J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
79 (2008) 479-516

SURFACES ISOTROPES DE $\mathbb{O}$ ET SYSTÈMES INTÉGRABLES

Idrisse Khemar

Résumé

We define a notion of isotropic surfaces in $\mathbb{O}$, i.e., on which some canonical symplectic forms vanish. Using the cross-product in $\mathbb{O}$ we define a map $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to S^6$ from the Grassmannian of $\mathbb{O}$ to S^6. This allows us to associate to each surface Σ of $\mathbb{O}$ a function $\rho_\Sigma\colon \Sigma \to S^6$. Then we show that the isotropic surfaces in $\mathbb{O}$ such that ρ_Σ is harmonic are solutions of a completely integrable system. Using loop groups we construct a Weierstrass type representation of these surfaces. By restriction to $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ we obtain as a particular case the Hamiltonian Stationary Lagrangian surfaces of $\mathbb{R}^4$, and by restriction to $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ we obtain the CMC surfaces of $\mathbb{R}^3$.

Introduction

Dans cet article, nous étudions certaines surfaces isotropes de $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. L'idée de s'intéresser à de telles surfaces vient de la volonté de chercher des analogues aux surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$, dans $\mathbb{R}^8$. Ces surfaces de $\mathbb{R}^4$ forment un système complètement intégrable présentant une structure inédite (cf. [**9**]) et il est naturel d'en chercher des généralisations dans $\mathbb{R}^8$ (cf. [**13**]).

Considérons une surface Σ lagrangienne de $\mathbb{R}^4$. On peut localement trouver une paramétrisation conforme de Σ par des coordonnées $(u, v) \in \Omega$, Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, i.e., une immersion $X : \Omega \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$dX = e^f(e_1du + e_2dv)$$

avec (e_1, e_2) base hermitienne de $\mathbb{C}^2$ pour tout $(u, v) \in \Omega$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. L'identification entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{C}^2$ est donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. A la surface Σ est associé *l'angle lagrangien* β défini par $e^{i\beta} = \det(e_1, e_2)$ (qui ne dépend pas de la paramétrisation choisie car il ne dépend que du plan tangent $T_{X(u,v)}\Sigma = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$).

Maintenant considérons la fonctionnelle d'aire $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Sigma dv$ sur l'ensemble des surfaces orientées lagrangiennes de $\mathbb{R}^4$. Un point critique pour cette fonctionnelle est une surface lagrangienne Σ telle que $\delta\mathcal{A}(\Sigma)(X) =$

Received 11/10/2006.

0 pour tout champ de vecteur X à support compact sur $\mathbb{R}^4$ avec la condition supplémentaire que X doit être lagrangien i.e., son flot préserve les surfaces lagrangiennes ; si on suppose que cela n'est vrai que si X est hamiltonien, i.e., $X = -i\nabla h$ avec $h \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ alors Σ est dite hamiltonienne stationnaire. On montre alors, cf.[**9**], que Σ est hamiltonienne stationnaire si, et seulement si, $\triangle\beta = 0$ où $\triangle$ est le laplacien sur Σ défini à l'aide de la métrique induite.

Dans [**9**], il est montré que les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$ sont solutions d'un système complètement intégrable. Dans le langage des systèmes complètement intégrables on construit une famille de connexions de courbure nulle α_λ, $\lambda \in S^1$ qui s'écrit :

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha'_2 + \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \lambda^2\alpha''_2 \tag{1}$$

(cf. [**9**], [**11**]).

Nous proposons ici de trouver des surfaces de $\mathbb{R}^8$ isotropes telles qu'à chacunes d'elle, Σ, corresponde une fonction $\rho_\Sigma : \Sigma \to S^3$ (analogue de $e^{i\beta} : \Sigma \to S^1$) et que les surfaces pour lesquelles ρ_Σ est harmonique forment un système complètement intégrable. Pour ce faire nous allons procéder par analogie avec les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$. Commençons par formuler le problème dans $\mathbb{R}^4$ à l'aide des quaternions. Ensuite nous procéderons par analogie en utilisant les octonions (Section 2). Le rappel des définitions et connaissances nécessaires sur les octonions est fait dans la section 1.

Pour $x, y \in \mathbb{H}$, on a

$$x \cdot \bar{y} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^4} - \omega(x,y)i - \det_{\mathbb{C}^2}(x,y)j = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^2} - \det_{\mathbb{C}^2}(x,y)j$$

où $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. Ainsi pour (e_1, e_2) base orthonormée d'un plan lagrangien de $\mathbb{R}^4$ on a

$$e_1 \cdot \bar{e}_2 = -e^{i\beta}j$$

où β est l'angle lagrangien du plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. On voit que l'on peut exprimer la contrainte lagrangienne ainsi que l'angle lagrangien à l'aide du produit dans $\mathbb{H}$. Plus précisemment, nous avons appliqué la procédure suivante : on forme le produit $x \cdot \bar{y}$, avec x, y de norme 1, puis on suppose que les deux premiers termes de $x \cdot \bar{y} \in \mathbb{H}$ dans la décomposition $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$, sont nuls et alors on a $x \cdot \bar{y} \in S^1 j$ ce qui nous permet de récupérer $e^{i\beta} \in S^1$.

Nous procéderons de même dans $\mathbb{R}^8$ en utilisant le produit des octonions (section 2). Pour $q, q' \in \mathbb{O} = \mathbb{H}^2$ on a

$$q \cdot \overline{q'} = \langle q, q'\rangle + \sum_{i=1}^{7} \omega_i(q, q')e_i$$

où $(e_i)_{0\leq i\leq 7}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^8$, $\omega_i = \langle \cdot, L_{e_i} \cdot \rangle$, et L_{e_i} designe la multiplication à gauche par e_i. Nous introduisons la décomposition

$$q.\overline{q'} = (B(q,q'), -\rho(q,q')) \in \mathbb{H}^2.$$

Alors nous regardons les surfaces isotropes pour ω_1, ω_2, ω_3, que nous appelons *surfaces* Σ_V. Nous nous intéressons donc à l'ensemble Q des plans de $\mathbb{O}$ isotropes pour ces 3 formes symplectiques. L'ensemble V des bases orthonormées de ces plans est l'ensemble des couples normées $(q,q') \in S^7 \times S^7$ qui vérifient $B(q,q') = 0$ (V est l'analogue de l'ensemble des bases hermitiennes de $\mathbb{C}^2$). On a alors $Q = V/SO(2)$, et $\rho(q,q') \in S^3$ pour tout $(q,q') \in V$ (la norme est multiplicative dans $\mathbb{O}$: $|qq'| = |q||q'| = 1$). On a ainsi défini une fonction $\rho : V \to S^3$ analogue à $e^{i\beta}$ et cette fonction passe au quotient en une application $\rho : Q \to S^3$.

D'autre part dans le cas de $\mathbb{R}^4$ on a le groupe $U(2)$ qui agit librement et transitivement sur l'ensemble des bases hermitiennes et on peut écrire l'action de $U(2)$ à l'aide des quaternions : on a le morphisme surjectif de groupe, de noyau ± 1 :

$$\begin{array}{rcl} S^3 \times S^3 & \to & SO(4) \\ (p,q) & \mapsto & L_p R_{\bar{q}} = R_{\bar{q}} L_p = (x \mapsto p x \bar{q}) \end{array}$$

et on peut écrire

$$x.\bar{y} = \langle x,y\rangle + \langle x,iy\rangle i + \langle x,jy\rangle j + \langle x,ky\rangle k.$$

Ainsi $U(2)$ est le sous-groupe de $SO(4)$ qui commute avec L_i d'où $U(2) = \{L_p R_{\bar{q}}\,,\, p \in S^1,\, q \in S^3\}$. Quant à $SU(2)$ c'est le sous-groupe de $SO(4)$ qui commute avec L_i, L_j, L_k d'où $SU(2) = \{R_q\,,\, q \in S^3\}$. D'une manière générale, pour $g = L_p R_{\bar{q}} \in SO(4)$ on a $(gx)(\overline{gy}) = p(x\bar{y})\bar{p}$.

Par analogie nous allons chercher le groupe qui conserve B, i.e., le sous-groupe de $SO(8)$ qui conserve $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Nous trouverons le groupe $SU(2) \times SU(2)$. Le résultat est très différent de ce qui ce passe dans $\mathbb{H}$ mais c'est le bon groupe de symétrie. En effet comme ρ_Σ est à valeurs dans S^3 et que nous voulons lui imposer d'être harmonique, nous allons utiliser la théorie des applications harmoniques du point de vue des systèmes intégrables (cf. **[3]** ainsi que **[6**, **7**, **1**, **8**, **2]**) et donc écrire S^3 comme un espace symétrique : $S^3 = S^3 \times S^3/\triangle$ où $\triangle$ est la diagonale de $S^3 \times S^3$, $\triangle = \{(a,a)\,,\, a \in S^3\}$ (et est l'analogue de $SU(2)$). Cependant nous nourrissons l'espoir d'avoir un groupe qui agit transitivement sur V (ce qui n'est pas le cas de $S^3 \times S^3$) ainsi qu'il en est pour $U(2)$ et les bases hermitiennes de $\mathbb{C}^2$. Nous allons donc chercher à grossir le groupe en prenant le sous-groupe de $SO(8)$ qui conserve la nullité de B : nous trouvons alors un groupe G de dimension 9 (V est de dimension 10) qui n'agit donc pas transitivement. Alors nous regardons l'action de G sur Q, qui lui est de dimension 9. Malheureusement nous trouvons que l'action n'est toujours pas transitive. Nous calculons alors les orbites : nous trouvons que toutes les orbites sont de dimension 8 sauf deux orbites dégénérées l'une de dimension 7, l'autre de dimension 6. En outre nous construisons une fonction $p\colon Q \to [0\,,\,1/2]$ dont les fibres sont les orbites de G, les orbites dégénérées étant $p^{-1}(\{0\})$ et $p^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ respectivement. Ensuite nous arrivons à trouver un moyen simple de passer d'une orbite à une autre (cf. théorème 6). Enfin nous terminons la Section 2 en étudiant algébriquement le groupe G et son algèbre de Lie.

Dans la Section 3 nous étudions les surfaces Σ_V. Nous montrons que celle dont le ρ_Σ est harmonique forment un système complètement intégrable : nous contruisons une famille de connexion de courbure nulle α_λ comme dans (1).

Ensuite nous montrons que les surfaces Σ_V sont solutions de deux équations l'une linéaire, l'autre non linéaire. (En fait c'est la même équation où on représente la surface de manière différente.)

Dans la Section 4, nous exposons la méthode des groupes de lacets, en se référant à **[3]** et **[9]** pour les détails. Puis nous obtenons une représentation de type Weierstrass pour les surfaces Σ_V.

Dans la Section 5, nous calculons le vecteur courbure moyenne d'une surface Σ_V (dans l'espoir d'obtenir une interprétation variationnelle).

Dans la Section 6, nous montrons que ce que nous avons fait pour les surfaces Σ_V est en fait un cas particulier de quelque chose de plus général. En effet, en considérant le produit vectoriel de $\mathbb{O}$, nous définissons une application $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to S^6$. Alors nous montrons que les surfaces immergées Σ de $\mathbb{O}$ telles que $\rho_\Sigma\colon z \in \Sigma \mapsto \rho(T_z\Sigma) \in S^6$ est harmonique (surfaces $\rho-harmoniques$) forment un système complètement intégrable. Le groupe de symétrie est alors $Spin(7)$. Plus généralement, soit $I \subsetneqq \{1, \ldots, 7\}$ alors les surfaces $\omega_I - isotropes$, i.e., isotropes pour ω_i, $i \in I$, dont le ρ_Σ (qui est alors à valeurs dans $S^I = S(\oplus_{i\notin I, i>0}\mathbb{R}e_i) \simeq S^{6-|I|}$) est harmonique, forment un système complètement intégrable. Le groupe de symétrie est alors $G_I \simeq Spin(7-|I|)$. Pour $I = \{1,2,3\}$, on retrouve les surfaces Σ_V. Nous construisons donc une famille $(\mathcal{S}_I)$ paramétrée par I, d'ensembles de surfaces solutions d'un système intégrable, tous inclus dans $\mathcal{S}_\emptyset$, telle que $I \subset J$ implique $\mathcal{S}_J \subset \mathcal{S}_I$. Par restriction à $\mathbb{H}$ on obtient les surfaces $\rho - harmoniques$, $\omega_I - isotropes$ de $\mathbb{H}$. Alors $\rho(Gr_2(\mathbb{H})) = S^2$ et $|I| = 0, 1$ ou 2. Pour $|I| = 1$ on retrouve les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$ et pour $|I| = 2$, les surfaces spéciales lagrangiennes. Par restriction à $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, on retrouve les surfaces CMC de $\mathbb{R}^3$. Nous terminons l'article par le calcul du vecteur courbure moyenne d'une surface quelconque de $\mathbb{O}$ en fonction de ρ (nous pensons qu'il existe une interprétation variationnelle des surfaces $\rho-$ harmoniques).

1. L'algèbre des octonions

1.1. Définitions. On rappelle ici les définitions et propriétés sur les octonions qui nous seront utiles pour la suite. Pour avoir plus de détails et pour les démonstrations on pourra consulter [**4**], [**5**]. On appelle algèbre des octonions l'espace vectoriel :

$$\mathbb{O} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}, \, x, y \in \mathbb{H} \right\} \subset M_2(\mathbb{H})$$

muni de la multiplication (i.e., application bilinéaire sur $\mathbb{O}$) :

$$\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -\bar{y}' \\ y' & \bar{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - y'\bar{y} & -\bar{y}\bar{x}' - \bar{y}'x \\ x'y + \bar{x}y' & \bar{x}'\bar{x} - y\bar{y}' \end{pmatrix}$$

On voit que l'on peut identifier $\mathbb{O}$ à $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$ muni de la multiplication

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - y'\bar{y} \\ x'y + \bar{x}y' \end{pmatrix}.$$

On définit une conjugaison $q \mapsto \bar{q}$ à l'aide de la conjugaison sur les matrices : $\overline{\binom{x}{y}} = \binom{\bar{x}}{-y}$. On remarque la présence d'un élément neutre pour la multiplication : $\mathbf{1} = (1, 0)$ et $\mathbb{O}$ est ainsi une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire. En particulier, $\mathbb{R}.\mathbf{1}$ est une sous-algèbre dont les éléments seront dits réels et caractérisés par $\bar{q} = q$.

On définit sur $\mathbb{O}$ la norme $N(q) = q.\bar{q} = \bar{q}.q = x\bar{x} + y\bar{y} \in \mathbb{R}$ qui n'est autre que la norme euclidienne standard de $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$. *Cette norme est multiplicative* : $N(qq') = N(q)N(q')$. En particulier S^7 est stable par multiplication. Les octonions orthogonaux à $\mathbf{1}$, $\mathbb{R}^\perp$, pour la norme N seront dits : *octonions pures*, et caractérisés par $\bar{q} = -q$, ou encore $q^2 \in \mathbb{R}^-$. Si on se restreint à la sphère $S^7 = \{q \in \mathbb{O}, \bar{q}.q = 1\}$ alors le sous-ensemble des octonions purs de S^7 est caractérisé par $q^2 = -1$.
La base canonique de $\mathbb{R}^8$ correspond en écriture matricielle à la base des octonions :

$$E^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I^\uparrow = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J^\uparrow = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, K^\uparrow = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$E^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; I^\downarrow = E^\downarrow I^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; J^\downarrow = E^\downarrow J^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^\downarrow = E^\downarrow K^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite il nous arrivera aussi de noter cette base $(e_i)_{0 \le i \le 7}$ (l'ordre des vecteurs étant toujours le même).
$\mathbb{O}$ n'est pas associative : $I^\downarrow(J^\downarrow K^\downarrow) = I^\downarrow(-I^\uparrow) = E^\downarrow$ tandis que $(I^\downarrow J^\downarrow)K^\downarrow = (-K^\uparrow)K^\downarrow = -E^\downarrow$.

1.2. Propriétés de la multiplication.

Proposition 1.
(i) $\langle xz, yz\rangle = N(z)\langle x, y\rangle,\ \langle zx, zy\rangle = N(z)\langle x, y\rangle,$
(ii) $\langle xz, yw\rangle + \langle yz, xw\rangle = 2\langle x, y\rangle\langle z, w\rangle,$
(iii) *si* $x \notin \mathbb{R}1$, $\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}x$ *est une algèbre isomorphe* (*isométrique*) *à* $\mathbb{C}$.

Proposition 2.
(i) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, $\bar{\bar{x}} = x$, $\langle x, y\rangle = Re(x\bar{y}) = Re(\bar{x}y),$
(ii) $x(\bar{x}y) = N(x)y$, $(x\bar{y})y = N(y)x,$
(iii) $x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) = 2\langle x, y\rangle z$, $(z\bar{y})x + (z\bar{x})y = 2\langle x, y\rangle z,$
(iv) *si* $\langle x, y\rangle = 0$, *alors* $x\bar{y} = -y\bar{x}$ *et* $x(\bar{y}z) = -y(\bar{x}z)$, $(z\bar{y})x = -(z\bar{x})y$.

Définition 1. On dira d'un élément $x \neq 0$ d'une algèbre A non associative qu'il est inversible s'il existe $x' \in A$ tel que $\forall y \in A$, $x'(xy) = x(x'y) = (yx)x' = (yx')x = y$. Ceci revient à dire que $L_x \colon y \mapsto xy$ et $R_x \colon y \mapsto yx$ sont inversibles d'inverses respectives $L_{x'}$ et $R_{x'}$.

Proposition 3. *Tout* $x \in \mathbb{O} \smallsetminus \{0\}$ *est inversible d'inverse* $N(x)^{-1}\bar{x}$. *En outre on a* ${}^tL_x = L_{\bar{x}}$, ${}^tR_x = R_{\bar{x}}$.

Proposition 4. *On a les propriétés d'associativité suivantes :*
(i)

$$\begin{aligned} (ax)(ya) &= a((xy)a) \\ a(x(ay)) &= (a(xa))y \\ x(a(ya)) &= ((xa)y)a, \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (xy)x &= x(yx) \\ x(xy) &= x^2y \\ (xy)y &= xy^2, \end{aligned}$$

(iii) $R_xL_x = L_xR_x$, $L_x^2 = L_{x^2}$, $R_x^2 = R_{x^2}$, $L_{axa} = L_aL_xL_a$, $R_{aya} = R_aR_yR_a$.

Proposition 5. *L'application trilinéaire* $\{x, y, z\} = (xy)z - x(yz)$ *est alternée donc antisymétrique.*

Proposition 6.
(i) $x, y \in \mathbb{O}$ *commutent si, et seulement si,* $(1, x, y)$ *est liée et alors la sous-algèbre* (*unitaire*) *engendrée par* x *et* y *est isomorphe à* $\mathbb{C}$ (*on suppose que* $\{x, y\} \nsubseteq \mathbb{R}1$).
(ii) *S'ils ne commutent pas alors la sous-algèbre qu'il engendrent est isomorphe* (*isométrique*) *au corps* $\mathbb{H}$ *des quaternions.*

(iii) *Si D est une sous-algèbre (unitaire) de $\mathbb{O}$ de dimension 4 (i.e., $\simeq \mathbb{H}$) et si $a \in D^\perp \setminus \{0\}$ alors $\mathbb{O} = D \oplus a.D$ et on a*

$$(x + ay)(x' + ay') = (xx' - \lambda y'\bar{y}) + a(x'y + \bar{x}y')$$

avec $\lambda = -N(a)$.

(iv) *Soit $a, b \in (\mathbb{R}1)^\perp$ unitaires et orthogonaux (alors comme $ab = -ba$) la sous-algèbre D engendrée par a, b est de dimension 4, et soit $c \in D^\perp$ unitaire alors $\{1, a, b, ab, c, ca, cb, c(ab)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{O}$ qui a la même table de multiplication que la base canonique.*

Proposition 7. *Si x, y ne commutent pas i.e., $(1, x, y)$ est libre alors $z \mapsto \{x, y, z\}$ n'est pas identiquement nulle autrement dit $L_{xy} \neq L_x L_y$ ou encore par antisymétrie $R_{yx} \neq R_x R_y$, ou encore $L_x R_y \neq R_y L_x$.*

Théorème 1. *Si $L_x L_y = L_z$ alors obligatoirement $z = xy$ et donc x, y commutent, et de même $R_x R_y = R_z \Longrightarrow z = yx$. Ainsi $\{L_x,\ x \in \mathbb{O}^*\}$ et $\{R_x,\ x \in \mathbb{O}^*\}$ ne sont pas des sous-groupes de $GL(\mathbb{O}) = GL(\mathbb{R}^8)$.*

Proposition 8. $L_x L_y = L_y L_x \Longleftrightarrow xy = yx$ *(idem pour R).*

2. Plans isotropes et Groupes opérants

2.1. Analogie à l'aide des octonions. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, on va étudier l'expression $q.\overline{q'}$ dans $\mathbb{O}$ par analogie avec $\mathbb{H}$. Soit donc $q = (x, y)$, $q' = (x', y') \in \mathbb{O}$, alors on a

$$q.\overline{q'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overline{x'} \\ -y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\overline{x'} + y'.\overline{y} \\ \overline{x'}y - \overline{x}y' \end{pmatrix}.$$

On peut aussi écrire en notant $(e_i)_{0 \le i \le 7}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ définie à la section 1 :

$$q \cdot \overline{q'} = \langle q, q' \rangle + \sum_{i=1}^{7} \langle q,\ e_i \cdot q' \rangle e_i.$$

Posons $\omega_i(q, q') = \langle q,\ e_i \cdot q' \rangle$, $0 \le i \le 7$, alors ω_i est la forme symplectique sur $\mathbb{R}^8$ associée à l'endomorphisme L_{e_i} $((L_{e_i})^2 = -Id)$. On a alors

$$q \cdot \overline{q'} = \langle q, q' \rangle + \sum_{i=1}^{7} \omega_i(q, q')\, e_i.$$

On notera

$$B(q, q') = x\,\overline{x'} + y'\overline{y} = \langle q, q' \rangle + \sum_{i=1}^{3} \omega_i(q, q')\, e_i$$

et

$$\rho(q, q') = \overline{x}y' - \overline{x'}y = -\sum_{i=4}^{7} \omega_i(q, q')\, e_{i-4}.$$

Soit alors $V = \{(q,q') \in S^7 \times S^7 / \ B(q,q') = 0\}$. On a alors pour tout $(q,q') \in V$

$$q \cdot \overline{q'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \end{pmatrix}$$

avec $\rho \in S^3$. Ceci s'écrit encore

$$q' = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \cdot q.$$

On a ainsi défini une fonction $\rho\colon (q,q') \in V \mapsto \rho(q,q') \in S^3$. On peut calculer les coordonnées de q' en fonction de celles de q d'après l'expression précédente :

$$q' = \begin{pmatrix} -y\bar{\rho} \\ x\rho \end{pmatrix},$$

avec $q = (x,y)$. En particulier on voit que V est une sous variété de $S^7 \times S^7$ difféomorphe à $S^7 \times S^3$, le difféomorphisme étant évidemment $(q,q') \mapsto (q,\rho)$. Enfin on remarque que ρ ne dépend que du plan orienté engendré par (q,q').

2.2. A la recherche de groupes agissant sur V. Cherchons le sous-groupe de $GL(8)$ qui conserve B, i.e., le groupe des éléments $g \in SO(8)$ qui commutent avec $L_{I\uparrow}, L_{J\uparrow}, L_{K\uparrow}$, i.e., avec les $L_{(x,0)}$, $x \in \mathbb{H}$. On a $L_{(x,0)} = \begin{pmatrix} L_x & 0 \\ 0 & L_{\bar{x}} \end{pmatrix}$ ainsi en posant $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ on a pour tout $x \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} L_x & 0 \\ 0 & L_{\bar{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x & 0 \\ 0 & L_{\bar{x}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_x A - A L_x & L_x B - B L_{\bar{x}} \\ L_{\bar{x}} C - C L_x & L_{\bar{x}} D - D L_{\bar{x}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En égalant la dernière matrice à 0 on obtient : $\forall x \in \mathbb{H}\ [L_x, A] = [L_x, D] = 0$, $BL_x = L_{\bar{x}}B,\ CL_x = L_{\bar{x}}$. Les équations sur A, D signifient que $A = R_a$, $D = R_d$ avec $a, d \in \mathbb{H}$. Pour B, C on a $B(x.1) = \bar{x}B(1)$ d'où $B(ax) = \overline{ax}B(1)$ mais on a aussi $B(ax) = B(L_a x) = \bar{a}B(x) = \bar{a}\bar{x}B(1)$ or comme $\overline{ax} \neq \bar{a}\bar{x}$ en général on a donc $B(1) = 0$ et donc $B = 0$ et de même pour C. D'où

Théorème 2. *$g \in SO(8)$ conserve B si, et seulement si,*

$$g = \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_d \end{pmatrix}$$

avec $a, d \in S^3$, ainsi le groupe conservant B est $SU(2) \times SU(2)$.

Remarque 1. Le groupe obtenu n'agit pas transitivement. D'autre part, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{H}$, ici, comme on l'a vu dans la section 1, R_q et L_p ne commutent pas, $\{R_q L_p,\ q, p \in S^7\}$ n'est pas un groupe et on n'a pas : $(qb)\overline{(q'b)} = q\overline{q'}$.

On peut se demander pourquoi le résultat est très différent de ce qui se passe avec les quaternions où le groupe qui conserve $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$, i.e., $U(2)$, agit transitivement sur les bases hermitiennes. Cela s'explique par l'absence d'associativité. Dans $\mathbb{H}$, si $g \in SO(4)$ commute avec L_i et L_j, il commute alors avec $L_k = L_i L_j$ tandis que dans $\mathbb{O}$ le fait de commuter avec $L_{K\uparrow}$ est une condition supplémentaire. D'ailleurs, on peut voir que le sous-groupe de $SO(8)$ qui commute avec $L_{I\uparrow}, L_{J\uparrow}$ est de dimension 10 (car isomorphe à $Sp(2) = U(2,\mathbb{H})$) et donc la condition de commutativité avec $L_{K\uparrow}$, fait passer la dimension de 10 à 6. Le groupe, $S^3 \times S^3$, ainsi obtenu est le bon groupe de symétrie recherché pour obtenir un système complètement intégrable, car pour écrire S^3 sous la forme d'un espace symétrique , on peut écrire $S^3 = S^3 \times S^3/\triangle$ où $\triangle$ est la diagonale.

De même dans [**9**], il suffirait de se restreindre au groupe S^1, or les auteurs y utilisent le groupe $U(2)$ tout entier qui agit transitivement sur les bases hermitiennes, en écrivant que $S^1 = U(2)/SU(2)$. On voudrait ici de la même manière trouver un groupe (contenant $S^3 \times S^3$) qui agisse transitivement (ou du moins "le plus transitivement possible") sur V. Car dans le cas où G agit transitivement sur V on peut toujours relever un couple $(q,q') \in V$ en un élément de G, et le fait de travailler sur G permet de représenter une surface par un élément de $\mathbb{R}_+^*.G$ (dans [**10**] on obtient ainsi une équation de Dirac). D'autre part, on veut comprendre la géométrie de V, i.e., la géométrie des plans isotropes pour les trois formes symplectiques ω_i, $i = 1,2,3$ de la même façon que la géométrie des plans lagrangiens de $\mathbb{C}^2$ est étudiée (ou rappelée) dans [**9**].

Le plus gros groupe qui conserve V est le sous groupe de $SO(8)$ qui conserve la nullité de B. Il est donné par :

Théorème 3. *Soit $G = \{g \in SO(8)/B(q,q') = 0 \iff B(g.q,g.q') = 0\}$, c'est le plus grand sous-groupe de $GL(8)$ qui stabilise V. Il existe un morphisme surjectif $\theta\colon G \to O(3) \subset O(4)$ à valeurs dans le groupe des isométries de $\mathbb{H}$ qui fixent 1, tel que $\theta^{-1}(SO(3)) = G^0$, la composante neutre de G, et $\theta^{-1}(O^-(3)) = L_{E\downarrow}G^0$, donc*

$$G = G^0 \sqcup L_{E\downarrow}G^0,$$

et tel que tout $g \in G^0$ s'écrit $g = \begin{pmatrix} R_a\theta(g) & 0 \\ 0 & R_b\theta(g) \end{pmatrix}$. Plus Précisement

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} R_a L_c & 0 \\ 0 & R_b L_c \end{pmatrix},\ a,b,c \in S^3 \right\}.$$

De plus on a $\forall q,q' \in \mathbb{O}$, $B(g.q,g.q') = \theta(g)(B(q,q'))$ pour tout $g \in G$. En outre pour tout $g \in G^0$, on a $\theta(L_{E\downarrow}g) = \theta(g)* = *\theta(g)$ où $*$ désigne la conjuguaison de $\mathbb{H}$ qui est aussi l'élément $-I_3$ de $O(\operatorname{Im}\mathbb{H}) = O(3)$. Enfin dans G^0, on a $\theta(Diag(R_aL_c, R_bL_c)) = Int_c = (x \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \mapsto cxc^{-1})$.

Démonstration — Dire que $g \in GL(8)$ vérifie $B(q,q') = 0 \Longrightarrow B(g.q, g.q') = 0$ revient à dire que $(\langle q, L_{e_i}q'\rangle = 0,\ 0 \le i \le 3) \Longrightarrow (\langle g.q, L_{e_i}g.q'\rangle$

$= 0,\ 0 \leq i \leq 3)$ ce qui équivaut à

$$ {}^t g L_{e_i} g = \sum_{j=0}^{3} \theta_{ij} L_{e_i}, \quad 0 \leq i \leq 3 \tag{2} $$

avec $\theta_{ij} \in \mathbb{R}$. Alors en posant $\theta(g) = (\theta_{ij})_{0 \leq i,j \leq 3}$, on a $\theta(gg') = \theta(g)\theta(g')$ pour tout $g, g' \in G' = \{g \in GL(8)/\ B(q,q') = 0 \Longleftrightarrow B(g.q, g.q') = 0\}$. En effet on a

$$ \begin{aligned} {}^t(gg')L_{e_i}(gg') = {}^t g' \left(\sum_{j=0}^{3} \theta_{ij}(g) L_{e_j} \right) g' &= \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \theta_{ij}(g)\theta_{jk}(g') L_{e_k} \\ &= \sum_{k=0}^{3} (\theta(g)\theta(g'))_{ik} L_{e_k} \end{aligned} $$

d'où le résultat. Ainsi $\theta \colon G' \mapsto GL(4)$ est un morphisme de groupe. Prenons $i = 0$ dans (2), comparons l'équation obtenue avec sa transposée, alors en utilisant que ${}^t L_{e_j} = -L_{e_j}$ pour $j \geq 1$, on voit que l'on doit avoir ${}^t gg = \theta_{00} Id$ et $\theta_{0j} = 0$ pour $1 \leq j \leq 3$. En procédant de même pour $i \geq 1$ on obtient $\theta_{i\,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$; il en résulte que $\theta = Diag(\theta_{00},\ \mu)$ avec $\mu \in GL(3)$. De plus comme ${}^t gg = \theta_{00} Id$, on doit avoir $\theta_{00} > 0$ et donc $G' = \mathbb{R}_+^*.G$ avec, rappelons le, $G = G' \bigcap SO(8)$. Maintenant en écrivant (2) pour $i \geq 1$ et $g \in G$, et en utilisant le fait que les $L_{e_i},\ i \geq 1$, anticommutent deux à deux, on obtient :

$$ \begin{aligned} -2\delta_{ik} Id &= g^{-1}(L_{e_i} L_{e_k} + L_{e_k} L_{e_i}) g \\ &= (g^{-1} L_{e_i} g)(g^{-1} L_{e_k} g) + (g^{-1} L_{e_k} g)(g^{-1} L_{e_i} g) \\ &= \sum_{1 \leq j,l \leq 3} \mu_{ij}\mu_{kl}(L_{e_j} L_{e_l} + L_{e_l} L_{e_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij}\mu_{kj}(-2Id) \end{aligned} $$

d'où $\mu(g) \in O(3)$ si $g \in G$.

Cherchons, ensuite à quelles conditions $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$. Pour cela , on utilise toujours (2), et le fait que $L_{e_i} = \begin{pmatrix} L_{e'_i} & 0 \\ 0 & -L_{e'_i} \end{pmatrix}$ avec $(e'_1, e'_2, e'_3) = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$, cela donne :

$$ \begin{pmatrix} L_{e'_i} A & L_{e'_i} B \\ -L_{e'_i} C & -L_{e'_i} D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AL_{\mu^i} & -BL_{\mu^i} \\ CL_{\mu^i} & -DL_{\mu^i} \end{pmatrix} $$

où $\mu^i = \sum_{j=0}^{3} \mu_{ij} e'_j \in \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \operatorname{Im}\mathbb{H}$. Ainsi pour A par exemple, on a $L_{e'_i} A = A L_{\mu^i}$, d'où $e'_i.A(1) = A(\mu^i)$ ce qui imlique que

$$A. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & {}^t\mu & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (a,\ e'_1.a,\ e'_2.a,\ e'_3.a) = R_a$$

avec $a = A(1)$. Finalement on a donc $A = R_a.Diag(1,\ \mu) = R_a.\theta$ et de même $D = R_d.Diag(1,\ \mu)$, $B = R_b.Diag(1, -\mu)$, $C = R_c.Diag(1, -\mu) = R_c.Diag(1,\ \mu)*$, où $* = Diag(1, -I_3)$ est la conjuguaison dans $\mathbb{H}$.

Ensuite on écrit qu'on doit avoir $L_{e'_i}.A(e'_j) = A(\mu^i.e'_j)$ pour $1 \leq i, j \leq 3$ en utilisant l'expression de A que l'on vient d'obtenir. On trouve, après calcul, que :

$$(L_{e'_i} = A L_{\mu^i},\ 1 \leq i \leq 3) \Longleftrightarrow (\mu = com(\mu) \text{ ou } a = 0)$$

(com désigne la comatrice), comme $\mu \in O(3)$ cela veut dire $\det \mu = 1$ ou $a = 0$. On trouve la même chose pour D. Pour B on a aussi :

$$(L_{e'_i} = -B L_{\mu^i},\ 1 \leq i \leq 3) \Longleftrightarrow (\det(\mu) = -1 \text{ ou } b = 0)$$

et de même pour C. On achève la démonstration en remarquant que $L_{E^\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$, et que le groupe des automorphismes de $\mathbb{H}$ est égal au groupe des automorphismes intérieurs de $\mathbb{H}$ qui n'est autre que $SO(\operatorname{Im}\mathbb{H})$. q.e.d.

Ce théorème permet de voir comment $\rho\colon (q, q') \mapsto \rho(q, q') = \bar{x}y' - \bar{x}'y$ se transforme sous l'action de G :

$$\rho(g.q, g.q') = \bar{a}\rho(q, q')b \quad \text{pour} \quad g = Diag(R_a L_c,\ R_b L_c)\ .$$

Ainsi l'action de G^0 sur $V \cong \{(q, \rho) \in S^7 \times S^3\}$ s'écrit $g \cdot (q, \rho) = (g.q,\ \bar{a}\rho\, b)$. En outre, on voit que l'action de G sur ρ définit une action transitive de G^0 sur S^3. Si l'on oublie les L_c qui n'ont aucun effet sur ρ, et que l'on se restreint au groupe $S^3 \times S^3$, cette action n'est autre que le revêtement universel de $SO(4)$. Maintenant pour $g' = Diag(R_a L_c, R_b L_c).L_{E^\downarrow}$ on a

$$\rho(g'.q, g'.q') = \bar{a}\,\overline{\rho(q, q')}\,b.$$

On a donc trouvé un groupe G de dimension 9 agissant sur V qui est de dimension 10. Cette action ne peut donc pas être transitive. On est donc amené à étudier l'action de G sur les plans engendrés par les éléments de V, en espérant qu'elle soit transitive.

2.3. Action de G sur les plans de $V/SO(2)$. Considérons l'ensemble des plans orientés de $\mathbb{R}^8$ engendrés par les $(q,q') \in V$:

$$Q = \{\text{Plans orientés annulant } \omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3\}.$$

Q est une sous-variété compact de $Gr_2(\mathbb{R}^8) = \{\text{plans orientés de } \mathbb{R}^8\}$, difféomorphe à $V/SO(2)$, l'action de $SO(2)$ sur V étant donnée par $(q,q') \mapsto (q,q') \cdot R_\theta = (\cos\theta\, q + \sin\theta\, q', -\sin\theta\, q + \cos\theta\, q')$. En effet, comme V est fermé dans $Y = \{(q,q') \text{ orthonormées de } \mathbb{R}^8\}$, le graphe R_V de l'action de $SO(2)$ sur V, $R_V = R_Y \cap (V \times V)$, est fermé, puisque R_Y, le graphe de Y modulo $SO(2)$ est fermé ($Y/SO(2) = Gr_2(\mathbb{R}^8)$ a une structure de variété quotient) donc $V/SO(2)$ admet une structure de variété quotient et munie de cette structure, c'est une sous-variété de $Gr_2(\mathbb{R}^8)$ de dimension 9.

Lorsqu'on identifie V à $S^7 \times S^3$ l'action de $SO(2)$ s'écrit

$$R_\theta \cdot (q,\rho) = (\cos\theta\, q + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \cdot q,\ \rho)\ .$$

G agit sur Q : si on note $[q,q']$ le plan engendré par (q,q') on a $g.[q,q'] = [g.q, g.q']$. Cette action n'est pas transitive. En effet, considérons $P_0 = [1, E^\downarrow]$ alors $G^0.P_0 = \{[\binom{ca}{0}, \binom{0}{cb}], a,b,c \in S^3\} = \{[\binom{x}{0}, \binom{0}{y}], |x| = |y| = 1\}$ est de dimension au plus $6 < 9$. De plus $L_{E^\downarrow}[1, E^\downarrow] = [E^\downarrow, -1] = [1, E^\downarrow]$. Finalement $G.P_0 = G^0.P_0$ est de dimension 6.

2.3.1. Calcul du stabilisateur d'un point. Soit $P_0 = [q_0, q'_0] \in Q$ et $Stab(P_0)$ le stabilisateur de P_0, alors comme G est compact , on sait que $O(P_0) = G.P_0$ est une sous-variété compacte de Q et $G/Stab(P_0) \cong G.P_0$. Ainsi si on avait $\dim(Stab(P_0)) = 0$, alors $O(P_0)$ serait une sous variété de dimension égale à $\dim(G) = \dim(Q)$, donc un ouvert de Q mais aussi un fermé car elle est compact, donc comme Q est connexe (car $V \simeq S^7 \times S^3$ est connexe) on aurait que $O(P_0) = Q$ donc G agirait transitivement or ce n'est pas le cas. Donc $\forall P_0 \in Q$, $\dim(Stab(P_0)) > 0$ et $\dim O(P_0) \leq 8$.

Les orbites sont en fait données par :

Théorème 4. *Q admet la partition suivante :*

$$Q = G.P_1 \sqcup G.P_2 \sqcup U$$

où

- $P_1 = [1, E^\downarrow]$, $P_2 = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right]$,
- $U = \{P = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] \in Q, /(x,x')$ *est libre et* $|\langle x,x'\rangle| + ||x| - |x'|| \neq 0\}$ *est un ouvert de Q.*

De plus on a $G.P_1 = \{P \in Q/(x,x')$ *est liée*$\}$, $G.P_2 = \{P \in Q/\langle x,x'\rangle = 0,\, |x| = |x'|\}$ *et enfin* $\forall P \in U$, *$G.P$ est une sous-variété compacte de* *dimension* 8*. Ainsi, il y a deux orbites dégénérées* $G.P_1$*, et* $G.P_2$*, et toutes les autres orbites sont de dimension* 8*.*

On peut ajouter que $\forall P \in Q$, $G^0.P = G.P$ *et que*

- *si* $P \in G.P_1$*, alors* $Stab(P)_{|P} = \{\pm Id_P\}$*,*
- *si* $P \in GP_2$*, alors* $Stab(P)_{|P} = SO(P)$*,*
- *si* $P \in U$*, alors* $Stab(P)_{|P} = \{\pm Id_P\}$*.*

Démonstration — Dans un premier temps, on se restreint à l'action de G^0. Soit donc $P = [q, q'] \in Q$ et posons $q = (x, y)$, $q' = (x', y') = (-y\bar{\rho},\, x\rho)$. Soit $g \in Stab(P)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$g.(q, q') = (q, q') \cdot R_\theta \quad \text{i.e.,} \quad g_{|P} = R_\theta$$

ce qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} cx\, a = \cos\theta\, x + \sin\theta\, x' \\ cx'a = -\sin\theta\, x + \cos\theta\, x' \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \bar{a}\rho\, b = \rho. \tag{3}$$

Si (x, x') est libre alors cela implique que $\mathrm{Mat}_{(x,x')}(R_a L_{c|[x,x']}) = R_\theta$, ce qui nécessite que ou bien $\langle x, x'\rangle = |x'| - |x| = 0$ ou bien $\theta = 0 \bmod \pi$. Ceci nous amène à différencier trois cas :

1) (x, x') est libre et $(\langle x, x'\rangle \neq 0$ ou $|x'| - |x| \neq 0)$
2) (x, x') est libre et $\langle x, x'\rangle = |x'| - |x| = 0$
3) (x, x') est liée.

Dans chaque cas, on détermine le sous-groupe de $SO(4)$, $\{R_a L_c \in SO(4)$ vérifiant les 2 premières équations de $(3)\}$, ce qui nous donne alors $\dim Stab(P)$ et $Stab(P)_{|P}$. On trouve alors que $\dim Stab(P) = 1, 2, 3$ dans les cas 1,2,3 respectivement. Ceci nous donne $\dim O(P)$ dans chaque cas. Ensuite, dans les cas 2 et 3, respectivement, on détermine facilement un élément $g = Diag(R_a L_c, R_b L_c) \in G^0$ tel que $P = g.P_2$ et $P = g.P_1$ respectivement. Enfin, on vérifie que $L_{E\downarrow} P_1 = P_1$, $L_{E\downarrow} P_2 = P_2$ et que $\forall P \in U$, $L_{E\downarrow} P \in G^0.P$ d'où $G.P = G^0.P$, $\forall P \in Q$. Ceci achève la démonstration. q.e.d.

2.3.2. Caractérisation des orbites. On cherche une fonction $p\colon Q \to \mathbb{R}$ dont les fibres soient les orbites de G^0 (et donc de G). Elle est donnée par le :

Théorème 5. *Soit* $p\colon [q, q'] \in Q \mapsto |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| \in [0, \frac{1}{2}]$*. Alors les orbites de* G *sont les fibres de* p *:*

1) $p^{-1}(0) = G.P_1 = \{P \in Q/(x, x')$ *est liée*$\}$
2) $p^{-1}(\frac{1}{2}) = G.P_2 = \{P \in Q/\langle x, x'\rangle = |x'| - |x| = 0\}$
3) $p^{-1}(]0, \frac{1}{2}[) = U$ *et* $\forall P, P' \in U$, $p(P) = p(P') \iff G.P = G.P'$*.*

Démonstration — D'abord p est bien définie car $\mathrm{Im}(x.\bar{x'})$ ne dépend que du plan $[q, q']$. Ensuite, elle est bien à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$ puisque $|x'|^2 + |x|^2 = 1$. Elle est invariante sous l'action de G^0 : pour $g =$

$Diag(R_aL_c, R_bL_c)$ on a $p([g.q, g.q']) = |c\mathrm{Im}(x.\bar{x'})c^{-1}| = |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| = p([q, q'])$, et sous l'action de $L_{E^\downarrow}$ on a $p(L_{E^\downarrow}[q, q']) = \mathrm{Im}(-y.\overline{(-y')})| = |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})|$.

Montrons réciproquement que toute fibre est incluse dans une orbite. On a $p([q, q']) = 0 \iff x.\bar{x'} = \alpha \in \mathbb{R} \iff |x'|^2 x = \alpha x' \iff (x, x')$ est liée, d'où $p^{-1}(0) = G.P_1$. Pour la suite on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Pour tout $P \in Q$, il existe un représentant $(q, q') \in Q$ tel que $\langle x, x' \rangle = 0$.*

Démonstration du lemme — On suppose que $\langle x, x' \rangle \neq 0$ alors on a

$$\begin{aligned}\langle \cos\theta\, x + \sin\theta\, x', -\sin\theta\, x + \cos\theta\, x' \rangle &= \cos(2\theta)\langle x, x' \rangle \\ &\quad + \frac{|x'|^2 - |x|^2}{2}\sin(2\theta) \\ &= A\cos(2\theta + \phi)\end{aligned}$$

et cette dernière fonction de θ s'annule pour certaines valeurs de θ, ce qui veut dire qu'il existe un représentant de P tel que $\langle x, x' \rangle = 0$.

Démonstration du théorème — Dorénavant, on suppose que $\langle x, x' \rangle = 0$ et donc $\mathrm{Im}(x.\bar{x'}) = x.\bar{x'}$. Ainsi si $|x.\bar{x'}| = \frac{1}{2}$, alors $|x||x'| = \frac{1}{2}$ et comme $|x|^2 + |x'|^2 = 1$ on a donc $|x| = |x'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi comme $\langle x, x' \rangle = 0$, on a $P \in G.P_2$. On a bien $p^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = G.P_2$.

Soit $P, P' \in U$ tel que $p(P) = p(P')$ avec $P = [q, q']$, $P' = [q_1, q_1']$. Alors $p(P) = p(P') \iff \exists \mu \in SO(3)$ tel que $\mathrm{Im}(x_1.\bar{x_1'}) = \mu(\mathrm{Im}(x.\bar{x'})) = c\mathrm{Im}(x.\bar{x'})c^{-1}$, alors quitte à remplacer (q, q') par $(g.q, g.q')$, avec $g = Diag(L_c, L_c)$, on est ramené au cas où

$$\mathrm{Im}(x_1.\bar{x_1'}) = \mathrm{Im}(x.\bar{x'})$$

et en prenant des représentants convenables, ceci s'écrit encore

$$x_1'.\bar{x_1'} = x.\bar{x'}$$

i.e.,

$$x_1\rho_1\,\bar{y_1} = x\rho\,\bar{y} \tag{4}$$

d'où

$$\begin{cases} |x||y| = |x_1||y_1| \\ |x|^2 + |y|^2 = |x_1|^2 + |y_1|^2 \end{cases} \implies \begin{cases} |x| = |x_1| \\ |y| = |y_1| \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} |x| = |y_1| \\ |y| = |x_1| \end{cases}.$$

On peut se ramener à la première des 2 possibilitées quitte à remplacer (q, q') par $(-q', q)$, on peut alors poser $\begin{cases} x_1 = x.a \\ y_1 = y.b \end{cases}$, avec $a, b \in S^3$, et en revenant à (4), on obtient $\bar{a}\rho\, b = \rho_1$, donc $g.(q, q') = (q_1, q_1')$ avec $g = Diag(R_a, R_b)$ et finalement

$$G.P = G.P'.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. q.e.d.

Théorème 6. *Soit* $V_1 = \mathbb{R}_+^*.\pi_{SO(2)}^{-1}(U) = \{(q,q') \in \mathbb{O}^* \times \mathbb{O}^*/|q| = |q'|,\ B(q,q') = 0$ *et* $0 < |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| < \frac{1}{2}|q|^2\}$. *Alors considérons l'action de* $(\mathbb{R}_+^*)^2$ *sur* V_1 *définie par :*

$$(\alpha,\beta)\cdot(q,q') = \left(\begin{pmatrix}\alpha x\\ \beta y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta x'\\ \alpha y'\end{pmatrix}\right)$$

Alors l'action de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ *commute avec celle de* G^0. *Soit* $(q_0,q_0') \in V_1$ *tel que* $\langle x_0, x_0'\rangle = 0$ *alors*

$$\forall (q,q') \in V_1,\ \exists (g,(\alpha,\beta)) \in G^0 \times (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que}$$
$$(g\cdot(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0'))\cdot R_\theta = (q,q').$$

Il y a exactement deux possibilitées pour $(\alpha,\ \beta)$, *l'une tel que* $\alpha < |q|/(\sqrt{2}|x_0|)$, *l'autre tel que* $\alpha > |q|/(\sqrt{2}|x_0|)$. R_θ *peut être changé en* $-R_\theta$ *(et donc* g *en* $-g$*),* g *peut varier dans* $g.Stab([q_0,q_0'])$.

Démonstration — Posons $(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0') = \frac{1}{|q_0|}(q_0,q_0')$ et $(\tilde{q},\tilde{q}') = \frac{1}{|q|}(q,q')$. Alors on a $p((\alpha',\beta')\cdot(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0')) = \alpha'\beta' p(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0')$. On choisit α',β' tel que $\alpha'^2|\tilde{x}_0|^2+\beta'^2|\tilde{y}_0|^2 = 1$ et $\alpha'\beta' p([\tilde{q}_0,\tilde{q}_0']) = p([\tilde{q},\tilde{q}'])$, on montre que ceci est possible et qu'il y a exactement deux solutions par l'étude de la fonction $\alpha' \mapsto \frac{\alpha'(1-\alpha'^2|\tilde{x}_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-|\tilde{x}_0|^2)^{\frac{1}{2}}}$ dont la valeur maximale est $\frac{1}{2|\tilde{x}_0||\tilde{y}_0|} = \frac{1}{2p(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0')}$.

Ensuite, on pose $(\alpha,\beta) = (\alpha'\frac{|q|}{|q_0|},\ \beta'\frac{|q|}{|q_0|})$. Alors $(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0')$ est de norme $|q|$ et $[\frac{1}{|q|}(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0')]$ est dans l'orbite de $[\tilde{q},\tilde{q}']$ donc il existe $g \in G^0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(g\cdot(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0'))\cdot R_\theta = (q,q')$. q.e.d.

Remarque 2. L'action de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ permet de passer d'une orbite à l'autre tandis que G^0 agit transitivement sur chaque orbite. Cependant, l'action de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ n'est pas compatible avec celle de $SO(2)$: elle n'envoie pas un plan sur un autre plan. Comme on le voit sur la démonstration, le théorème est valable pour les éléments de $G.P_2$, i.e., on aurait pu prendre $\mathbb{R}_+^*.\pi_{SO(2)}^{-1}(Q \setminus G.P_1) = \{(q,q') \in \mathbb{O}^* \times \mathbb{O}^*/|q| = |q'|,\ B(q,q') = 0$ *et* $\mathrm{Im}(x.\bar{x'}) \neq 0\}$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*.\pi_{SO(2)}^{-1}(U)$. Dans le cas où $[q,q'] \in G.P_2$, (α,β) est unique et donné par $(\alpha,\beta) = (|q|/(\sqrt{2}|x_0|),\ |q|/(\sqrt{2}|y_0|))$. En ce qui concerne le point de référence (q_0,q_0'), on ne peut pas le prendre quelconque ; comme on le voit sur la démonstration on a besoin de $|\tilde{x}_0||\tilde{y}_0| = p(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0')$, i.e., $\langle x_0,x_0'\rangle = 0$. On peut prendre par exemple

$$(q_0,q_0') = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)$$

et alors $\rho(q_0,q_0') = 1$. On a alors $\alpha^2+\beta^2 = 2|q|^2$ et les deux possibilitées pour (α,β) dans le cas de U sont $\alpha < |q|$ et $\alpha > |q|$ tandis que pour $G.P_2$ on a $\alpha = \beta = |q|$. On voit aussi que le théorème est encore valable pour

$(q, q') \in G.P_1$ et on alors $\alpha\beta = 0$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 2|q|^2$, mais évidemment on ne peut pas prendre $(q_0, q_0') \in G.P_1$.

Remarque 3. L'angle θ a une définition intrinsèque. En effet, soit $P \in U$, alors il existe un couple $(q_1, q_1') \in P$ unique à ± 1 près tel que $\langle x_1, x_1' \rangle = 0$, alors θ est l'angle défini modulo π tel que $(q, q') = (q_1, q_1') \cdot R_\theta$ pour $[q, q'] = P$. On a donc défini une fonction

$$(q, q') \in V_1 \mapsto \theta(q, q') \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

Ainsi dans chaque plan $P \in U$, il existe un axe privilégié. Cette axe permet de mesurer des angles de droites dans P.

2.4. Décomposition de G et de son algèbre de Lie. On a défini l'application ρ par analogie avec le déterminant sur les bases hermitiennes de $\mathbb{C}^2$. On voudrait définir l'analogue du déterminant sur le groupe $U(2)$, i.e., une fonction définie sur G à valeurs dans S^3 qui corresponde d'une certaine manière à ρ.

Soit $(q_0, q_0') \in V$ tel que $\rho(q_0, q_0') = 1$. Considérons $\rho(g.q_0, g.q_0')$ pour $g \in G^0$, on a

$$\rho(g.q_0, g.q_0') = \bar{a}.1.b = \bar{a}.b.$$

On se demande à quelle condition a-t-on $\rho(g.q_0, g.q_0') = \rho(g'.q_0, g'.q_0')$. C'est le cas si, et seulement si, $a^{-1}.b = a'^{-1}b' \iff a'a^{-1} = b'b^{-1} \iff \exists d \in S^3 / \begin{cases} b' = db \\ a' = da \end{cases}$ i.e., $g^{-1}g' = \begin{pmatrix} R_d L_c & 0 \\ 0 & R_d L_c \end{pmatrix}$. Donc si $g_0 \in G^0$ est tel que $\rho(g_0.q_0, g_0.q_0') = \rho_0$ alors $\rho(g.q_0, g.q_0') = \rho_0$ si, et seulement si, $g = g_0.\begin{pmatrix} R_d L_c & 0 \\ 0 & R_d L_c \end{pmatrix}$. Pour g_0, on peut prendre par exemple $g_0 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_{\rho_0} \end{pmatrix}$. On a en fait le théorème suivant :

Théorème 7. *Soit*

$$G_0^0 = \left\{ \begin{pmatrix} R_a L_c & 0 \\ 0 & R_a L_c \end{pmatrix}, \, a, c \in S^3 \right\}, \; G_2^0 = \left\{ \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_\rho \end{pmatrix}, \, \rho \in S^3 \right\}.$$

Alors :

(i) *G_2^0 est un sous-groupe distingué dans G^0 : $G_2^0 \lhd G^0$.*
(ii) *G^0 est le produit semi-direct de G_2^0 et G_0^0 : $G^0 = G_2^0 \rtimes G_0^0$.*
(iii) *Ceci permet de définir une application $\tilde{\rho}\colon G^0 \to S^3$ définie par*

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_\rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_a L_c & 0 \\ 0 & R_a L_c \end{pmatrix} \mapsto \rho.$$

En outre si $(q_0, q_0') \in V$ est tel que $\rho(q_0, q_0') = 1$ alors $\tilde{\rho}$ est aussi donnée par $\tilde{\rho}\colon g \in G^0 \mapsto \rho(g.q_0, g.q_0')$. De plus $\tilde{\rho}$ est invariante par multiplication à droite par G_0^0 : $\tilde{\rho}(g.h) = \tilde{\rho}(g)$ $\forall g \in G^0$, $\forall h \in G_0^0$.

(iv) *$\rho(g^{-1} \cdot q, \, g^{-1} \cdot q') = 1 \iff \tilde{\rho}(g) = \rho(q, \, q')$, pour $g \in G^0$, $(q, q') \in V$.*

Démonstration — Pour (i),(ii) et (iii), c'est un simple calcul. Pour (iv) il suffit d'utiliser $\rho(g.q, g.q') = \bar{a}\rho(q, q')b$. q.e.d.

Remarque 4. On voit que les L_c ne jouent aucun rôle dans le théorème précédent. Il résulte en particulier de ce dernier que l'on a :

$$S^3 = G^0/G_0^0 = S^3 \times S^3/\triangle$$

où $\triangle$ est la diagonale.

Soit $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_2$ les algèbres de Lie respectives de G^0, G_0^0 et G_2^0. Alors on $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_2$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ (on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_2$) et est stable sous l'action adjointe de G^0. On a

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} R_\alpha + L_\delta & 0 \\ 0 & R_\beta + L_\delta \end{pmatrix}, \alpha,\, \beta,\, \delta \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \right\},$$
$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} R_\alpha + L_\delta & 0 \\ 0 & R_\alpha + L_\delta \end{pmatrix}, \alpha,\, \delta \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \right\},$$
$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \right\}.$$

Considérons le groupe $\mathcal{G}$, composante neutre du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^8$ conservant la nullité de B, que l'on représente comme $G^0 \ltimes \mathbb{R}^8$ muni du produit

$$(G, T) \cdot (G', T') = (GG', GT' + T).$$

Alors l'algèbre de lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{G}$ s'écrit $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}^8 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{R}^8$, le crochet étant donné par

$$[(\eta, t), (\eta', t')] = ([\eta, \eta'], \eta t' - \eta' t)$$

On a alors les relations suivantes : $[\mathfrak{g}, \mathbb{R}^8] = \mathbb{R}^8$, $[\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^8] = 0$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_2$, $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_2$.

3. Surfaces Σ_V

3.1. Immersions conformes Σ_V.

Définition 2. On dira qu'une surface immergée, Σ, de $\mathbb{O}$ est **une surface** Σ_V si $\forall z \in \Sigma,\ T_z\Sigma \in Q$. En outre à Σ est associée la fonction ρ_Σ à valeurs dans S^3 définie par

$$\rho_\Sigma(z) = \rho(T_z\Sigma).$$

En particulier, soit $X\colon \Omega \to \mathbb{O}$ une immersion conforme d'un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{O}$, alors on dira que c'est une immersion conforme Σ_V si

$$\forall z = (u, v) \in \Omega, \quad dX = e^f(q\, du + q' dv)$$

avec $(q, q') \in V$, i.e., $|q| = |q'| = 1$ et $B(q, q') = 0$. En outre on dira que $z \in \Sigma$ est **un point régulier** de Σ si $T_z\Sigma \in U$ (i.e., $0 < |\operatorname{Im}(x.\bar{x'})| < \frac{1}{2}$

avec $q = (x, y)$, $q' = (x', y')$, pour une immersion conforme Σ_V). Dans le cas contraire, on dira que Σ admet **un point singulier** en z. On dira alors que c'est **un point singulier de type** P_1 si $T_z\Sigma \in G.P_1$, et de **type** P_2 si $T_z\Sigma \in G.P_2$ (i.e., $|\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| = 0$ et $|\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| = \frac{1}{2}$ respectivement).

Définition 3. On appellera relèvement Σ_V une application $U = (F, X)\colon \Omega \to \mathcal{G}$ telle que X soit une immersion conforme Σ_V et que $\tilde{\rho} \circ F = \rho_X$.

Le groupe de gauge $C^\infty(\Omega, G_0^0)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ des relèvements Σ_V : $(F, X) \cdot (K, 0) = (FK, X)$. L'orbite de (F, X) est l'ensemble des relèvements correspondants au même X. Dans chaque orbite, on peut prendre par exemple

$$F = \mathcal{R}_{\rho_X} := \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_{\rho_X} \end{pmatrix}$$

alors tout relèvement de X est de la forme $(\mathcal{R}_{\rho_X} M, X)$ avec $M \in C^\infty(\Omega, G_0^0)$.

3.1.1. Forme de Maurer-Cartan. Soit $U = (F, X) = (\mathcal{R}_\rho M, X)$ un relèvement Σ_V alors sa forme de Maurer-Cartan est donnée par $U^{-1}.dU = (F^{-1}.dF, F^{-1}.dX)$ avec

- $F^{-1}.dF = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{d\rho.\rho^{-1}} \end{pmatrix} M + M^{-1}.dM$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{a(d\rho.\rho^{-1})a^{-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{da.a^{-1}} + L_{c^{-1}dc} & 0 \\ 0 & R_{da.a^{-1}} + L_{c^{-1}dc} \end{pmatrix} \tag{5}$$

en posant $M = Diag(R_a L_c, R_a L_c)$ ((a, c) n'est défini qu'à ± 1 près mais Ω est simplement connexe),

- $F^{-1}.dX = e^f(E_1 du + E_2 dv)$ avec $\rho(E_1, E_2) = 1$ (d'après $\tilde{\rho} \circ F = \rho_X$ et le théorème 7-(iv)). Ainsi $E_2 = \binom{0}{1}.E_1 = E^{\downarrow}.E_1$ d'où

$$F^{-1}.dX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} dv \quad \text{avec} \quad |x|^2 + |y|^2 = e^{2f}.$$

Reciproquement, si $F^{-1}.dX$ est de cette forme, alors X est une immersion conforme Σ_V et d'après le théorème 7-(iv), $U = (F, X)$ est un relèvement Σ_V, i.e., $\rho_X = \tilde{\rho} \circ F$. D'où le théorème suivant et son corollaire :

Théorème 8. *Soit $U = (F, X)\colon \Omega \to \mathcal{G}$, alors $U \in \mathcal{G}(\Sigma_V)$ (i.e., X est une immersion conforme Σ_V et $\rho_X = \tilde{\rho} \circ F$) si, et seulement si,*

$$F^{-1}.dX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} dv \quad \textit{avec} \quad (x, y) \neq 0.$$

En outre z_0 est un point régulier si, et seulement si, $0 < |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| < \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$, un point singulier de type P_1 ou P_2 si, et seulement si, $|\mathrm{Im}(x.y)| = 0$ ou $|\mathrm{Im}(x.y)| = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$ respectivement.

Corollaire 1. *Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$, alors α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément $U \in \mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, :*

(i) $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$

(ii) *si on pose $\alpha = (\eta, t)$ alors $t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} dv$ avec $(x, y) \neq 0$.*

Dans ce cas, suivant les valeurs de $|\mathrm{Im}(x.y)|$, on peut connaitre le type du point $z \in \Omega$ pour l'immersion X.

Posons

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \, (x, y) \in \mathbb{O} \right\} \subset \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$$

$$\mathfrak{g}_{1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \, (x, y) \in \mathbb{O} \right\} \subset \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}.$$

Ce sont des sous-espaces complexes de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$: ce sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement pour l'endomorphisme de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} : L_{E\downarrow}$. En particulier $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1} = \overline{\mathfrak{g}_1}$.

Le point (ii) du corollaire 1 est alors équivalent à : $t(\frac{\partial}{\partial z}) \in \mathfrak{g}_{-1}$, $t(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \in \mathfrak{g}_1$.

Les actions respectives de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $SO(2)$ stabilisent l'ensemble des couples $(\binom{x}{y}, \binom{-y}{x})$:

$$(\alpha, \beta) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta y \\ \alpha x \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right) \cdot R_\theta = \left(R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R_\theta \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, on peut faire agir ces deux groupes sur $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$ respectivement et donc sur $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$. En particulier, on a

$$R_\theta \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right) = e^{i\theta} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right)$$

$$R_\theta \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right) = e^{-i\theta} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right).$$

Posons

$$\mathfrak{g}_{-1}^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} / 0 < |\mathrm{Im}(x.y)| < \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{1}^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} / 0 < |\mathrm{Im}(x.y)| < \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) \right\}.$$

Ce sont des ouverts, stables par homothétie complexe, de $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$ respectivement. Posons aussi $F_1 = \{q - iL_{E\downarrow} q / \mathrm{Im}(x.y) = 0\}$ et $F_2 = \{q - iL_{E\downarrow} q / |\mathrm{Im}(x.y)| = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)\}$.

Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$, $\alpha = (\eta, t)$, tel que $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$ et écrivons $t = \alpha_{-1} + \alpha_1$ la décomposition de t suivant $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$. Alors on a $\alpha_1 = \overline{\alpha_{-1}}$

car t est réelle. Alors α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément de $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $\alpha_{-1} = \alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})dz$ (et donc $\alpha_1 = \alpha_1(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z}$). Ceci permet de réécrire le corollaire sous la forme :

Théorème 9. *Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$, tel que $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$. Alors α correspond à un élément $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0$ et $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})$ ne s'annule pas . Dans ce cas X a un point régulier en z_0 si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})(z_0) \in \mathfrak{g}_{-1}^*$, un point singulier de type P_1 ou P_2 si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})(z_0) \in F_1$ ou F_2 respectivement.*

Remarque 5.

1) L'action du groupe de gauge $C^\infty(\Omega, G_0^0)$ sur $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ induit une action sur les formes de Maurer-Cartan :
$$(\eta, t) \mapsto (K\eta K^{-1} - dK.K^{-1},\ K.t)$$
2) $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{C}$ est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel (à gauche ou à droite au choix). Il en est de même de $\mathfrak{g}_{-1}$ et de $\mathfrak{g}_1$:
$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-1} &= \{x.\epsilon + y.(L_{E^\downarrow}.\epsilon),\ (x,y) \in \mathbb{H}^2\} = \mathbb{H}.\epsilon \oplus \mathbb{H}.(L_{E^\downarrow}.\epsilon) \\ \mathfrak{g}_1 &= \{x.\bar{\epsilon} + y.(L_{E^\downarrow}.\bar{\epsilon}),\ (x,y) \in \mathbb{H}^2\} = \mathbb{H}.\bar{\epsilon} \oplus \mathbb{H}.(L_{E^\downarrow}.\bar{\epsilon}) \end{aligned}$$
où $\epsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.
3) On a aussi $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^2$. Ainsi
$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-1} &= \{(x+iy).\epsilon\,/(x+iy) \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}\} = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}).\epsilon \\ \mathfrak{g}_1 &= \{(x+iy).\bar{\epsilon}\,/(x+iy) \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}\} = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}).\bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

3.2. Décomposition de l'algèbre de Lie. Considérons l'automorphisme intérieur τ de G défini par $(-L_{E^\downarrow}, 0)$:
$$\tau(G,T) = (-L_{E^\downarrow}, 0)(G,T)(-L_{E^\downarrow}, 0)^{-1} = (-L_{E^\downarrow} G L_{E^\downarrow}, -L_{E^\downarrow} T)$$
τ induit un automorphisme de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ $(= Ad_{(-L_{E^\downarrow},0)})$ qui vérifie $\tau^4 = Id$, donc τ est diagonalisable dans $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont les i^k, $0 \leq k \leq 3$. On notera $\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}$ les espaces propres. On a alors :

- $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{-1}$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_2^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}$, où $\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \{Diag(-R_\gamma, R_\gamma),\ \gamma \in \operatorname{Im}\mathbb{H}\}$ n'est pas une algèbre de Lie.

Comme τ est un automorphisme on a $[\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}, \tilde{\mathfrak{g}}_l^{\mathbb{C}}] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{(k+l) \bmod 4}^{\mathbb{C}}$ et de plus on a aussi $[\tilde{\mathfrak{g}}_{\pm 1}^{\mathbb{C}}, \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm 1}^{\mathbb{C}}] = 0$.
On notera $[.]_k\colon \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}$ la projection sur $\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}$ suivant la décomposition $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}^{\mathbb{C}} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0^{\mathbb{C}} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1^{\mathbb{C}} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2^{\mathbb{C}}$, et $\alpha_k = [\alpha]_k$. Alors on a
$$\alpha = \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

En substituant cette expression de α dans l'équation $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$ on obtient en projetant le résultat sur chaque espace propre :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} d\alpha_{-1} + [\alpha_{-1} \wedge \alpha_0] + [\alpha_1 \wedge \alpha_2] & = & 0 \\ d\alpha_0 + \frac{1}{2}[\alpha_0 \wedge \alpha_0] + \frac{1}{2}[\alpha_2 \wedge \alpha_2] & = & 0 \\ d\alpha_1 + [\alpha_1 \wedge \alpha_0] + [\alpha_{-1} \wedge \alpha_2] & = & 0 \\ d\alpha_2 + [\alpha_0 \wedge \alpha_2] & = & 0 \end{array} \right.$$

Posons $\alpha_k' = \alpha_k(\frac{\partial}{\partial z})dz$, $\alpha_k'' = \alpha(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z}$. On a vu que α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément de $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $\alpha_{-1} = \alpha_{-1}'$ et $\alpha_1 = \alpha_1''$. Ainsi $\alpha = \alpha_2' + \alpha_{-1}' + \alpha_0 + \alpha_1'' + \alpha_2''$. Les équations (6) s'écrivent alors :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} d\alpha_{-1}' + [\alpha_{-1}' \wedge \alpha_0] + [\alpha_1'' \wedge \alpha_2'] & = & 0 \\ d\alpha_0 + \frac{1}{2}[\alpha_0 \wedge \alpha_0] + \frac{1}{2}[\alpha_2' \wedge \alpha_2''] & = & 0 \\ d\alpha_1'' + [\alpha_1'' \wedge \alpha_0] + [\alpha_{-1}' \wedge \alpha_2''] & = & 0 \\ d\alpha_2 + [\alpha_0 \wedge \alpha_2] & = & 0 \end{array} \right.$$

Posons pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_\lambda & = & \lambda^{-2}\alpha_2' + \lambda^{-1}\alpha_{-1}' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1'' + \lambda^2\alpha_2'' \\ & = & \lambda^{-1}\alpha_{-1}' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1'' + \dfrac{\lambda^2 + \lambda^{-2}}{2}\,\alpha_2 + \dfrac{\lambda^2 - \lambda^{-2}}{2i}(*\alpha_2). \end{array}$$

Alors on a

$$\begin{array}{rcl} d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda & = & \lambda^{-1}(d\alpha_{-1}' + [\alpha_{-1}' \wedge \alpha_0] + [\alpha_1'' \wedge \alpha_2']) \\ & & +(d\alpha_0 + \dfrac{1}{2}[\alpha_0 \wedge \alpha_0] + \dfrac{1}{2}[\alpha_2' \wedge \alpha_2'']) \\ & & +\lambda(d\alpha_1'' + [\alpha_1'' \wedge \alpha_0] + [\alpha_{-1}' \wedge \alpha_2'']) \\ & & +\dfrac{\lambda^2 + \lambda^{-2}}{2}(d\alpha_2 + [\alpha_0 \wedge \alpha_2]) \\ & & +\dfrac{\lambda^2 - \lambda^{-2}}{2i}(d(*\alpha_2) + [\alpha_0 \wedge (*\alpha_2)]) \\ & = & \dfrac{\lambda^2 - \lambda^{-2}}{2i}(d(*\alpha_2) + [\alpha_0 \wedge (*\alpha_2)]). \end{array}$$

On peut maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 10. *On suppose Ω simplement connexe. Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$. Alors*

- *α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément de $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$, $\alpha_{-1}'' = \alpha_1' = 0$ et α_{-1}', α_1'' ne s'annule pas.*
- *Dans ce cas, α correspond à une immersion conforme Σ_V telle que ρ_X est harmonique si, et seulement si, la forme de Maurer-Cartan prolongée $\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha_2' + \lambda^{-1}\alpha_{-1}' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1'' + \lambda^2\alpha_2''$ vérifie*

$$(8) \qquad d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Démonstration — On a déjà vu le premier point. Quand au second, il s'agit d'après le calcul précédent de montrer que : ρ_X est harmonique si, et seulement si, $d(*\alpha_2) + [\alpha_0 \wedge (*\alpha_2)] = 0$. Or on a

$$\alpha_0 + \alpha_2 = F^{-1}.dF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{a(d\rho.\rho^{-1})a^{-1}} \end{pmatrix} + M^{-1}.dM$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -R_{a(d\rho.\rho^{-1}).a^{-1}} & 0 \\ 0 & R_{a(d\rho.\rho^{-1}).a^{-1}} \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} -R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix} M$$

avec $\gamma = d\rho.\rho^{-1}$, et

$$\alpha_0 = M^{-1}dM + M^{-1}.\begin{pmatrix} R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix} M$$

Posons $\beta = \begin{pmatrix} -R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix}$. Alors ρ est harmonique si, et seulement si, $d(*\gamma) = (\triangle\rho + |d\rho|^2\rho)\rho^{-1}du \wedge dv = 0$ si, et seulement si, $d(*\beta) = 0$. Or

$$d(*\beta) = d(M(*\alpha_2)M^{-1}) = M(\, d(*\alpha_2) + [(M^{-1}.dM) \wedge (*\alpha_2)]\,)M^{-1}.$$

De plus on a $[(M^{-1}.dM) \wedge (*\alpha_2)] = [\alpha_0 \wedge (*\alpha_2)]$ puisque

$$\begin{aligned} &\left[\left(M^{-1}\begin{pmatrix} R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix} M\right) \wedge (*\alpha_2)\right] \\ &= \frac{1}{4}M^{-1}\begin{pmatrix} -R_{[\gamma\wedge(*\gamma)]} & 0 \\ 0 & R_{[\gamma\wedge(*\gamma)]} \end{pmatrix} M = 0 \end{aligned}$$

car $[\gamma \wedge (*\gamma)] = 0$. Finalement on a

$$d(*\beta) = M(\, d(*\alpha_2) + [\alpha_0 \wedge (*\alpha_2)]\,)M^{-1}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. q.e.d.

Remarque 6. Chaque point de la surface sera régulier, respectivement singulier de type P_1, ou P_2 si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z}) \in \mathfrak{g}^*_{-1}$, F_1 ou F_2 respectivement. En outre il suffit que (8) soit vrai pour tout $\lambda \in S^1$ pour que ρ_X soit harmonique.

Corollaire 2. *Supposons que Ω soit simplement connexe. Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$ la forme de Maurer-Cartan associée à une immersion conforme Σ_V dont le ρ_X est harmonique, et $z_0 \in \Omega$. Alors pour tout $\lambda \in S^1$, il existe un unique relèvement Σ_V, $U_\lambda \in C^\infty(\Omega, \mathcal{G})$ tel que*

$$dU_\lambda = U_\lambda \alpha_\lambda \quad \textit{et} \quad U_\lambda(z_0) = \mathbf{1}.$$

Ainsi il existe un famille $(X_\lambda)_{\lambda \in S^1}$ d'immersions Σ_V dont le ρ_X est harmonique donnée par $U_\lambda = (F_\lambda, X_\lambda)$, tel que $X = X_1$ (en supposant que $X(z_0) = 0$). En outre si X admet un point régulier (resp. singulier de type P_1 ou P_2) en $z \in \Omega$, il en est de même pour X_λ pour tout

$\lambda \in S^1$. *Autrement dit le type d'un point $z \in \Omega$ est le même pour toutes les immersions X_λ.*

Démonstration — Il suffit d'appliquer le théorème précédent et de remarquer que pour $\lambda \in S^1$, α_λ est à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, et qu'on a $(\alpha_\lambda)'_{-1} = \lambda^{-1}\alpha'_{-1}$. q.e.d.

3.3. Equations associées (linéaire et non linéaire). Soit X une immersion Σ_V sur Ω simplement connexe. Posons $(E_1, E_2) = e^f \mathcal{R}_\rho^{-1}(q, q')$. Alors $E_2 = E^\downarrow . E_1$ i.e., en posant $E_1 = \binom{x}{y} \neq 0$ on a $E_2 = \binom{-y}{x}$. Alors écrivons que $dX = \mathcal{R}_\rho(E_1 du + E_2 dv)$ est fermée, on obtient

$$0 = \frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{\partial E_2}{\partial u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v} \end{pmatrix} E_1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u} \end{pmatrix} E_2 \tag{9}$$

où $\gamma = \gamma_u du + \gamma_v dv = d\rho.\rho^{-1}$, ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v} + y.\gamma_v - x.\gamma_u = 0 \end{cases} . \tag{10}$$

On va essayer de retrouver cette équation en utilisant le relèvement $U = (\mathcal{R}_\rho, X)$. Alors on a

$$\alpha = U^{-1}.dU = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\gamma \end{pmatrix}, E_1 du + E_2 dv \right).$$

Posons $E = \frac{1}{2}(E_1 - iE_2) = \frac{1}{2}(\binom{x}{y} - i\binom{-y}{x}) = x.\epsilon + y.(L_{E^\downarrow}.\epsilon) = (x+iy).\epsilon$. On a alors :

$$\alpha'_{-1} = Edz, \qquad \alpha''_1 = \bar{E}.d\bar{z},$$
$$\alpha_0 = Diag\left(\frac{1}{2}R_\gamma, \frac{1}{2}R_\gamma\right), \quad \alpha_2 = Diag\left(-\frac{1}{2}R_\gamma, \frac{1}{2}R_\gamma\right).$$

Projetons l'équation $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})} & 0 \\ 0 & R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})} \end{pmatrix} .E + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} & 0 \\ 0 & -R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} \end{pmatrix} .\bar{E} = 0. \tag{11}$$

On vérifie facilement que cette équation est équivalente à (9). Nous allons maintenant utiliser le théorème 6 pour réécrire cette équation.

Soit $g : \Omega \to G$, $\alpha, \beta : \Omega \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$(E_1, E_2) = (g \cdot (\alpha, \beta) \cdot (q_0, q'_0)) \cdot R_\theta$$

où $(q_0, q'_0) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{I}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-I}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$ par exemple, et où on écrit $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K$ pour ne pas confondre le i des complexes provenant de la complexification avec celui de $\mathbb{H}$. Comme $\rho(q_0, q'_0) = \rho(E_1, E_2) = 1$, on a $\tilde{\rho}(g) = 1$ i.e., $g = Diag(R_a L_c, R_a L_c)$. On peut aussi écrire que $E = \frac{1}{2}(E_1 - iE_2) = e^{i\theta} g.((\alpha x_0 + i\beta y_0).\epsilon)$ alors (11) s'écrit

$$\begin{aligned}
&e^{i\theta}\left[i\frac{\partial\theta}{\partial\bar{z}}\, g\cdot((\alpha x_0 + i\beta y_0)\cdot\epsilon) + \frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\cdot((\alpha x_0 + i\beta y_0)\cdot\epsilon)\right.\\
&\qquad\left. + g\cdot\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}x_0 + i\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}}y_0\right)\cdot\epsilon\right)\right]\\
&\quad + \frac{1}{2}e^{i\theta}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})} & 0\\ 0 & R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})}\end{pmatrix}\cdot g\cdot((\alpha x_0 + i\beta y_0)\cdot\epsilon)\\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} & 0\\ 0 & -R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})}\end{pmatrix}\cdot g\cdot((\alpha x_0 - i\beta y_0)\cdot\bar{\epsilon}) = 0
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, tout calcul fait et en factorisant par $e^{i\theta}.g$:

$$\begin{aligned}
(12)\qquad &i\frac{\partial\theta}{\partial\bar{z}}A + \delta(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})A + A\,\tilde{\alpha}(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}) + \frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\\
&\quad + \frac{1}{2}A\left(a\gamma(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})a^{-1}\right) + \frac{e^{-2i\theta}}{2}\bar{A}\left(a\gamma(\frac{\partial}{\partial z})a^{-1}\right) = 0
\end{aligned}$$

où on a posé $A = \alpha x_0 + i\beta y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + iI\beta)$, $\tilde{\alpha} = da.a^{-1}$, $\delta = c^{-1}.dc$. Les inconnues $\tilde{\alpha}$, δ et $\gamma' = a\gamma a^{-1}$ sont les paramètres qui interviennent dans la forme de Maurer-Cartan, $F^{-1}.dF$, du relèvement F de ρ_X, donnée par (5). Ainsi, on peut considérer que l'on construit ρ_X à partir de la représentation de Weierstrass pour l'espace symétrique $S^3 = G^0/G^0_0$ (cf. [**3**]), alors cela nous donne la forme de Maurer-Cartan, $F^{-1}.dF$, et on peut donc considérer $\tilde{\alpha}$, δ et γ' comme des paramètres, les inconnues étant alors θ et A. Cependant, il y a alors un problème de compatibilité puisque $A \in (\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}I)\otimes\mathbb{C}$.

4. Groupe de lacets

4.1. Définitions et notations.

Définition 4. Soit G un groupe de Lie, on appellera groupe de lacets sur G, le groupe $C^\infty(S^1, G)$ que l'on notera ΛG (cf. [**12**]).

Dans notre cas, les groupes considérés sont $\mathcal{G}$, G^0, G^0_0, G^0_2. On définit les groupes suivants :

$$\begin{aligned}
\Lambda\mathcal{G}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}/U_{i\lambda} = \tau(U_\lambda)\}\\
\Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/U_{i\lambda} = \tau(U_\lambda)\}\\
\Lambda^-_*\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau/U_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe}\\
&\qquad \text{sur le complémentaire du disque unité et } U_\infty = 1\}\\
\Lambda^+\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau/U_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe}\\
&\qquad \text{sur le disque unité }\}\\
\Lambda^+_{\mathcal{B}}\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau/U_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe}\\
&\qquad \text{sur le disque unité et } U_0 \in (\mathcal{B}, 0)\}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}$ est un sous-groupe de G^0. De manière analogue, on définit les algèbres de Lie suivantes :

$$\begin{aligned}
\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}/\alpha_{i\lambda} = \tau(\alpha_\lambda)\}\\
\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}},\ \forall\lambda \in S^1\}\\
\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe}\\
&\qquad \text{sur le complémentaire du disque unité et } \alpha_\infty = 0\}\\
\Lambda^+\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe}\\
&\qquad \text{sur le disque unité }\}\\
\Lambda^+_{\mathfrak{b}}\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe}\\
&\qquad \text{sur le disque unité et } \alpha_0 \in (\mathfrak{b}, 0)\}.
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_0$.
On voit que la condition $\alpha_{i\lambda} = \tau(\alpha_\lambda),\ \forall\lambda \in S^1$ est équivalente à $\hat{\alpha}_k \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_{k \bmod 4}$ avec $\alpha_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\alpha}_k \lambda^k$. En outre, on a $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau = \Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau \oplus \Lambda^+\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau$, ce qui permet de définir une projection :$[.]_{\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau} : \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau \to \Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau$. On peut alors réécrire le résultat de la section précédente :

Corollaire 3. *Soit α une 1-forme sur Ω à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui donne lieu à une immersion Σ_V dont le ρ_X est harmonique. Il lui correspond alors une 1-forme à valeurs dans $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau$, α_λ , qui vérifie l'équation de courbure nulle (8), et telle que*

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]_{\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau} &= \lambda^{-2}\hat{\alpha}_{-2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + \lambda^{-1}\hat{\alpha}_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
\left[\alpha_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right]_{\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau} &= 0
\end{aligned}$$

et

$$\hat{\alpha}_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \neq 0.$$

Réciproquement, à toute 1-forme $\alpha_\lambda \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau$ vérifiant ces conditions correspond la 1-forme $\alpha = \alpha_1$ qui donne lieu à une immersion Σ_V dont le ρ_X est harmonique. En outre, il existe une unique fonction $U_\lambda \colon \Omega \to \Lambda\mathcal{G}_\tau$ tel que $dU_\lambda = U_\lambda\alpha_\lambda$ et $U_\lambda(z_0) = \mathbf{1}$. U_λ sera appelée une extention Σ_V de $U = U_1$.

Démonstration — C'est une conséquence immédiate du théorème 10 et du fait que, comme α est réelle, on a $\hat{\alpha}_k = \overline{\hat{\alpha}_{-k}}$. q.e.d.

4.2. Théorèmes de décomposition de groupe. Ecrivons les décompositions d'Iwasawa des différents groupes que l'on a rencontrés :

$$\begin{aligned}\{R_a,\, a \in S^3\}^{\mathbb{C}} &= \{R_a,\, a \in S^3\}.\mathcal{B}_R\\ \{L_c,\, c \in S^3\}^{\mathbb{C}} &= \{L_c,\, c \in S^3\}.\mathcal{B}_L.\end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{B}_R$ et $\mathcal{B}_L$ commutent. Ensuite, on a

$$SO(4)^{\mathbb{C}} = \{R_aL_c,\, a, c \in S^3\}^{\mathbb{C}} = SO(4).(\mathcal{B}_R\mathcal{B}_L).$$

Alors on en déduit $G^{0^{\mathbb{C}}} = G^0.\mathcal{B}$ et $G_0^{0^{\mathbb{C}}} = G_0^0.\mathcal{B}_0$ avec

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \left\{\begin{pmatrix} AC & 0\\ 0 & BC\end{pmatrix},\, A, B \in \mathcal{B}_R,\, C \in \mathcal{B}_L\right\}\\ \mathcal{B}_0 &= \left\{\begin{pmatrix} AC & 0\\ 0 & AC\end{pmatrix},\, A \in \mathcal{B}_R,\, C \in \mathcal{B}_L\right\}.\end{aligned}$$

Soit $F = Diag(A,\, B) \in G^{0^{\mathbb{C}}}$, $(A, B \in SO(4)^{\mathbb{C}})$ alors on a $\tau(F) = -L_{E\downarrow}FL_{E\downarrow} = Diag(B,\, A)$. Ainsi si $(\lambda \mapsto F_\lambda) \in \Lambda G^{0^{\mathbb{C}}}$, alors $F_\lambda \in \Lambda G_\tau^{0^{\mathbb{C}}}$ si, et seulement si, en écrivant $F_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{F}_{2k}\lambda^{2k}$ on a $\hat{F}_{4k} \in \{Diag(R_aL_c,\, R_aL_c),\, a, c \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\}$ et $\hat{F}_{2k} \in \{Diag(R_aL_c,\, -R_aL_c),\, a, c \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\}$. En particulier, si $(\lambda \mapsto F_\lambda) \in \Lambda_{\mathcal{B}}^+ G_\tau^{0^{\mathbb{C}}}$ alors , comme $F_0 \in \mathcal{B}$, on en déduit que $F_0 \in \mathcal{B}_0$, donc $\Lambda_{\mathcal{B}}^+ G_\tau^{0^{\mathbb{C}}} = \Lambda_{\mathcal{B}_0}^+ G_\tau^{0^{\mathbb{C}}}$.
On va utiliser le théorème suivant (cf. [**12**]) sur les groupes de lacets.

Théorème 11. *Soit G un groupe de Lie compact, $G^{\mathbb{C}}$ son complexifié et $G^{\mathbb{C}} = G.\mathcal{B}_G$ sa décomposition d'Iwasawa. Alors*

(i) *La fonction produit*

$$\begin{array}{ccc}\Lambda G \times \Lambda_{\mathcal{B}_G}^+ G^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \Lambda G^{\mathbb{C}}\\ (\phi_\lambda, \beta_\lambda) & \longmapsto & \phi_\lambda.\beta_\lambda\end{array}$$

est un difféomorphisme.

(ii) *Il existe un ouvert C_G de $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ tel que la fonction produit*

$$\begin{array}{ccc}\Lambda_*^- G^{\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & C_G\\ (\phi_\lambda^-, \phi_\lambda^+) & \longmapsto & \phi_\lambda^-.\phi_\lambda^+\end{array}$$

est un difféomorphisme.

On va en déduire :

Théorème 12.
(i) *La fonction produit*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda G^0_\tau \times \Lambda^+_{\mathcal{B}_0} G^{0\mathbb{C}}_\tau & \longrightarrow & \Lambda G^{0\mathbb{C}}_\tau \\ (F_\lambda, B_\lambda) & \longmapsto & F_\lambda . B_\lambda \end{array}$$

est un difféomorphisme.
(ii) *Il existe un ouvert $\overrightarrow{C}$ de $\Lambda G^{0\mathbb{C}}_\tau$ tel que la fonction produit*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^-_* G^{0\mathbb{C}}_\tau \times \Lambda^+ G^{0\mathbb{C}}_\tau & \longrightarrow & \overrightarrow{C} \\ (F^-_\lambda, F^+_\lambda) & \longmapsto & F^-_\lambda . F^+_\lambda \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Démonstration du théorème 12 —
(i) D'après le théorème 11, l'application $(F_\lambda, B_\lambda) \in \Lambda G^0 \times \Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{0\mathbb{C}} \longmapsto F_\lambda . B_\lambda \in \Lambda G^{0\mathbb{C}}$ est un difféomorphisme. Soit $U_\lambda \in \Lambda G^{0\mathbb{C}}_\tau$ alors $U_\lambda = F_\lambda . B_\lambda$ avec $(F_\lambda, B_\lambda) \in \Lambda G^0 \times \Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{0\mathbb{C}}$ et $F_{i\lambda}.B_{i\lambda} = \tau(F_\lambda)\tau(B_\lambda)$ or $\tau(G^0) \subset G^0$ et $\tau(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ donc $\tau(F_\lambda) \in \Lambda G^0$, $\tau(B_\lambda) \in \Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{0\mathbb{C}}$ or d'après le théorème 11, il y a unicité de la décomposition d'où $F_{i\lambda} = \tau(F_\lambda), B_{i\lambda} = \tau(B_\lambda)$, finalement $F_\lambda \in \Lambda G^0_\tau$, $B \in \Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{0\mathbb{C}}_\tau = \Lambda^+_{\mathcal{B}_0} G^{0\mathbb{C}}_\tau$ ce qui démontre (i).

(ii) $\overrightarrow{C} = \Lambda^-_* G^{0\mathbb{C}}_\tau . \Lambda^+ G^{0\mathbb{C}}_\tau$ est l'image par un difféomorphisme (celui donné par le théorème 11) de $\Lambda^-_* G^{0\mathbb{C}}_\tau \times \Lambda^+ G^{0\mathbb{C}}_\tau$ donc c'est une sous-variété de $\Lambda G^{0\mathbb{C}}_\tau$ difféomorphe à $\Lambda^-_* G^{0\mathbb{C}}_\tau \times \Lambda^+ G^{0\mathbb{C}}_\tau$. En outre $\overrightarrow{C} = C_{G^0} \cap \Lambda G^{0\mathbb{C}}_\tau$ donc c'est un ouvert de $\Lambda G^{0\mathbb{C}}_\tau$. q.e.d.

Passons maintenant aux applications affines :

Théorème 13.
(i) *On a la décomposition suivante :*

$$\Lambda \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau = \Lambda \mathcal{G}_\tau . \Lambda^+_{\mathcal{B}_0} \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau$$

(ii) *Il existe un ouvert C de $\Lambda \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau$ tel qu'on ait la décomposition suivante :*

$$C = \Lambda^-_* \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau . \Lambda^+ \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau$$

Démonstration — Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration faite dans [**9**], en remplacant L_j par $L_{E^\downarrow}$. q.e.d.

4.3. Représentation de Weierstrass. Nous allons suivre la même procédure que dans [**9**] (i.e., utiliser les méthodes de [**3**] en les adaptant).

4.3.1. Potentiel holomorphe.

Définition 5. Soit μ une 1-forme sur Ω à valeurs dans $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau^{\mathbb{C}}$, alors on dira de μ que c'est un potentiel holomorphe si on a

$$\mu_\lambda = \sum_{n\geq -2} \hat{\mu}_n \lambda^n$$

avec $\hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n(\frac{\partial}{\partial z})dz$ où $\hat{\mu}_n(\frac{\partial}{\partial z})$ est holomorphe.

Théorème 14. *Soit $U = (F, X)$ un relèvement Σ_V dont le ρ_X est harmonique et $U_\lambda = (F_\lambda, X_\lambda)\colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau$ son extension Σ_V (Ω est simplement connexe, on a choisi $z_0 \in \Omega$ et $U_\lambda(z_0) = Id\ \forall\lambda \in S^1$). Alors :*

- *Il existe une fonction holomorphe $H_\lambda\colon \Omega \to \Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ et une fonction $B_\lambda\colon \Omega \to \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel que $U_\lambda = H_\lambda.B_\lambda$.*
- *En outre la forme de Maurer-Cartan $\mu_\lambda = H_\lambda^{-1}.dH_\lambda$ est un potentiel holomorphe : on dira que c'est un potentiel holomorphe pour U_λ .*

Démonstration — L'existence de H_λ et B_λ est reliée à la résolution de l'équation :

$$0 = \frac{\partial U_\lambda B_\lambda^{-1}}{\partial\bar{z}} = U_\lambda\left(\alpha_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) - B_\lambda^{-1}\frac{\partial B_\lambda}{\partial\bar{z}}\right)B_\lambda^{-1}$$

qui est équivalente à

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial\bar{z}} = B_\lambda\left(\alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right),$$

avec la contrainte que $(\lambda \longmapsto B_\lambda(z)) \in \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ pour tout $z \in \Omega$. L'existence de B_λ s'obtient en suivant les mêmes arguments que [**3**]. Pour montrer que μ_λ est un potentiel holomorphe, il suffit d'écrire :

$$\mu_\lambda = H_\lambda^{-1}.dH_\lambda = B_\lambda(\alpha_\lambda - B_\lambda^{-1}.dB_\lambda).B_\lambda^{-1}$$

et d'utiliser le fait que $(\lambda \longmapsto B_\lambda(z)) \in \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ et que $z \mapsto H_\lambda(z)$ est holomorphe. q.e.d.

Inversement tout potentiel holomorphe produit une surface Σ_V dont le ρ_X est harmonique :

Théorème 15. *Soit μ_λ un potentiel holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et H_λ^0 une constante dans $\Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ (par exemple $H_\lambda^0 = Id$). Alors*

- *Il existe une unique fonction holomorphe $H_\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$, tel que*

$$dH_\lambda = H_\lambda\mu_\lambda \quad et \quad H_\lambda(z_0) = H_\lambda^0.$$

- *En appliquant la décomposition $\Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}} = \Lambda\mathcal{G}_\tau.\Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau$ à $H_\lambda(z)$ pour chaque z, on obtient deux fonctions $U_\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau$ et $B_\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau$ tel que $H_\lambda(z) = U_\lambda(z).B_\lambda(z)\ \forall z \in \Omega$. Alors U_λ est une extension Σ_V d'une surface Σ_V dont le ρ_X est harmonique (pourvu que $\hat{\alpha}_{-1} \neq 0$).*

– *De plus μ_λ est un potentiel holomorphe pour U_λ.*

Démonstration — On a $d\mu_\lambda = 0$, de plus $\mu_\lambda(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0$ implique $\mu_\lambda \wedge \mu_\lambda = 0$ d'où

$$d\mu_\lambda + \mu_\lambda \wedge \mu_\lambda = 0,$$

et il existe donc une unique fonction holomorphe $H_\lambda \colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel que

$$dH_\lambda = H_\lambda.\mu_\lambda \tag{13}$$

et $H_\lambda(z_0) = H_\lambda^0$. Ecrivons la décomposition du théorème 13 pour $H_\lambda(z)$, $z \in \Omega$: il existe un unique couple $(U_\lambda, B_\lambda) \in \Lambda\mathcal{G}_\tau \times \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel que $H_\lambda(z) = U_\lambda(z).B_\lambda(z)$. Alors en utilisant (13), on a

$$U_\lambda^{-1}.dU_\lambda = B_\lambda(\mu_\lambda - B_\lambda^{-1}.dB_\lambda)B_\lambda^{-1} \tag{14}$$

Posons $\alpha = U_\lambda^{-1}.dU_\lambda$. Alors (14) nous dit que α_λ doit s'écrire sous la forme

$$\alpha_\lambda = \sum_{n \geq -2} \hat{\alpha}_n \lambda^n$$

Mais comme α_λ est réelle par définition, on a $\overline{\hat{\alpha}_n} = \hat{\alpha}_{-n}$ et donc

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\hat{\alpha}_{-2} + \lambda^{-1}\hat{\alpha}_{-1} + \hat{\alpha}_0 + \lambda\hat{\alpha}_1 + \lambda^2\hat{\alpha}_2.$$

De plus, en utilisant $B_\lambda^{-1} = \hat{B}_0^{-1} - \lambda\hat{B}_0^{-1}\hat{B}_1\hat{B}_0^{-1} + \cdots$, il résulte d'après (14) que

$$\hat{\alpha}_{-2} = \hat{B}_0\hat{\mu}_{-2}\hat{B}_0^{-1} \text{ et } \hat{\alpha}_{-1} = \hat{B}_0\hat{\mu}_{-1}\hat{B}_0^{-1} + \hat{B}_1\hat{\mu}_{-2}\hat{B}_0^{-1} - \hat{B}_0\hat{\mu}_{-2}\hat{B}_0^{-1}\hat{B}_1\hat{B}_0^{-1},$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{-2} &= \hat{B}_0\hat{\mu}_{-2}\hat{B}_0^{-1} \\ \hat{\alpha}_{-1} &= \hat{B}_0\hat{\mu}_{-1}\hat{B}_0^{-1} + [\hat{B}_1\hat{B}_0^{-1},\, \hat{B}_0\hat{\mu}_{-2}\hat{B}_0^{-1}]\ . \end{aligned}$$

Ainsi on voit que $\hat{\alpha}_{-1}$ et $\hat{\alpha}_{-2}$ sont des (1,0)-formes. De plus comme α_λ vérifie automatiquement la condition $d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0$ alors le corollaire 3 implique -pourvu que $\hat{\alpha}_{-1} \neq 0$ - que U_λ est une extension Σ_V dont le ρ_X est harmonique. Enfin comme $U_\lambda = H_\lambda.B_\lambda^{-1}$, on voit que μ_λ est un potentiel holomorphe pour U_λ. q.e.d.

4.4. Potentiel méromorphe. Le potentiel holomorphe construit au théorème 15 est loin d'être unique. On peut remédier à cela en incluant les potentiels méromorphes.

Définition 6. Un potentiel méromorphe est une 1-forme méromorphe sur Ω à valeurs dans $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau^{\mathbb{C}}$ qui s'écrit

$$\mu_\lambda = \lambda^{-2}\hat{\mu}_{-2} + \lambda^{-1}\hat{\mu}_{-1}.$$

Théorème 16. *Soit $U_\lambda : \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau$ une extension Σ_V (dont le ρ_X est harmonique). Alors il existe une suite de points isolés de Ω , $S = \{a_n,\, n \in I\}$ tel que :*

– $\forall z \in \Omega \setminus \{a_n,\, n \in I\}$, $\quad U_\lambda(z) \in C = \Lambda_*^- \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}.\Lambda^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$.
– *De plus les fonctions* $U_\lambda^- \colon \Omega \setminus \{a_n,\, n \in I\} \longrightarrow \Lambda_*^- \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ *et* $U_\lambda^+ \colon \Omega \setminus \{a_n,\, n \in I\} \longrightarrow \Lambda^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ *ainsi définies sont holomorphes .*
– *En outre* U_λ^- *s'étend en un fonction méromorphe sur* Ω.
– *Sa forme de Maurer-Cartan* $\mu_\lambda = (U_\lambda^-)^{-1} dU_\lambda^-$ *est un potentiel méromorphe.*

Démonstration — C'est une simple adaptation de la démonstration de **[3]**. q.e.d.

Remarque 7. Le potentiel méromorphe est unique par unicité de la décomposition $U_\lambda = U_\lambda^-.U_\lambda^+$. D'autre part, on peut retrouver X_λ en appliquant la méthode du théorème 15 à μ_λ. En effet, comme on peut toujours supposer que $U_\lambda(z_0) = Id$, on a $U_\lambda^-(z_0) = Id$ donc U_λ^- est solution de $\mu_\lambda = (U_\lambda^-)^{-1}.dU_\lambda^-$, $U_\lambda^-(z_0) = Id$. En outre, on peut écrire $U_\lambda^+ = B_\lambda H$ avec $H \in C^\infty(\Omega \setminus S, G_0^0)$ et $B_\lambda \in C^\infty(\Omega \setminus S, \Lambda_{\mathcal{B}_0}^+ \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}})$, alors on a $U_\lambda^- = U_\lambda (U_\lambda^+)^{-1} = (U_\lambda H^{-1}) B_\lambda^{-1}$ mais $U_\lambda H^{-1}$ est la partie $\Lambda\mathcal{G}_\tau$ dans la décomposition de U_λ^- suivant $\Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}} = \Lambda\mathcal{G}_\tau.\Lambda_{\mathcal{B}_0}^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ sur $\Omega \setminus S$ et $U_\lambda H^{-1}$ est un relèvement de X_λ.

5. Le vecteur courbure moyenne

On se propose de calculer le vecteur courbure moyenne d'une surface Σ_V.

Soit $X \colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^8$ une immersion conforme Σ_V. Alors on a

$$H = \frac{e^{-2f}}{2} \triangle X = \frac{e^{-f}}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q'}{\partial v} + f_u q + f_v q' \right).$$

Posons $(E_1, E_2) = \mathcal{R}_\rho^{-1}(q, q')$, alors

$$H = \frac{e^{-f}}{2} \mathcal{R}_\rho \left[\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{\partial E_2}{\partial v} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u} \end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v} \end{pmatrix} E_2 + f_u E_1 + f_v E_2 \right]$$

avec comme d'habitude $\gamma = d\rho.\rho^{-1}$. En outre, en écrivant que $d(dX) = 0$, on a

$$\frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{\partial E_2}{\partial u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v} \end{pmatrix} E_1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u} \end{pmatrix} E_2 + f_v E_1 - f_u E_2 = 0,$$

appliquons l'endomorphisme $L_{E^\downarrow}$ à cette équation

$$\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{\partial E_2}{\partial v} + \begin{pmatrix} -y.\gamma_v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x.\gamma_u \\ 0 \end{pmatrix} + f_v E_2 + f_u E_1 = 0.$$

Injectons cela dans l'expression de H :

$$\begin{aligned} H &= \frac{e^{-f}}{2}\mathcal{R}_\rho \begin{pmatrix} y.\gamma_v - x.\gamma_u \\ y.\gamma_u + x.\gamma_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-f}}{2}\mathcal{R}_\rho \left[\begin{pmatrix} -R_{\gamma_u} & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u} \end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} -R_{\gamma_v} & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v} \end{pmatrix} E_2 \right]. \end{aligned}$$

En posant $\gamma^d = d\rho.\rho^{-1}$ et $\gamma^g = \rho^{-1}.d\rho$, on peut réécrire cela sous la forme

$$H = \frac{e^{-f}}{2}\mathcal{R}_\rho \left[\begin{pmatrix} -R_{\gamma^d_u} & 0 \\ 0 & R_{\gamma^g_u} \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} -R_{\gamma^d_v} & 0 \\ 0 & R_{\gamma^g_v} \end{pmatrix} q' \right].$$

6. Surfaces ω_I-isotropes, ρ-harmoniques

6.1. Le produit vectoriel de $\mathbb{O}$ et le groupe $Spin(7)$. Considérons l'application $A\colon u \in \operatorname{Im}\mathbb{O} \mapsto \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & -L_u \end{pmatrix} \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$. On vérifie que $A(u)^2 = -|u|^2 Id$. Ainsi, A est une application de Clifford et on montre qu'elle se prolonge en un isomorphisme d'algèbre $Cl(7) \cong \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ (cf. [**4**]). On a de plus $Cl(7)^{\text{paire}} \cong \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ et $Spin(7)$ est le groupe engendré par $\{L_u,\, u \in S(\operatorname{Im}\mathbb{O})\}$. D'autre part, $g \in SO(8)$ appartient à $Spin(7)$ si, et seulement si,

$$\forall u \in \operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7,\, \exists w \in \operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7$$

$$g\, L_u\, g^{-1} = L_w$$

Cette propriété nous donne aussi la représentation vectoriel de $Spin(7)$, $\chi\colon Spin(7) \longrightarrow SO(7)$ (revêtement universel de $SO(7)$) : $\forall g \in Spin(7)$, $\forall u \in \operatorname{Im}\mathbb{O}$

$$L_{\chi_g(u)} = g\, L_u\, g^{-1} \tag{15}$$

ce qui donne $\chi_g(u) = g(ug^{-1}(1))$. On a alors que $g \in O(\mathbb{O})$ est dans $Spin(7)$ si, et seulement si,

$$g(uv) = \chi_g(u)g(v) \tag{16}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{O}$ (on pose $\chi_g(1) = 1$). Considérons maintenant le produit vectoriel de $\mathbb{O}$:

$$q \times q' = -\operatorname{Im}(q.\bar{q'}) = \operatorname{Im}(q'.\bar{q})$$

pour $q, q' \in \mathbb{O}$. C'est une application antisymétrique de $\mathbb{O}\times\mathbb{O}$ dans $\operatorname{Im}\mathbb{O}$. Ainsi elle définit une application

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & Gr_2(\mathbb{O}) & \longrightarrow & S(\operatorname{Im}\mathbb{O}) \\ & q \wedge q' & \longmapsto & q \times q' \end{array}$$

de la grassmanienne des plans orientés de $\mathbb{O}$ dans $S^6 \subset \operatorname{Im}\mathbb{O}$. La propriété fondamentale qui va nous permettre de faire dans un cadre plus général ce que l'on a déjà fait pour les surfaces Σ_V est la suivante

$$\forall g \in Spin(7),\ (g.q) \times (g.q') = \chi_g(q \times q'). \tag{17}$$

Elle veut dire que le produit vectoriel est $Spin(7)$-équivariant (lorsque $Spin(7)$ agit sur $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ de manière naturelle et sur $\operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7$ par l'intermédiaire de χ). En particulier lorsque l'on se restreint aux actions de $Spin(7)$ sur $Gr_2(\mathbb{O})$ et sur $S^6 = S(\operatorname{Im}\mathbb{O})$ alors ρ est $Spin(7)$-équivariante.

Pour tout couple orthonormé de $\mathbb{O}$, on a $\rho(q, q') = -q.\bar{q'}$ et donc $q' = \rho.q$. Ainsi l'ensemble des couples orthonormés de $\mathbb{O}$ est difféomorphe à $S^6 \times S^7$. De plus, on rappelle que l'on a pour tout $(q, q') \in \mathbb{O}^2$

$$q \times q' = -\sum_{i=1}^{7} \omega_i(q, q')e_i \ .$$

Considérons maintenant, pour $I \subsetneq \{1, 2, \dots 7\}$, les ensembles

$$\begin{aligned} V_I &= \{(q, q') \in S^7 \times S^7 / \langle q, q'\rangle = \omega_i(q, q') = 0,\ i \in I\} \\ Q_I &= \{P \in Gr_2(\mathbb{O}) /\ \omega_i(P) = 0,\ i \in I\}. \end{aligned}$$

On a $Q_I = V_I/SO(2)$; et $\rho(Q_I) = S^I = S(\bigoplus_{i \notin I} \mathbb{R}e_i)$. En particulier $V_I \cong S^7 \times S^{6-|I|}$. Pour $I = \varnothing$, on a $Q_\varnothing = Gr_2(\mathbb{O})$. Pour $I = \{1, 2, 3\}$ on retrouve l'ensemble Q étudié dans la section 2.

Cherchons le sous-groupe, G_I, de $Spin(7)$ qui conserve les ω_i, $i \in I$. $g \in Spin(7)$ conserve ω_i si, et seulement si, il commute avec L_{e_i}, $gL_{e_i}g^{-1} = L_{e_i}$, ce qui veut dire que $\chi_g(e_i) = e_i$, c'est à dire qu'il conserve e_i par son action sur S^6. Il en résulte que $G_I = \chi^{-1}(SO(\bigoplus_{i \notin I} \mathbb{R}e_i)) \simeq \chi^{-1}(SO(7 - |I|)) = Spin(7 - |I|)$. Ainsi G_I agit sur Q_I ainsi que que sur S^I et le produit vectoriel $\rho \colon Q_I \to S^I$ est G_I-équivariant. De plus, G_I agit transitivement sur S^I. En outre le stabilisateur d'un point de S^6 pour l'action de $Spin(7)$ s'identifie à $\chi^{-1}(SO(6)) = Spin(6)$ et donc $S^6 = Spin(7)/Spin(6)$. Plus généralement on a $S^I = G_I/G_{I\cup\{k\}} \simeq Spin(7 - |I|)/Spin(6 - |I|)$.

On peut toujours considérer en toute généralité que $I = \{1, 2, \dots, |I|\}$. En effet, le groupe $SO(7)$ agit transitivement sur les S^I avec I de même cardinal. Donc en prenant l'image réciproque par χ, et ρ, on voit que $Spin(7)$ agit transitivement sur les V_I avec I de cardinal fixé. Ainsi quitte à faire agir un élément de $Spin(7)$ on peut toujours considérer que $I = \{1, 2, \dots, |I|\}$, $S^I = S^{6-|I|}$, et $G_I = Spin(7 - |I|)$.

Exemple 1. Prenons $I = \{1, 2, 3\}$, on retrouve le cas étudié dans les sections précédentes. On a $Q_I = Q$, $G_I = Spin(4) = S^3 \times S^3$ et $S^3 \simeq S^3 \times S^3/S^3 = Spin(4)/Spin(3)$. Plus précisément, on a vu que

$G_I = \left\{ \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{pmatrix},\, a, b \in S^3 \right\}$ et

$$Stab_{G_I}(E^{\downarrow}) = G_{I\cup\{4\}} = \left\{ \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{pmatrix},\, a \in S^3 \right\}.$$

En outre, on a vu que l'action de G_I sur S^3 s'écrit

$$\chi_g(u) = \bar{a} u\, b \qquad \text{i.e.,}$$

$$\chi\colon Diag(R_a, R_b) \in Spin(4) \mapsto L_{\bar{a}} R_b \in SO(4).$$

Nous allons maintenant passer en revue les autres cas possibles.

0) Si $I = \varnothing$, alors $G_I = Spin(7)$ et $V_I = St_2(\mathbb{O})$ l'ensemble des couples orthonormés de $\mathbb{O}$. L'action de $Spin(7)$ sur S^6 est donnée par $\chi_g(u) = g(u)\overline{g(1)}$ d'après (16). $Spin(7)$ agit transitivement sur les couples orthonormés de $\mathbb{O}$. En effet, l'action de $Spin(7)$ sur S^7 est transitive et $Stab(1) = G_2$, et donc $S^7 = Spin(7)/G_2$. Ensuite l'action de G_2 sur $S(\{1\}^{\perp}) = S^6$ est transitive et $Stab_{G_2}(e_1) = SU(\bigoplus_{i>1} \mathbb{R}e_i,\, L_{e_1}) \simeq SU(3)$ et donc $S^6 = G_2/SU(3)$. On déduit alors facilement de cela que $Spin(7)$ agit transitivement sur $St_2(\mathbb{O})$ et $Stab_{Spin(7)}(1, e_1) = SU(3)$ et donc $St_2(\mathbb{O}) = Spin(7)/SU(3)$, $Gr_2(\mathbb{O}) = Spin(7)/(SO(2) \times SU(3))$.

1) Si $I = \{1\}$ alors $G_I = Spin(6) = SU(4)$. En effet, c'est le sous-groupe de $Spin(7)$ qui commute avec la structure complexe L_{e_1}, il est donc inclus dans $U(4)$. D'autre part comme $Spin(6)$ est engendré , dans $Cl(6)$, par les $u \cdot v$, (u, v) couple orthonormé de $\mathbb{R}^6$, alors comme $(u \cdot v)^2 = -1$, si on note A la représentation de $Spin(6)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ alors on a $A(u \cdot v)^2 = -Id$, donc $A(u \cdot v)$ est une structure complexe de $\mathbb{C}^4$ donc $\det_{\mathbb{C}}(A(u \cdot v)) \in \{\pm 1, \pm i\}$, ainsi $\det_{\mathbb{C}}(A(Spin(6))) \subset \{\pm 1, \pm i\}$. Enfin la connexité de $Spin(6)$ et un calcul des dimensions nous donne $A(Spin(6)) = SU(4)$.
   En outre, $Spin(6) = SU(4)$ agit transitivement sur V_I qui n'est autre que l'ensemble des couples hermitiens de $(\mathbb{O}, L_{e_1}) = \mathbb{C}^4$, et donc il agit transitivement sur Q_I. Le stabilisateur d'un couple (q, q') est isomorphe à $SU(2)$. Ainsi $V_{\{1\}} = SU(4)/SU(2)$, $Q_{\{1\}} = SU(4)/(SO(2) \times SU(2))$.

2) Si $I = \{1, 2\}$, alors $G_I = Spin(5) \simeq U(2, \mathbb{H})$. En effet, c'est le sous-groupe de $Spin(7)$ qui commute avec $I_1 = L_{I^{\uparrow}}$ et $I_2 = L_{J^{\uparrow}}$ donc avec $I_3 = I_1 I_2$ aussi. Il est donc inclus dans le groupe des automorphismes $\mathbb{H}-$linéaires pour la structure de $\mathbb{H}-$espace vectoriel sur $\mathbb{O}$ définie par I_1, I_2, I_3 ; mais il est aussi inclus dans $SO(8)$, il est donc inclus dans le groupe des $\mathbb{H}-$automorphismes de $\mathbb{O}$ qui conservent la forme hermitienne quaternionique $C = \langle\cdot,\cdot\rangle + \langle\cdot, I_1\cdot\rangle i + \langle\cdot, I_2\cdot\rangle j + \langle\cdot, I_3\cdot\rangle k$, qui est un conjugué de $U(2, \mathbb{H})$. Ensuite un calcul des dimensions et la connexité des deux groupes

permettent de conclure que $Spin(5) \simeq U(2,\mathbb{H})$. $Spin(5)$ n'agit pas transitivement sur $V_{\{1,2\}}$ car $Spin(5)$ conserve la forme C et agit librement et transitivement sur les fibres de C, tandis que $C(V_{\{1,2\}}) = [-1,1]k$. Ainsi les orbites sont caractérisées par la fonction C qui sur $V_{\{1,2\}}$ vaut $C(q,q') = \langle q, I_3.q'\rangle k$ et chaque orbite est difféomorphe à $Spin(5)$.

3) Le cas $I=\{1,2,3\}$ a déjà été longuement étudié dans les sections précédentes. On l'a rappelé dans l'exemple 1. En outre rajoutons que d'après la section 2 (cf. la démonstration du théorème 5), le groupe $Spin(4)$ n'agit pas transitivement sur Q, et que les orbites sont caractérisées par la fonction $r\colon q\wedge q' \mapsto Im(x.\bar{x'})$. Il y a alors une orbite de dimension 6 : $G.P_1 = r^{-1}(0)$, une S^2-famille d'orbites de dimension 5, dont la réunion est $G.P_2$: $\{P/r(P) = u/2\}$, u décrivant S^2, et enfin une famille d'orbite de dimension 6, celles tel que $0<|r|<1/2$.

4) Si $|I|=4$, on a vu que $G_I = Spin(3) = \{Diag(R_a,R_a),\, a\in S^3\}$. L'action de $Spin(3)$ sur S^2 s'écrit $\chi_g(\rho) = \bar{a}\rho\, a$ i.e $\chi\colon Diag(R_a,R_a) \in Spin(3) \mapsto L_{\bar{a}}R_a \in SO(3)$.

5) Si $|I|=5$ alors $G_I = Spin(2) = \{Diag(R_{e^{i\theta}},R_{e^{i\theta}}),\, \theta\in\mathbb{R}\}$. L'action de $Spin(2)$ sur S^1 est donnée par
$$\chi_g(e^{i\beta}) = e^{-2i\theta}.e^{i\beta}$$
l'identification entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}e_6\oplus\mathbb{R}e_7$ étant $ae_6+be_7\mapsto a+ib$.

6) Si $|I|=6$, alors $G_I=\{\pm Id\}$, $S_I=\{\pm e_7\}$ et $V_I = \{(q,\pm L_{e_7}q),\, q\in S^7\}$.

On a besoin, pour refaire dans le cas général ce que l'on a fait précédemment, de définir une application $\tilde{\rho}\colon G_I \to S^I$. Soit donc $I \subsetneq \{1,\dots,7\}$ et $e\in S^I = S(\bigoplus_{i\notin I}\mathbb{R}e_i)$, disons pour que les choses soient fixées une fois pour toutes que $e=e_{|I|+1}$ (en supposant comme on en a le droit que $I=\{1,\dots,|I|\}$). Posons alors
$$\tilde{\rho}_I(g) = \chi_g(e)$$
pour tout $g\in G_I$, alors $\tilde{\rho}_I(G_I) = S^I$ et par passage au quotient $\tilde{\rho}_I$ définit l'isomorphisme $G_I/G_{I\cup\{k\}} \simeq S^I$. De plus on a
$$\rho(g^{-1}.q, g^{-1}.q') = e \Longleftrightarrow \tilde{\rho}_I(g) = \rho(q,q').$$
En outre $\rho(q,q') = e \Longleftrightarrow q' = L_e q$.

6.2. Algèbres de Lie. L'automorphisme intérieur de $Spin(7)$, int_{L_e}, stabilise G_I. En effet, soit $g\in G_I$, alors pour $i\in I$ on a
$$\begin{array}{rclcl} L_{e_i}(L_e\, g\, L_e^{-1})L_{e_i}^{-1} &=& L_{e_i}(L_e\, g\, L_e)L_{e_i} &=& (-L_eL_{e_i})\, g\,(-L_{e_i}L_e) \\ &=& L_e(L_{e_i}\, g\, L_{e_i}^{-1})L_e^{-1} &=& L_e\, g\, L_e^{-1} \end{array}$$
ainsi $L_e\, g\, L_e^{-1}$ commute avec L_{e_i}, $i\in I$ d'où $L_e(G_I)L_e^{-1}\subset G_I$. L'algèbre de Lie de G_I, $\mathfrak{g}_I = spin(7-|I|)$ est stable par $Ad\, L_e$ et on a $(Ad\, L_e)^2 = Id$

donc elle se décompose en somme directe des deux sous-espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 respectivement :

$$\mathfrak{g}_I = \mathfrak{g}_0(I) \oplus \mathfrak{g}_2(I)$$

avec

$$\mathfrak{g}_0(I) = \ker(Ad\, L_e - Id)\,, \quad \mathfrak{g}_2(I) = \ker(Ad\, L_e + Id).$$

On posera $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_k(\varnothing)$, $k = 0, 2$, ainsi $spin(7) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$. Pour $|I| = 5$, on a $int_{L_e} = -Id$ d'où $\mathfrak{g}_2(I) = 0$. Pour $|I| = 6$, on a $\mathfrak{g}_I = 0$.
Considérons maintenant le groupe $\mathcal{G} = \mathcal{A}Spin(7)$ des isométries affines de $\mathbb{O}$ dont la partie linéaire est dans $Spin(7)$ et plus généralement $\mathcal{G}_I = \mathcal{A}G_I$ et $\mathfrak{g}(I)$ son algèbre de Lie. Soit τ_e l'automorphisme intérieur de $\mathcal{G}_I$ défini par $(-L_e, 0)$. Il induit un automorphisme d'ordre 4 de $\mathfrak{g}(I)$ (il est d'ordre 4 pour tout $|I|$ même pour $|I| = 5$ et 6, car sur $\mathbb{O}$, L_e est d'ordre 4) ce qui donne une décomposition de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(I) = \mathfrak{g}(I) \otimes \mathbb{C}$ suivant les espaces propres de τ_e associés aux valeurs propres i^k, $-1 \leq k \leq 2$. On notera $\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(I)$ ces espaces propres. Les espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 ne dépendent pas de I, on les notera simplement $\mathfrak{g}_{\pm 1}^{\mathbb{C}}$. On a alors

$$\begin{array}{lclclcl} \mathfrak{g}_{-1}^{\mathbb{C}} & = & \ker(L_e - iId) & , & \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} & = & \ker(L_e + iId) \\ \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}(I) & = & \mathfrak{g}_0(I) \otimes \mathbb{C} & , & \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}(I) & = & \mathfrak{g}_2(I) \otimes \mathbb{C}. \end{array}$$

On a $[\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(I), \mathfrak{g}_l^{\mathbb{C}}(I)] \subset \mathfrak{g}_{k+l \bmod 4}^{\mathbb{C}}(I)$, puisque τ_e est un automorphisme.

6.3. Surfaces ω_I-isotropes et $\rho-$harmoniques.

Définition 7. Soit Σ une surface immergée de $\mathbb{O}$, alors il lui est associée une application $\rho_\Sigma \colon \Sigma \to S^6$ définie par $\rho_\Sigma(z) = \rho(T_z\Sigma)$ i.e., si $X \colon \Sigma \to \mathbb{O}$ est une immersion alors $\rho_\Sigma = X^*\rho$. On dira que Σ est $\rho-$harmonique si ρ_Σ est harmonique. Soit $I \subsetneq \{1, \ldots, 7\}$ alors on dira que Σ est ω_I-isotrope si $\forall z \in \Sigma,\ T_z\Sigma \in Q_I$ (si $I = \varnothing$ il n'y a aucune condition). Dans ce cas, ρ_Σ est à valeurs dans $S^I \subset S^6$.

Définition 8. On appellera relèvement ω_I-isotrope (si $I = \varnothing$ on dira seulement relèvement) une application $U = (F, X) \colon \Sigma \to \mathcal{G}_I$ tel que X soit une immersion conforme ω_I-isotrope et $\tilde{\rho}_I \circ F = \rho_\Sigma$

Théorème 17. *Soit Ω un ouvert simplement connexe, $\alpha \in T^*\Omega \otimes \mathfrak{g}(I)$, alors*

- *α est la forme de Maurer-Cartan d'un relèvement ω_I-isotrope si, et seulement si,*

$$d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0, \quad \alpha''_{-1} = 0 \text{ et } \alpha'_{-1} \text{ ne s'annule pas,}$$

- *dans ce cas, α correspond à une immersion conforme ω_I-isotrope, $\rho - $harmonique si, et seulement si, la forme de Maurer-Cartan prolongée $\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha'_2 + \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \lambda^2\alpha''_2$ vérifie*

$$d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Démonstration — Pour le premier point cf. Section 3. Pour le second on remarque que l'on a

$$d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = d\beta_{\lambda^2} + \beta_{\lambda^2} \wedge \beta_{\lambda^2}$$

où $\beta_\lambda = \lambda^{-1}\alpha_2' + \alpha_0 + \lambda\alpha_2''$ est la forme de Maurer-Cartan prolongée associée à $\beta = F^{-1}.dF$, la forme de Maurer-Cartan du relèvement $F \in G_I$ de $\rho_X \in S^I$. D'après [**3**] (cf. aussi [**6**], ou [**7**]) on sait que ρ_X est harmonique si, et seulement si, $d\beta_\lambda + \beta_\lambda \wedge \beta_\lambda = 0\ \forall \lambda \in S^1$ ce qui achève la démonstration. q.e.d.

On peut maintenant faire ce que l'on a fait dans la section 4 à l'aide des groupes de lacets et obtenir une représentation de Weierstrass par des potentiels holomorphes à valeurs dans $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(I)_\tau$.

Remarque 8. On a choisi $e = e_{|I|+1}$. Avec ce choix le groupe de symétrie $G_{I\cup\{|I|+1\}}$ n'est autre que le groupe d'isotropie pour l'action de G_I. Donc c'est pratique lorsqu'on fait une étude théorique où on envisage successivement les différents cas possibles. Mais ce choix n'est pas pratique si l'on veut que les décompositions des algèbres de Lie se correspondent i.e., la décomposition du sous-cas soit la "trace" de la décomposition du cas plus général. Pour cela il faut donc prendre le même e. Il suffit de le prendre compatible avec le sous-cas alors il sera compatible avec le cas plus général. Exemple : Si on veut étudier le cas $|I| = 2$ ainsi que le sous-cas $|I| = 3$, alors le choix de $e = E^{\downarrow}$ pour les deux convient bien et les décompositions se correspondent : $\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(\{1,2,3\}) = \mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(\{1,2\}) \cap \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(\{1,2,3\})$. Donc on peut faire une étude simultanée des deux (on a le même automorphisme τ_e) et la représentation de Weierstrass du sous-cas s'obtiendra tout simplement en prenant dans la représentation de Weierstrass du cas plus général, des potentiels holomorphes à valeurs dans une sous algèbre de Lie, $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(J)_\tau$, de l'algèbre de Lie du cas plus général, $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(I)_\tau$.

Remarque 9. On peut évidemment envisager le cas plus général des surfaces ω_E-isotropes où E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$: on dira qu'un plan P de $\mathbb{O}$ est ω_E-isotrope s'il est isotrope pour $\omega_e = \langle \cdot, L_e \cdot\rangle$ pour tout $e \in S(E)$. Pour tout E, il existe $g \in Spin(7)$ qui envoie l'ensemble des plans ω_E-isotropes sur l'ensemble des plans ω_I-isotropes avec $|I| = \dim E$. En effet, soit $h \in SO(7)$ tel que $h.E = \mathrm{Vect}(e_i,\, i \in I)$ alors pour $g \in \chi^{-1}(\{h\})$ on a $g^*\omega_I = \omega_E$ avec $\omega_E = \mathrm{Vect}(\omega_e,\, e \in E)$, $\omega_I = \mathrm{Vect}(\omega_i,\, i \in I)$. Donc quitte à faire agir un élément fixe de $Spin(7)$ on est ramené au cas que l'on a étudié.

Remarque 10. Ce que l'on vient de faire dans $\mathbb{O}$ peut être fait dans $\mathbb{H}$. On définit le produit vectoriel $x \times y = -\mathrm{Im}\,(x.\bar{y})$ pour $x, y \in \mathbb{H}$. On a $x \times y = -\sum_{i=1}^{3} \omega_i(x,y)e_i$ avec $\omega_i = \langle \cdot, e_i \cdot\rangle$ et $(e_1, e_2, e_3) = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$. Alors on a pour $g = R_a L_b \in SO(4)$, $(gx) \times (gy) = -\mathrm{Im}\,(bx\bar{y}\bar{b}) = b(x \times y)b^{-1}$. Ainsi la représentation vectorielle de $Spin(3) = \{L_b,\, b \in S^3\}$, $\chi\colon Spin(3) \to SO(3)$ est donnée par

$L_b \in Spin(3) \mapsto int_b = L_b R_{b^{-1}} \in SO(\operatorname{Im}\mathbb{H})$. En procédant comme on l'a fait dans $\mathbb{O}$, on montre que les surfaces de $\mathbb{R}^4$ $\rho-$harmoniques sont un système complètement intégrable. Plus généralement, les surfaces ω_I – isotropes, $\rho-$harmoniques de $\mathbb{R}^4$ sont un système complètement intégrable. Ici on a $|I| = 0, 1$ ou 2. Pour $|I| = 1$ on retrouve les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires. Pour $|I| = 2$ on trouve les surfaces spéciales lagrangiennes.

D'ailleurs une surface ω_I-isotrope, $\rho-$harmonique de $\mathbb{H}$ n'est autre qu'une surface ω_I-isotrope, $\rho-$harmonique de $\mathbb{O}$ contenue dans le sous-espace $\mathbb{H}$ de $\mathbb{O}$. D'autre part, on voit que si l'immersion X est à valeurs dans $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}\mathbb{H}$ alors X est $\rho-$harmonique si, et seulement si, elle est à courbure moyenne constante. Ainsi l'ensemble des CMC de $\mathbb{R}^3$ n'est autre que l'ensemble des surfaces $\rho-$harmoniques de $\mathbb{H}$ incluses dans $\operatorname{Im}\mathbb{H}$.

6.4. Calcul du vecteur courbure moyenne. Dans le cas des surfaces Σ_V ($|I| = 3$) on disposait du relèvement $\mathcal{R}\colon \rho \in S^3 \mapsto \mathcal{R}_\rho \in Spin(4)$, en particulier la fibration $Spin(4) \to S^3$ est triviale (on a vu que c'est un produit semi-direct). Ceci nous a permis d'écrire l'équation linéaire (11) qui caractérise les surfaces Σ_V et de calculer le vecteur courbure moyenne en utilisant le fait que le fibré $Q \to S^3$ est trivial : on a représenté (q, q') par $(\rho, (E_1, E_2))$. Dans le cas général, ce n'est pas possible : $SO(n+1) \to SO(n+1)/SO(n) = S^n$ n'est pas trivialisable sinon la sphère S^n serait parallélisable or on sait que ce n'est le cas que pour $n = 1, 3, 7$. On retrouve donc le cas $n = 3$ et le cas évident $n = 1$ (dans ce cas $Spin(2) = S^1$). Dans le cas général donc on ne peut pas faire la séparation précédente. Cependant, on peut toujours calculer le vecteur courbure moyenne en fonction de ρ et la formule obtenue est valable pour n'importe quelle surface de $\mathbb{O}$ sans aucune hypothèse.

Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{O}$ une immersion conforme alors par définition de $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to \operatorname{Im}\mathbb{O}$ on a

$$*dX = -\rho_X.dX$$

et cette équation détermine le $\rho_X = X^*\rho$ de l'immersion (i.e., si on a $*dX = -\sigma.dX$ alors $\sigma = \rho_X$). Prenons la différentielle de cette équation, on obtient

$$\triangle X = (\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} - (\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v} = \rho\cdot\left((\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} + (\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} H = \frac{e^{-2f}}{2}\triangle X &= \frac{e^{-2f}}{2}\left((\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} - (\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ &= \frac{e^{-2f}}{2}\,\rho\cdot\left((\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} + (\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Références

[1] F.E. Burstall & F. Pedit, *Harmonic maps via Adler-Kostant-Symes Theory*, Harmonic maps and integrable systems, A.P. Fordy, J.C. Wood (Eds.), Vieweg, 1994, 221–272, MR 1264189, Zbl 0828.58021.

[2] F.E. Burstall & J.H. Rawnsley, *Twistor theory for Riemannian Symmetric Spaces with applications to harmonic maps of Riemann Surfaces*, Lect. Notes in Math., **1424**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990, MR 1264189, Zbl 0699.53059.

[3] J. Dorfmeister, F. Pedit, & H.-Y. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. in Analysis and Geometry **6**(**4**) (1998) 633–668, MR 1664887, Zbl 0932.58018.

[4] R. Harvey, *Spinors and Calibrations*, Acadamic Press Inc., 1990, MR 1045637, Zbl 0694.53002.

[5] R. Harvey & H.B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Mathematica **148** (1982) 47–157, MR 0666108, Zbl 0584.53021.

[6] F. Hélein, *Applications harmoniques, lois de conservations et repères mobiles*, Diderot éditeur, Paris 1996 ; or *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Cambridge University Press, 2002, MR 1913803, Zbl 1010.58010.

[7] ———, *Constant mean Curvature Surfaces, Harmonic maps and Integrable Systems*, Lecture in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 2001, MR 1844305.

[8] ———, *Willmore immersions and loop groups*, J. Differential Geometry **50**(**2**) (1998) 331–338, MR 1684984, Zbl 0938.53033.

[9] F. Hélein & P. Romon, *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in* $\mathbb{C}^2$, Comm. in Analysis and Geometry **10**(**1**) (2002) 79–126, MR 1894142, Zbl 1007.53060.

[10] ———, *Weierstrass representation of Lagrangian surfaces in four dimensional spaces using spinors and quaternions*, Comment. Math. Helv. **75** (2000) 668–680, MR 1789181, Zbl 0973.53065.

[11] ———, *Hamiltonian stationnary Lagrangian surfaces in Hermitian symmetric spaces*, in 'Differential Geometry and Integrable Systems' (Martin Guest, Reiko Miyaoka, and Yoshihiro Ohnita, Editors), AMS, 2002, MR 1955633, Zbl 1036.53058.

[12] A. Pressley & G. Segal, *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1986, MR 0900587, Zbl 0618.22011.

[13] C.L. Terng, *Geometries and Symmetries of Soliton Equations and Integrable Elliptic Equations*, preprint arXiv :math.DG/0212372.

12 Blvd. de Buttes Chaumont 95190
Goussainville, France
E-mail address: khemar@math.jussieu.fr
Current address :
TU Munich, Zentrum Mathematik (M8)
Boltzmannstr. 3, D-85747
Garching, Germany