)$$

en tant qu'éléments de $T^*_x \otimes V_{\varphi(u)}(E')$, et par conséquent $\Omega(u)$ ne dépend pas du choix de v. Puisque $N_{k+1} = \mathrm{Ker}_{j_1(s')}\, p_1(\varphi)$, l'on a pour $v \in N_{k+1}$, $u = \pi_k(v)$

$$\Omega(u) = \tau(u, p_1(\varphi)v - j_1(s')(x)) = 0 . \tag{2.2}$$

Inversement, si $u \in N_{k,x}$ satisfait $\Omega(u)=0$, et si $v \in J_{k+1}(E)$ satisfait $\pi_k(v)=u$, l'équation (2.2) est vérifiée. L'exactitude de la suite (2.1) implique l'existence d'un élément a de $S^{k+1}T^* \otimes_{N_k} V(E)$ tel que

$$(\varphi_* \circ \delta)a = (u, p_1(\varphi)v - j_1(s')(x)) .$$

Donc, d'après la proposition 5.6 de [5]

$$p_1(\varphi)((-a) + v) = (\varphi_* \circ \delta)a + p_1(\varphi)v = j_1(s')(x) ;$$

l'élément $(-a) + v$ de $J_{k+1}(E)$ appartient donc à N_{k+1} et l'on a $\pi_k((-a) + v) = u$, ce qui démontre la proposition.

Remarque. L'on aurait pu supposer que φ n'était défini que sur un sous-fibré ouvert de $J_k(E)$ et l'on aurait obtenu le même résultat. Les exemples qui se présentent en géométrie sont généralement de ce type; nous appliquerons la proposition 2.1 à des équations de ce type pour démontrer le théorème 2.1.

Soit $Q_{(l,k)}$ le fibré des jets d'ordre l de sections étales de Q_k. On a une injection canonique $Q_{(l,k)} \subset J_l(Q_k)$. La structure de fibré affine de $J_{l+1}(Q_k)$ sur $J_l(Q_k)$ de fibré vectoriel associé $S^{l+1}T^* \otimes_{J_l(Q_k)} V(Q_k)$, où $V(Q_k)$ désigne le fibré des vecteurs verticaux de Q_k, nous permet de donner à $Q_{(l+1,k)}$ une structure de fibré affine sur $Q_{(l,k)}$ de fibré vectoriel associé $S^{l+1}T^* \otimes_{Q_{(l,k)}} V(Q_k)$. Pour $F \in Q_k$ de source a et de but b, rappelons que nous avons un isomorphisme $F\colon \tilde{J}_k(T)_b \to V_F(Q_k)$, qui envoie ξ dans ξF, que l'on obtient en considérant les champs verticaux invariants à droite sur $Q_k(a)$ induits par les sections de $\tilde{J}_k(T)$ (cf. [10]). On a donc un isomorphisme canonique

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} F\colon S^{l+1}T^*_a \otimes \tilde{J}_k(T)_b &\to S^{l+1}T^*_a \otimes V_F(Q_k) , \\ u &\mapsto uF = u(\mathrm{id} \otimes F) , \end{aligned}$$

pour $F \in Q_k$ de source a et de but b. Si $G_1, G \in Q_{(1,k)}$ avec $\pi_0 G_1 = \pi_0 G = F$, on a $G_1 - G \in T^*_a \otimes V_F(Q_k)$ et $(G_1 - G)F^{-1} \in T^*_a \otimes \tilde{J}_k(T)_b$; pour $\xi \in \tilde{J}_k(T)_a$, on a la formule suivante

$$(2.4) \qquad G_1\xi - G\xi = \xi \barwedge (G_1 - G)F^{-1} .$$

Si $G = j_1(I_k)(a)$, alors par définition $\partial G_1 = (G_1 - G)F^{-1}$ et (2.4) se réduit à la formule (6.5) de [10]. Vérifions maintenant la formule (2.4). Soient s_1, s des sections étales de Q_k au voisinage de a telles que $j_1(s_1)(a) = G_1$, $j_1(s)(a) = G$. Alors les applications $\bar{s}_1\colon Q_k \to Q_k$, $\bar{s}\colon Q_k \to Q_k$ qui envoient q dans $s_1(y)\cdot q$ et $s(y)\cdot q$ respectivement, où $y = \text{but}\, q$, sont des difféomorphismes locaux; on a $s_1 = \bar{s}_1 \circ I_k$ et $s = \bar{s} \circ I_k$. L'élément $G_1 - G$ de $T^*_a \otimes V_F(Q_k)$ est déterminé par l'application $s_{1*} - s_* = (\bar{s}_{1*} - \bar{s}_*) \circ I_{k*}$ de T_a dans $T_F(Q_k)$(cf. [5]). Il existe une application $T_a \to T_F(Q_k)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T_{I_k(a)}(Q_k) \arrow[r, "\bar{s}_{1*} - \bar{s}_*"] \arrow[d, "\text{but}_*"] & T_F(Q_k) \\ T_a \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif; en effet, si $H(t)$ est une courbe dans Q_k avec $\text{but}\, H(t) = a$, $H(0) = I_k(a)$, on a

$$\bar{s}_1(H(t)) = s_1(a)\cdot H(t) = s(a)\cdot H(t) = \bar{s}(H(t))$$

et par suite $(\bar{s}_{1*} - \bar{s}_*)\left.\dfrac{dH(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Puisque I_k est un relèvement de la projection "but" $Q_k \to X$, on a

$$(\bar{s}_{1*} - \bar{s}_*) \circ I_{k*}(\pi_0\xi) = (\bar{s}_{1*} - \bar{s}_*)\xi$$

pour $\tilde{\xi} \in T_{I_k(a)}(Q_k)$. Comme on identifie $\tilde{J}_k(T)_a$ et $V_{I_k(a)}(Q_k)$ on obtient la relation

$$(\bar{s}_{1*} - \bar{s}_*)\tilde{\xi} = \tilde{\xi} \barwedge (G_1 - G) ,$$

pour $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_k(T)_a$, dont la formule (2.4) découle immédiatement (cf. [10]).

Si $H \in Q_{(1,k)}$ avec $H_0 = \pi_0 H \in Q_k$ et but $H_0 = a$, on a la formule suivante

$$[(G_1 - G)F^{-1}] \circ H = (G_1 H - GH)(FH_0)^{-1} . \tag{2.5}$$

En effet pour $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_k(T)_y$, où $y =$ source H_0, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} \barwedge ([(G_1 - G)F^{-1}] \circ H) &= (H\tilde{\xi}) \barwedge (G_1 - G)F^{-1} = G_1 H\tilde{\xi} - GH\tilde{\xi} \\ &= \tilde{\xi} \barwedge (G_1 H - GH)(FH_0)^{-1} . \end{aligned}$$

Comme $\hat{\mathscr{D}}: \tilde{\mathscr{Q}}_k \to \mathscr{B}_k^1$ est un opérateur différentiel d'ordre 1, il définit un morphisme de fibrés $p(\hat{\mathscr{D}}): Q_{(1,k)} \to B_k^1$. Notons $\rho: J_0(T)^* \otimes \tilde{J}_k(T) \to B_k^1$ la projection naturelle. Calculons maintenant l'application composée $\sigma(\hat{\mathscr{D}}; G)$

$$T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_b \xrightarrow{F} T_a^* \otimes V_F(Q_k) \xrightarrow{\mu} T_G(Q_{(1,k)}) \xrightarrow{p(\hat{\mathscr{D}})_*} B_{k,a}^1 .$$

Soit $u \in T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_b$ et soit $G(t)$ une courbe dans $Q_{(1,k)}$ avec $\pi_0 G(t) = F$ et $G(0) = G$ telle que

$$u = \frac{d}{dt}(G(t) - G)F^{-1}\Big|_{t=0} .$$

Alors en posant $H(t) = G(t)G^{-1}$, d'après la formule (7.13) de [10]

$$\sigma(\hat{\mathscr{D}}; G)u = \frac{d}{dt}p(\hat{\mathscr{D}})G(t)\Big|_{t=0} = G^{-1}\left(\frac{d}{dt}p(\hat{\mathscr{D}})H(t)\Big|_{t=0}\right) . \tag{2.6}$$

Si ϕ_t est une famille à un paramètre de sections de $\tilde{\mathscr{Q}}_k$ sur un voisinage U de a avec $\phi_0 = I_k$, alors $\dfrac{d}{dt}\phi_t(x) \in V_{I_k(x)}(Q_k)$ pour $x \in U$ et $\tilde{\xi} = \dfrac{d}{dt}\phi_t\Big|_{t=0} \in \Gamma(U, \tilde{J}_k(T))$ en identifiant comme d'habitude $\tilde{J}_k(T)_x$ et $V_{I_k(x)}(Q_k)$, et d'après le théorème 3.10 de [10]

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathscr{D}}\phi_t\Big|_{t=0} = \hat{D}\tilde{\xi} . \tag{2.7}$$

En particulier, si l'on choisit la famille ϕ_t telle que $j_1(\phi_t)(a) = H(t)$, on obtient d'après (2.5)

$$j_1(\tilde{\xi})(a) = \frac{d}{dt}H(t)\bigg|_{t=0} = \mu\left(\frac{d}{dt}(H(t) - H(0))\bigg|_{t=0}\right) = \varepsilon(u \circ G^{-1})$$

où $\varepsilon\colon T^* \otimes \tilde{J}_k(T) \to J_1(\tilde{J}_k(T))$ est l'inclusion naturelle (cf. [5, proposition 5.3]). Puisque $\tilde{\xi}(a) = 0$, et comme le symbole $\sigma(\hat{D})\colon T^* \otimes \tilde{J}_k(T) \to B_k^1$ envoie v dans $\rho(v \circ \nu^{-1})$, on a d'après (2.7)

$$\frac{d}{dt}p(\hat{\mathscr{D}})H(t)\bigg|_{t=0} = (\hat{D}\tilde{\xi})(a) = \sigma(\hat{D})(\varepsilon^{-1}j_1(\tilde{\xi})(a)) = \rho(u \circ G \circ \nu^{-1}) .$$

La formule (2.6) nous donne donc

$$\sigma(\hat{\mathscr{D}}; G)u = \rho(G^{-1} \circ u \circ G^{-1} \circ \nu^{-1} \circ F) . \tag{2.8}$$

Notons que ceci entraîne la surjectivité de $\sigma(\hat{\mathscr{D}}; G)$. Comme $Q_{(2,k)} = J_2(Q_k) \cap \pi_1^{-1}(Q_{(1,k)})$, le premier prolongement de $p(\hat{\mathscr{D}})$ est un morphisme de fibrés $p_1(\hat{\mathscr{D}})\colon Q_{(2,k)} \to J_1(B_k^1)$. L'opérateur différentiel $\hat{\mathscr{D}}_1\colon \mathscr{B}_k^1 \to \mathscr{B}_k^2$ induit un morphisme de fibrés $p(\hat{\mathscr{D}}_1)\colon J_1(B_k^1) \to B_k^2$.

Lemme 2.1. *Pour $k \geq 1$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc}
Q_{(2,k)} & \xrightarrow{p_1(\hat{\mathscr{D}})} & J_1(\hat{B}_k^1) & \xrightarrow{p(\hat{\mathscr{D}})} & B_k^2 \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \\
Q_{(1,k)} & \xrightarrow{p(\hat{\mathscr{D}})} & \hat{B}_k^1 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

est commutatif et exact, i.e. $p(\hat{\mathscr{D}})$ est surjectif et $\operatorname{Im} p_1(\hat{\mathscr{D}}) = \operatorname{Ker} p(\hat{\mathscr{D}}_1)$. *De plus, si $G \in Q_{(1,k)}$ et $v \in J_1(\hat{B}_k^1)$ satisfont $p(\hat{\mathscr{D}})G = \pi_0(v)$, alors il existe $G' \in Q_{(2,k)}$ avec $\pi_1 G' = G$ et $p_1(\hat{\mathscr{D}})G' = v$ si et seulement si $p(\hat{\mathscr{D}}_1)v = 0$.*

Démonstration. La surjectivité de $p(\hat{\mathscr{D}})$ découle de la proposition 7.5 de [10]. La condition $p(\hat{\mathscr{D}}_1)v = 0$ est évidemment nécessaire. Soient $F = \pi_0(G) \in Q_k$ et $a =$ source F, $b =$ but F. Rappelons que nous avons une projection naturelle $\tau\colon J_0(T)^* \otimes B_k^1 \to B_k^2$ induite par la multiplication $J_0(T)^* \otimes J_0(T)^* \to \wedge^2 J_0(T)^*$; elle est égale à $\sigma(\hat{D}) \circ (\nu^* \otimes \mathrm{id})$, où $\sigma(\hat{D})\colon T^* \otimes B_k^1 \to B_k^2$ est le symbole de $\hat{D}\colon \mathscr{B}_k^1 \to \mathscr{B}_k^2$. Définissons $\tau(G)\colon T_a^* \otimes B_{k,a}^1 \to B_{k,a}^2$ de la manière suivante: si $\beta \in T_a^* \otimes B_{k,a}^1$, alors $\tau(G)\beta$ est égal à $\tau(\beta \circ G^{-1} \circ \nu^{-1} \circ F) \in B_{k,a}^2$. On voit aisément que la suite

$$S^2T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_b \xrightarrow{\sigma_1(\hat{\mathscr{D}}; G)} T_a^* \otimes B_{k,a}^1 \xrightarrow{\tau(G)} B_{k,a}^2$$

est exacte où $\sigma_1(\hat{\mathscr{D}}; G) = \sigma(\hat{\mathscr{D}}; G) \circ \delta$. D'après la démonstration de la proposition 2.1, il existe $G' \in Q_{(2,k)}$ avec $p_1(\hat{\mathscr{D}})G' = v$ et $\pi_1 G' = G$ si et seulement si

$$\kappa(G, v) = \tau(G)\varepsilon^{-1}(p_1(\hat{\mathscr{D}})H - v)$$

est nul, où H est un élément quelconque de $Q_{(2,k)}$ avec $\pi_1 H = G$ et ε est l'injection naturelle $T^* \otimes B_k^1 \to J_1(B_k^1)$. Soient $\phi \in \tilde{\mathscr{Q}}_{k,a}$, $\alpha \in \mathscr{B}_{k,a}^1$ avec $H = j_2(\phi)(a)$ et $v = j_1(\alpha)(a)$. Montrons que

$$\kappa(G, v) = -p(\hat{\mathscr{D}}_1)v \; ; \tag{2.9}$$

le résultat cherché en découle immédiatement. D'abord, supposons que la projection $\pi_0 v$ de v dans $J_0(T)_a^* \otimes T_a$ soit nulle. Sous cette hypothèse $\pi_0\hat{\mathscr{D}}G = 0$ et

$$\kappa(G, v) = (\hat{D}(\hat{\mathscr{D}}\phi - \alpha))(a) = (\tfrac{1}{2}[\hat{\mathscr{D}}\phi, \hat{\mathscr{D}}\phi] - \hat{D}\alpha)(a) \; ;$$

comme $\alpha(a) = (\hat{\mathscr{D}}\phi)(a) \in B_{k,a}^{1,0}$ et comme le crochet $\mathscr{B}_k^{1,0} \otimes \mathscr{B}_k^{1,0} \to \mathscr{B}_k^2$ est $\mathscr{O}_X$-bilinéaire, on a $[\hat{\mathscr{D}}\phi, \hat{\mathscr{D}}\phi](a) = [\alpha, \alpha](a)$ et la formule (2.9) est donc vérifiée. Maintenant examinons le cas général. Pour tout $\psi \in \mathscr{Q}_{k,a}^0$, on a

$$\kappa(G, v) = \psi(\kappa(j_1(\phi\cdot\psi)(a), j_1(\alpha^{\psi})(a))) \; . \tag{2.10}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\kappa(j_1(\phi\cdot\psi)(a), j_1(\alpha^{\psi})(a)) &= \tau((\varepsilon^{-1}j_1(\hat{\mathscr{D}}(\phi\cdot\psi) - \alpha^{\psi})(a)) \circ (\phi\cdot\psi)^{-1} \circ \nu^{-1} \circ \phi \circ \psi) \\
&= \tau((\varepsilon^{-1}j_1(\psi^{-1}(\hat{\mathscr{D}}\phi - \alpha))(a)) \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \nu^{-1} \circ \phi \circ \psi) \\
&= \tau((\psi^* \otimes \psi^{-1})[(\varepsilon^{-1}j_1(\hat{\mathscr{D}}\phi - \alpha)(a)) \circ \phi^{-1} \circ \nu^{-1} \circ \phi]) \\
&= \psi^{-1}\tau((\varepsilon^{-1}j_1(\hat{\mathscr{D}}\phi - \alpha)(a)) \circ \phi^{-1} \circ \nu^{-1} \circ \phi) \\
&= \psi^{-1}\kappa(j_1(\phi)(a), j_1(\alpha)(a)) \; .
\end{aligned}$$

Prenons dans (2.10), $\psi \in \mathscr{Q}_{k,a}^0$ avec $\overline{\mathscr{D}}(\pi_1\psi^{-1}) = \pi_0\alpha \in J_0(\mathscr{T})_a^* \otimes \mathscr{T}_a$; l'existence d'un tel ψ résulte des assertions $(7.7)_0$ et (7.8) de [10]. Alors on a $\pi_0\alpha^{\psi} = \psi^{-1}(\pi_0\alpha - \overline{\mathscr{D}}(\pi_1\psi^{-1})) = 0$, et donc d'après le cas précédent et la formule (7.15) de [10], on obtient

$$\kappa(G, v) = -\psi(p(\hat{\mathscr{D}}_1)j_1(\alpha^{\psi})(a)) = -p(\hat{\mathscr{D}}_1)v \; ,$$

ce qui achève la vérification de (2.9).

Soit R_k une équation de Lie dans $J_k(T)$. Supposons que g_{k+1} soit un fibré vectoriel et que $H^{k,2}(g_k) = 0$. Si $\alpha \in \Gamma(X, B_k^1/C_k^1)$ et P_k est une forme finie de R_k, nous pouvons interpréter l'équation de Cartan (1.1) comme la forme infinitésimale de l'invariance de α par $\tilde{\mathscr{P}}_k$. En effet, si $\phi \in \tilde{\mathscr{P}}_k$, $\beta \in \mathscr{C}_k^1$, alors $\beta^{\phi} \in \mathscr{C}_k^1$, et par conséquent $\alpha^{\phi} \in \mathscr{B}_k^1/\mathscr{C}_k^1$ est bien défini. Si α est invariant par $\tilde{\mathscr{P}}_k$, c'est-à-dire si pour tout $\phi \in \tilde{\mathscr{P}}_k$, on a $\alpha^{\phi} = \alpha$, alors d'après (2.7) et le théorème 3.10 de [10], pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k$ l'équation de Cartan (1.1) est vraie.

Notons ϖ la projection naturelle de B_k^p sur B_k^p/C_k^p pour $p = 1, 2$. Posons

$\hat{\mathscr{D}}' = \varpi \circ \hat{\mathscr{D}}$; on a alors $p(\hat{\mathscr{D}}') = \varpi \circ p(\hat{\mathscr{D}})$: $Q_{(1,k)} \to B_k^1/C_k^1$ et $\sigma(\hat{\mathscr{D}}'; G) = \varpi \circ \sigma(\hat{\mathscr{D}}; G)$ pour $G \in Q_{(1,k)}$. Comme $\sigma(\hat{\mathscr{D}}'; G)$ est surjectif, $p(\hat{\mathscr{D}}')$ est de rang localement constant. Soit α une section de B_k^1/C_k^1 telle que $\alpha \in \Gamma(X, \varpi(\hat{B}_k^1))$; on a alors $\alpha(X) \subset p(\hat{\mathscr{D}}')Q_{(1,k)}$. Considérons l'équation $\hat{\mathscr{D}}'\phi = \alpha$, où $\phi \in \tilde{\mathscr{Q}}_k$; elle correspond à une équation différentielle $N_1 \subset Q_{(1,k)}$ qui est égale à $\mathrm{Ker}_\alpha\, p(\hat{\mathscr{D}}')$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.1 à N_1.

Si $G \in Q_{(1,k)}$ et $a =$ source $\pi_0 G$, $b =$ but $\pi_0 G$, l'image de $T_a^* \otimes C_{k,a}^1$ par $\tau(G)$ est égale à $C_{k,a}^2$, et par conséquent $\tau(G)$ induit une application

$$\tau'(G)\colon T_a^* \otimes (B_k^1/C_k^1)_a \to (B_k^2/C_k^2)_a\ .$$

On vérifie aisément que la suite

$$S^2T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_b \xrightarrow{\sigma_1(\hat{\mathscr{D}}'; G)} T_a^* \otimes (B_k^1/C_k^1)_a \xrightarrow{\tau'(G)} (B_k^2/C_k^2)_a \longrightarrow 0$$

est exacte, où $\sigma_1(\hat{\mathscr{D}}'; G) = \sigma(\hat{\mathscr{D}}'; G) \circ \delta$. Notons Ω l'application de N_1 dans B_k^2/C_k^2 définie par

$$\Omega(G) = \tau'(G)\varepsilon^{-1}(p_1(\hat{\mathscr{D}}')G' - j_1(\alpha)(a))$$

où $G \in N_1$ et $G' \in Q_{(2,k)}$ vérifient $\pi_1 G' = G$; d'après la proposition 2.1, Ω est bien défini et nous avons une suite exacte

$$N_2 \xrightarrow{\pi_1} N_1 \underset{0}{\overset{\Omega}{\rightrightarrows}} B_k^2/C_k^2\ .$$

Si $\bar{\alpha} \in \hat{\mathscr{B}}_{k,a}^1$ vérifie $\varpi\bar{\alpha} = \alpha \in (\mathscr{B}_k^1/\mathscr{C}_k^1)_a$, on a

$$\Omega(G) = \varpi\tau(G)\varepsilon^{-1}(p_1(\hat{\mathscr{D}})G' - j_1(\bar{\alpha})(a))\ .$$

Si de plus $\bar{\alpha}$ vérifie $p(\hat{\mathscr{D}})G = \bar{\alpha}(a)$, on obtient d'après (2.9)

$$\Omega(G) = \varpi\kappa(G, j_1(\bar{\alpha})(a)) = -\varpi((\hat{\mathscr{D}}_1\bar{\alpha})(a))$$

et $\Omega(G)$ est nul si et seulement si $(\hat{\mathscr{D}}_1\bar{\alpha})(a) \in C_k^2$.

Si $\alpha \in \mathrm{Cart}\,(X, R_k)$; alors $\alpha \in \Gamma(X, \varpi(\hat{B}_k^1))$, et pour tout représentant $\bar{\alpha} \in \Gamma(X, B_k^1)$ de α, on a $\hat{\mathscr{D}}_1\bar{\alpha} \in \Gamma(X, C_k^2)$(cf. § 1). Donc pour $G \in Q_{(1,k)}$, en prenant $\bar{\alpha}$ tel que $\bar{\alpha}(a) = p(\hat{\mathscr{D}})G$, on voit que $\Omega(G) = -(\hat{\mathscr{D}}_1\bar{\alpha})(a) \in C_k^2$, ce qui entraîne la surjectivité de l'application $\pi_1\colon N_2 \to N_1$.

Calculons maintenant la cohomologie du symbole de l'équation N_1 (cf. [5]). Soit $h_1 = V(N_1) \cap (T^* \otimes_{N_1} V(Q_k))$ et $h_{l+1} \subset S^{l+1}T^* \otimes_{N_1} V(Q_k)$ le l-ième prolongement de h_1. Si $G \in N_1$, avec $\pi_0 G = F \in Q_k$ et $a =$ source F, $b =$ but F, l'image de $h_{1,G}$ dans $T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_b$ par F est égale au noyau de $\sigma(\hat{\mathscr{D}}'; G)$.

Soit $\bar{h}_1 \subset T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$ le sous-fibré noyau de l'application surjective $\varpi \circ \rho \circ [(\nu^*)^{-1} \otimes \mathrm{id}]\colon T^* \otimes \tilde{J}_k(T) \to B_k^1/C_k^1$. Alors $h_{l+1,G}$ est l'image de $(\bar{h}_{1,a})_{+l} \subset S^l T_a^* \otimes \tilde{J}_k(T)_a$ par l'application $(\nu^{-1} \circ F^{-1} \circ \nu \circ G)^* \otimes \bar{G}$, où $\bar{G}$ est l'application $\tilde{J}_k(T)_a \to V_F(Q_k)$ induite par G (définie dans [10]), de sorte que h_1 est un fibré vectoriel sur N_1, et la cohomologie $H^{m,j}(h_1)_G$ est isomorphe à $H^{m,j}(\bar{h}_1)_a$. On calculera donc les groupes $H^{m,j}(\bar{h}_1)$.

Soit $\Delta_{l,k}\colon S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T) \to S^l J_0(T)^* \otimes S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ l'application naturelle (cf. [5]). Pour $l \geq 1$, soit $\bar{h}_l \subset S^l T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$ le sous-fibré à fibre variable $S^l T^* \otimes \tilde{R}_k + (\nu^* \otimes \mathrm{id})\Delta_{l,k}(S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T))$; on vérifie facilement que $\bar{h}_1$ coïncide avec le fibré défini plus haut en observant que l'application $\rho \circ [(\nu^*)^{-1} \otimes \mathrm{id}]\colon T^* \otimes C_k^1 \to C_k^2$ est surjective. Pour $l \geq 1$, on a la suite exacte

$$(2.11) \qquad 0 \longrightarrow g_{k+l} \xrightarrow{\beta} (S^l T^* \otimes \tilde{R}_k) \oplus (S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)) \xrightarrow{\gamma} \bar{h}_l \longrightarrow 0 ,$$

où $\beta(u) = ((\nu^* \otimes \mathrm{id}) \cdot \Delta_{l,k}u, \, -u)$ et $\gamma(v, w) = v + (\nu^* \otimes \mathrm{id}) \cdot \Delta_{l,k}w$. Les suites exactes (2.11) sont compatibles aux applications δ, notamment le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & g_{k+l+1} & \xrightarrow{\beta} & (S^{l+1}T^* \otimes \tilde{R}_k) \oplus (S^{k+l+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T)) & \xrightarrow{\gamma} & \bar{h}_{l+1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta\oplus\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & \\
0 \longrightarrow & T^* \otimes g_{k+l} & \xrightarrow{\beta} & (T^* \otimes S^l T^* \otimes \tilde{R}_k) \oplus (T^* \otimes S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)) & \xrightarrow{\gamma} & T^* \otimes \bar{h}_l & \longrightarrow 0
\end{array}$$

est commutatif, et l'on a donc $\bar{h}_{l+1} \subset (\bar{h}_l)_{+1}$. Notons $H^{l-j,j}$ la cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \bar{h}_l \xrightarrow{\delta} T^* \otimes \bar{h}_{l-1} \xrightarrow{\delta} \wedge^2 T^* \otimes \bar{h}_{l-2} \xrightarrow{\delta} \cdots \longrightarrow \wedge^n T^* \otimes \bar{h}_{l-n} \longrightarrow 0$$

en $\wedge^j T^* \otimes \bar{h}_{l-j}$; on prend ici $\bar{h}_0 = \tilde{J}_k(T)$ et $\bar{h}_m = 0$ pour $m < 0$. Les suites exactes (2.11) nous donnent une suite exacte de cohomologie. Comme les fibrés $T^* \otimes \tilde{R}_k$ et $S^{k+1}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ sont n-acycliques, cette suite exacte nous fournit des isomorphismes

$$\partial^\#\colon H^{l,j} \to H^{k+l-1,j+1}(g_k) .$$

En particulier si g_k est 2-acyclique, $H^{l,1} = 0$ pour $l \geq 1$ et $\bar{h}_{l+1} = (\bar{h}_1)_{+l}$ pour $l \geq 1$, et

Lemme 2.2. *Si g_k est 2-acyclique, $\partial^\#$ est un isomorphisme*

$$H^{l,j}(\bar{h}_1) \to H^{k+l-1,j+1}(g_k) .$$

Enfin, notons que l'application $\pi_0\colon N_1 \to Q_k$ est surjective. En effet, si $F \in Q_k(a)$ et $\bar{\alpha} \in \hat{B}^1_{k,a}$ avec $\varpi\bar{\alpha} = \alpha(a)$, il existe $G \in Q_{(1,k),a}$ vérifiant $p(\hat{\mathscr{D}})G = \bar{\alpha}$ d'après le lemme 2.1. Alors $F = H_0 \cdot (\pi_0 G)$ avec $H_0 \in Q_k$; prenons $H \in Q_{k+1}$

avec $\pi_k H = H_0$. Alors $p(\hat{\mathscr{D}})H = 0$ et d'après la formule (7.13) de [10], $p(\hat{\mathscr{D}})(HG) = p(\hat{\mathscr{D}})G = \bar{\alpha}(a)$. Il en résulte que $H \cdot G \in N_1$ et $\pi_0(H \cdot G) = F$.

Proposition 2.2. *Si g_k est 3-acyclique et si $\alpha \in \operatorname{Cart}(X, R_k)$, l'équation $N_1 = \operatorname{Ker}_\alpha p(\hat{\mathscr{D}}')$ est formellement intégrable.*

Démonstration. Nous avons montré que si $\alpha \in \operatorname{Cart}(X, R_k)$, l'application $\pi_1 \colon N_2 \to N_1$ était surjective. D'autre part, comme g_k est 2-acyclique, pour tout $G \in N_1$ avec $a =$ source $\pi_0 G$, le groupe de cohomologie $H^{l,2}(h_{1,G})$ est isomorphe à $H^{k+l-1,3}(g_{k,a}) = 0$ pour $l \geq 1$, d'après le lemme 2.2. Puisque h_1 est un fibré vectoriel, le théorème 8.1 de [5] nous permet de conclure que N_1 est formellement intégrable.

Supposons X muni d'une structure de variété analytique réelle compatible à sa structure de variété différentiable.

A l'aide du théorème 9.1 de [5](cf. [10, appendice]), on déduit de la proposition 2.2 et de la surjectivité de $\pi_0 \colon N_1 \to Q_k$, le résultat suivant:

Théorème 2.1 (*Troisième théorème fondamental*). *Soit R_k une équation de Lie analytique dans $J_k(T)$; supposons que g_{k+1} soit un fibré vectoriel et que g_k soit 3-acyclique. Si α est une section analytique de B_k^1/C_k^1 sur X et $\alpha \in \operatorname{Cart}(X, R_k)$, alors pour tout $x \in X$ et $F \in Q_k(x)$(resp. $G \in N_{1,x}$), il existe une section analytique ϕ de $\tilde{\mathscr{Q}}_k$ sur un voisinage V de x telle que $\hat{\mathscr{D}}'\phi = \alpha$ sur V et $\phi(x) = F$ (resp. $j_1(\phi)(x) = G$). Si $f = \pi_0\phi$, l'équation de Lie analytique R_k' dans $J_k(T)$ sur $f(V)$ définie par* (1.3) *est formellement intégrable.*

L'intégrabilité formelle de R_k' résulte du théorème 1.1, et du théorème 4.1 de [4] puisque g_k' est 2-acyclique.

Remarque. Si $F = I_k(x)$, alors dans le théorème précédent, on peut supposer que ϕ est une section de $\mathscr{Q}_k^0$ sur V. En effet, on remplace la section ϕ donnée par le théorème par $j_k(f)^{-1} \cdot \phi$.

INSTITUT DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES
UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE