TOKYO J. MATH.
VOL. 3, No. 1, 1980

Cohomologie de de Rham au Bord d'un Domaine Fortement Pseudoconvexe

Tosiaki KORI

Université de Waseda

Introduction

Soit X un espace analytique réduit de dimension plus grande que 2. Soit D un ouvert relativement compact de X avec sa frontière fortement pseudoconvexe B. On met souvent l'hypothèse; (0.1) B est une sous-variété différentiable de codimension 1 dans la partie régulière de X.

Soient $\Omega_X^{\cdot}$ le complexe de faisceaux des formes holomorphes sur X, et $\Omega_B^{\cdot}$ le complexe de faisceaux des formes différentielles de type $(p, 0)$ sur B vérifiantes l'équation de Cauchy-Riemann induite sur B, celui-ci est défini sous l'hypothèse (0.1). Pour un complexe différentiel $(C^{\cdot}, \delta)$, on désigne par $h^p(C^{\cdot})$ sa p-ème cohomologie;

$$h^p(C^{\cdot})=\frac{\ker \delta\colon C^p \longrightarrow C^{p+1}}{\delta C^{p-1}} .$$

Pour un complexe de faisceaux $K^{\cdot}$ de base Y, on désigne par

$$\boldsymbol{H}^{\cdot}(Y, K^{\cdot})$$

l'hypercohomologie sur Y du $K^{\cdot}$. On désignera par $\underline{H}_b^{\cdot}\, F$ la cohomologie locale du faisceau F relatif au bord B. On trouvera démontrés dans cet article les résultats suivants:

THÉORÈME 4.1.5. *Sous l'hypothèse* (0.1), *on a*

$$H^{\cdot}(B, C)\cong \boldsymbol{H}^{\cdot}(B, \underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot}) .$$

Si en outre D est de Stein on a

$$H^p(B, C)\cong h^p\Gamma(B, \underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot})$$

pour $p\leqq m-2$, *où* $m=\min_p \operatorname{codh} \Omega_X^p$.

Reçu 11 octobre, 1979

THÉORÈME 5.3.2. *Sous l'hypothèse* (0.1), *on a*

$$H^{\cdot}(B, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{H}^{\cdot}(B, \Omega_B^{\cdot}) .$$

Si en outre D est une variété de Stein, on a (dans Théorème 6.1.5)

$$H^p(B, \boldsymbol{C}) \cong h^p \Gamma(B, \Omega_B^{\cdot})$$

pour $p \leqq \dim X - 2$.

THÉORÈME 6.3.2. *Si B satisfait à* (0.1) *et si chaque point de D a un voisinage holomorphiquement contractible à ce point, on a*

$$H^{\cdot}(D, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{H}^{\cdot}(\bar{D}, \Omega_X^{\cdot}(B)) ,$$

où $\Omega_X^p(B)$ *est le faisceau des p-formes holomorphes dans D qui sont lisses jusqu'à la frontière B. Si de plus D est une variété de Stein on a*

$$H^p(D, \boldsymbol{C}) \cong h^p \Gamma(\bar{D}, \Omega_X^{\cdot}(B))$$

pour $p \leqq \dim X - 2$.

Le problème de valeurs au bord cohomologiques d'un faisceau analytique a été étudié par de nombreux auteurs, surtout la théorie de résidues et celle d'hyperfonctions de Sato sont importantes et bien développées. Un intérêt de telle étude est qu'on peut avoir une nouvelle classe des fonctions généralisées sur le bord, qui réfléchit l'obstruction de passer régulièrement par la frontière, et l'un autre est qu'on peut envisager comment un object sur la frontière domine son correspondant à l'intérieure. Nous faisons la recherche de ce problème sur la frontière d'un ouvert fortement pseudoconvexe, là on trouve une cohérence entre des objets au bord et ses correspondants intérieures, par exemple, le lien entre la famille universelle de structures partiellement complexes sur la frontière et les déformations de singularités isolées d'après M. Kuranishi [16], ou la représentation intégrale des fonctions holomorphes d'après G. M. Henkin [14].

On donnera ici un sommaire de chaque section. Dans la section 2 on cherche des faisceaux $\underline{\boldsymbol{H}}_b^{\cdot} F$ de cohomologies locales d'un faisceau cohérent F relatif à B et ses cohomologies. D'après Andreotti-Grauert [1] on peut montrer

$$\underline{\boldsymbol{H}}_b^p F = 0 , \quad \text{pour} \quad 2 \leqq p \leqq \operatorname{codh} F - 1 .$$

D'autre part, d'après un théorème de Malgrange-Siu, on voit que

$$\underline{\boldsymbol{H}}_b^p F = 0 , \quad \text{pour} \quad p \geqq \dim F + 1$$

donc, si F est de Cohen-Macaulay, on a

$$\underline{H}_b^p F=0\ , \qquad p\neq 1, \dim F\ .$$

On va montrer que, si l'ouvert D est de Stein et si $\operatorname{codh} F\geqq 2$, on a

$$\Gamma(D, F)\cong\Gamma(B, \underline{H}_b^1 F)$$

et

$$H^p(B, \underline{H}_b^1 F)=0 \quad \text{pour} \quad 1\leqq p\leqq \operatorname{codh} F-2 \quad \text{et} \quad p\geqq \dim F\ ,$$

(Proposition 2.3.3).

On remarque la relation suivante pour un faisceau cohérent tel que $\operatorname{codh} F\geqq 2$;

$$(j_-)_*(F|D)|B\cong\underline{H}_b^1 F|B\ ,$$

où $j_-: D\to X$ est l'inclusion canonique. Cette relation joue un rôle important dans ce travail.

Dans la section 3 on traitera propriété d'Hartogs de prolongement d'une classe de cohomologie d'un faisceau cohérent F. On montrera que l'homomorphisme

$$H^p(X-\bar{D}', F)\longrightarrow H^p(X-\bar{D}, F)\ , \quad \text{pour un} \quad D'\subset D\ ,$$

est surjectif pour $p\leqq \operatorname{codh} F-2$. Cette section est presque indépendant des autres.

Après la section 4 on supposera toujours (0.1). On montrera que la suite suivante est exacte;

$$0\longrightarrow \boldsymbol{C}_B\longrightarrow \underline{H}_b^1\Omega_X^0\longrightarrow \underline{H}_b^1\Omega_X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{H}_b^1\Omega_X^n\longrightarrow 0\ ,$$

où $n=\dim X$ et $\boldsymbol{C}_B$ est le faisceau constante sur B prolongé par 0 en dehors de B. D'où la première partie du Théorème 4.1.5 cité au dessus. Dans le cas où D est de Stein, on en déduit un isomorphisme

$$(*) \qquad H^p(D, \boldsymbol{C})\cong H^p(B, \boldsymbol{C})\ ,$$

pour $p\leqq \min_q \operatorname{codh} \Omega_X^q-2$. C'est aussi une preuve de la cohérence entre un domaine fortement pseudoconvexe et sa frontière.

La section 5 est consacrée pour une étude des variétés c.r. (cauchy-riemannienne); une variété différentiable M munie d'un sous-fibré vectoriel S du fibré tangent qui est linéairement disjoint du conjugué $\bar{S}$ et formellement intégrable. Le fibré tangent holomorphe sur la variété c.r. est défini d'après N. Tanaka [27] par

$$\hat{T}(M) = T^c(M)/\bar{S} .$$

Etant donné le fibré tangent holomorphe, on peut définir le type d'une forme différentielle. Une forme de type $(p, 0)$ φ est dite holomorphe si elle satisfait aux équations de Cauchy-Riemann;

$$\bar{X}\varphi = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \Gamma(\mathrm{S}) .$$

Ω^p_M est le fibré des p-formes holomorphes. Faisant des calculs différentiels on montre le lemme de Poincaré holomorphe, ce qui entraine la première partie du Théorème 5.3.2 ci-dessus.

Dans la section 6 on considére la variété B munie du fibré des vecteurs holomorphes (dans X) tangents à B comme une variété c.r.

B étant fortement pseudoconvexe, une p-forme holomorphe (au sens c.r.) dans un voisinage d'un point $x \in B$ se prolonge à une forme différentielle dans un voisinage U (dans X) de x de telle manière qu'elle soit holomorphe dans $U \cap D$, et le prolongement est unique (Bochner-Lewy), voir 6.2 pour une démonstration. On a donc un morphisme injectif

$$\varepsilon^{\cdot}: \Omega^{\cdot}_B \longrightarrow (j_-)_*(\Omega^{\cdot}_X | D) | B \cong \underline{H}^1_b \Omega^{\cdot} | B .$$

On trouve que ce morphisme est un quasi-isomorphisme. Le faisceau $\Omega^p_X(B)$ des p-formes holomorphes dans D qui sont lisses jusqu'à B est aussi défini par ce morphisme, et $\Omega^{\cdot}_X(B)$ et $(j_-)_*(\Omega^{\cdot}_X | D)$ sont quasi-isomorphes, d'où le Théorème 6.3.2.

Il me reste à remercier ici M. M. Noumi à qui est due l'idée de la démonstration de la Proposition 4.1.3. M. A. Fujiki m'a signalé une exemple où, sans l'hypothèse de contractibilité locale holomorphe de D, on perd l'isomorphisme $(*)$, à qui va également ma reconnaissance.

§1. Cohomologie locale.

Les résultats de cette section sont bien conus. Nous les exhibons pour les utilisations ultérieures.

1.1. Soit X un espace topologique. Nous travaillons dans la catégorie $\boldsymbol{Ab}(X)$ des faisceau abéliens, i.e., faisceaux de groupe abélien, sur X. Soit Z une partie localement fermée de X, on définit le foncteur $\underline{\Gamma}_Z$ comme suit: $\underline{\Gamma}_Z F$, $F \in \boldsymbol{Ab}(X)$, est le faisceau $U \rightsquigarrow \Gamma_{U \cap Z}(U, F|U) =:$ sous-groupe de $\Gamma(U, F|U)$ formé des sections à support contenu dans $U \cap Z$. On dénote par $\underline{H}^{\cdot}_Z F$ le foncteur dérivé en F du $\underline{\Gamma}_Z F$. L'image directe d'un faisceau F par une application continue $f: X \rightarrow Y$ est notée $f_* F$, ses foncteurs dérivés sont notés $R^{\cdot}f_*F$. Soient Z une partie localement fermée de X, Z' une partie fermée de Z et $Z''=Z-Z'$. On a la suite exacte;

$$(1.1.1)\qquad \begin{aligned} &0\longrightarrow \underline{\Gamma}_{Z'}F\longrightarrow \underline{\Gamma}_Z F\longrightarrow \underline{\Gamma}_{Z''}F\longrightarrow \underline{H}^1_{Z'}F\longrightarrow \\ &\cdots\longrightarrow \underline{H}^{p-1}_{Z''}F\longrightarrow \underline{H}^p_{Z'}F\longrightarrow \underline{H}^p_Z F\longrightarrow \underline{H}^p_{Z''}F\longrightarrow\cdots . \end{aligned}$$

Comme un corollaire on a, pour toute partie fermée Z, une suite exacte

$$(1.1.2)\qquad 0\longrightarrow \underline{\Gamma}_Z F\longrightarrow F\longrightarrow f_*(F|X-Z)\longrightarrow \underline{H}^1_Z F\longrightarrow 0 ,$$

et des isomorphismes canoniques;

$$\underline{H}^{p+1}_Z F\cong R^p f_*(F|X-Z) , \qquad p\geqq 1,$$

où $f\colon X-Z\to X$ est l'inclusion.

Ce qui nous intéresse est la situation suivante. Soient D un ouvert relativement compact de X et B sa frontière.

$$j_+\colon (\bar{D})^c\longrightarrow X , \qquad j_-\colon D\longrightarrow X \quad \text{et} \quad j\colon X-B\longrightarrow X$$

désignent les inclusions naturelles. On a, pour tout $F\in \boldsymbol{Ab}(X)$,

$$R^p j_*(F|X-B)\cong R^p(j_+)_*(F|\bar{D}^c)\oplus R^p(j_-)_*(F|D) .$$

On pose

$$\underline{H}^{\cdot}_b F=\underline{H}^{\cdot}_B F , \quad \text{et} \quad \underline{H}^{\cdot}_{in}F=\underline{H}^{\cdot}_{\bar{D}}F .$$

Les supports des faisceaux $\underline{H}^{\cdot}_b F$ et $H^{\cdot}_{in}F$ sont contenus dans B.

Les versions des (1.1.1), (1.1.2) pour les ensembles fermés B et $\bar{D}$ sont évidentes. On a en particulier les suites exactes suivantes:

$$(1.1.3)\qquad 0\longrightarrow \underline{\Gamma}_b F\longrightarrow F\longrightarrow j_*(F|X-B)\longrightarrow \underline{H}^1_b F\longrightarrow 0 ,$$

$$(1.1.3)'\qquad 0\longrightarrow \underline{\Gamma}_{in}F\longrightarrow F\longrightarrow (j_+)_*(F|X-\bar{D})\longrightarrow \underline{H}^1_{in}F\longrightarrow 0$$

$$(1.1.4)\qquad 0\longrightarrow \underline{\Gamma}_b F\longrightarrow \underline{\Gamma}_{in}F\longrightarrow (j_-)_*(F|D)\longrightarrow \underline{H}^1_b F\longrightarrow \underline{H}^1_{in}F\longrightarrow\cdots .$$

Ainsi que des isomorphismes

$$(1.1.5)\qquad \underline{H}^{p+1}_b F\cong R^p(j_+)_*(F|\bar{D}^c)\oplus R^p(j_-)_*(F|D)$$

pour $p\geqq 1$.

On définit $\Gamma_Z(X, F)$, Z étant localement fermée, comme le sousgroupe de $\Gamma(V, F)$ formé des sections à support dans Z, où V est un ouvert contenant Z tel que Z soit fermé dans V. (La définition ne dépend pas du choix de V.) $H^{\cdot}_Z(X, F)$ désignent les foncteurs dérivés en F de

$\Gamma_Z(X, F)$. On les appelle *cohomologies locaux à Z de F.*

Le *théorème d'excision* dit qu'il y a un isomorphisme

$$H_Z^p(V, F) \cong H_Z^p(X, F) \tag{1.1.6}$$

pour tout voisinage ouvert V de Z et tout faisceau abélien F.

1.2. Dans ce paragraphe on suppose que X soit paracompact. Soient $U \subset V$ des ouverts dans X. On désigne par $\Phi_V(U)$ l'ensemble des parties fermées de V contenues dans U. On pose, pour tout faisceau abélien G sur U,

$\Gamma_{\Phi_V(U)}(U, G) =$; sous-groupe de $\Gamma(U, G)$ formé des sections à support dans $\Phi_V(U)$.

Si U est un ouvert relativement compact ce n'est autre que le groupe $\Gamma_c(U, G)$ formé des sections à support compact dans U.

Soient Z une partie fermée de X et F un faisceau abélien sur X. Il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi_X(X-Z)}(X-Z, F) \longrightarrow \Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(Z, F) .$$

Si F est un faisceau mou, la suite reste exacte en mettant $\rightarrow 0$ à droite.

Soient F un faisceau abélien sur X et $F \rightarrow I^{\cdot}$ une résolution injective de F. X étant paracompact tout faisceau injectif est mou et la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi_X(X-Z)}(X-Z, I^{\cdot}) \longrightarrow \Gamma(X, I^{\cdot}) \longrightarrow \Gamma(Z, I^{\cdot}) \longrightarrow 0$$

est exacte, ce qui donne naissance à la suite exacte de cohomologie;

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Gamma_\Phi(X-Z, F) \longrightarrow \Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(Z, F) \\ &\longrightarrow H_\Phi^1(X-Z, F) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z, F) \longrightarrow \\ &H_\Phi^n(X-Z, F) \longrightarrow H^n(X, F) \longrightarrow H^n(Z, F) \longrightarrow \cdots . \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

où $\Phi = \Phi_X(X-Z)$.

Dans le cas où B est la frontière d'un ouvert relativement compact D on a

$$H^p_{\Phi_X(X-B)}(X-B, F) \cong H_c^p(D, F) \oplus H^p_{\Phi_X(X-\bar{D})}(X-\bar{D}, F) . \tag{1.2.2}$$

Soients Z une partie fermée de X, et i, j les inclusions de Z, respectivement de $X-Z$, dans X. Le foncteur $j_!$ est défini par

$$U \rightsquigarrow \Gamma(U, j_! G) = \Gamma_{\Phi_U(U-Z)}(U-Z, G) ,$$

G étant un faisceau abélien sur $X-Z$. On voit que la suite

$$0 \longrightarrow j_!(F|X-Z) \longrightarrow F \longrightarrow i_*(F|Z) \longrightarrow 0 \tag{1.2.3}$$

est exacte pour tout faisceau abélien sur X, de sorte qu'on ait

$$R^p j_!(F|X-Z)=0\ , \quad \text{pour tout} \quad p \geqq 1\ .$$

Dans le cas où $Z=B$ est la frontière d'une partie ouverte relativement compacte D, appliquant le (1.2.3) au faisceau $(j_-)_*(F|D)$ on a

$$0 \longrightarrow (j_-)_!(F|D) \longrightarrow (j_-)_*(F|D) \longrightarrow i_*((j_-)_*(F|D)|B) \longrightarrow 0\ . \tag{1.2.4}$$

1.3.a. Soient Z une partie fermée d'un espace topologique X et $i: Z \to X$ l'inclusion. On a

$$H^q(X, i_*G) \cong H^q(Z, G) \tag{1.3.1}$$

pour tout faisceau G sur Z et tout $q \geqq 0$.

b. Le *théorème de la suite spectrale de Lelay* s'énonce comme suit.

(1.3.2) *Soient $f: X \to Y$ une application continue et F un faisceau abélien sur X. Il existe une suite spectrale aboutissante à la cohomologie $H^{\cdot}(X, F)$, et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}=H^p(Y, R^q f_* F)\ .$$

On a, en particulier,

$$H^p(Y, f_* F) \cong H^p(X, F)\ , \qquad p \geqq 1\ ,$$

si $R^p f_* F=0$ pour tout $p \geqq 1$.

c. Soit $H_Z^p(X, F)$ la cohomologie locale à Z, c'est à dire, le p-éme foncteur dérivé du foncteur $F \rightsquigarrow \Gamma_Z(X, F)$.

(1.3.3) *Il existe une suite spectrale aboutissante à $H_Z^{\cdot}(X, F)$ dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}=H^p(X, \underline{H}_Z^q F)\ .$$

La version locale de la suite spectrale de Leray se dit comme suit;

(1.3.4) *Soient $f: X \to X'$ une application continue. Z' une partie fermée de X' et $Z=f^{-1}(Z')$. Soit F un faisceau abélien sur X. Il existe alors une suite spectrale aboutissante à*

$$H_Z^{\cdot}(X, F)\ ,$$

et dont le terme initial est donné par

$$E_2^{p,q}=H^p_{Z'}(X', R^qf_*F) .$$

Il en résulte que, si Y et Z sont fermées dans X et si F est un faisceau sur X à support dans Y, on a

$$H^p_{Z\cap Y}(Y, F|Y)\cong H^p_Z(X, F) \quad \text{pour tout} \quad p\geqq 1 .$$

d. Soient X un espace paracompact et Z une partie fermée de X. L'inclusion $X-Z\to X$ est désignée par j. Pour tout faisceau abélien F sur X, on a un isomorphisme

$$H^p(X, j_!(F|X-Z))\cong H^p_{\Phi_{X(X-Z)}}(X-Z, F) , \tag{1.3.5}$$

pour tout $p\geqq 0$.

En effet, si l'on tient compte d'une suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte (1.2.3) on voit immédiatement que

$$H^p(X, j_!(I|X-Z))=0$$

pour tout faisceau injectif I et tout $p\geqq 1$. Donc on a une suite spectrale aboutissante

$$E_2^{p,q}=H^p(X, R^qj_!(F|X-Z))\Longrightarrow H^{\cdot}_{\Phi_{X(X-Z)}}(X-Z, F) .$$

D'autre part $R^qj_!(F|X-Z)=0$ pour tout $q\geqq 1$, de sorte qu'on ait un isomorphisme

$$H^p(X, j_!(F|X-Z))\cong H^p{}_{X(X-Z)}(X-Z, F) .$$

En particulier, si Z est le complémentaire d'un ouvert relativement compact, on a

$$H^p_c(X-Z, F)\cong H^p(X, j_!(F|X-Z)) . \tag{1.3.6}$$

e. Soient X un espace topologique et Z une partie fermée. Soit j l'inclusion $X-Z\to X$. Envisageons la suite spectrale

$$E_2^{p,q}=H^p(X, R^qj_*(F|X-Z))\Longrightarrow H^{\cdot}(X-Z, F) .$$

On sait qu'il y a des 《edge-homomorphisms》

$$E_2^{n,0}=H^n(X, j_*(F|X-Z))\longrightarrow H^n(X-Z, F)$$

et

$$H^n(X-Z, F)\longrightarrow E_2^{0,n}=\Gamma(X, R^nj_*(F|X-Z)) .$$

Maintenant on suppose que $\underline{H}_Z^0 F=0$, et on envisage une autre suite spectrale

$$'E_2^{p,q}=H^p(X, \underline{H}_Z^q F)\Longrightarrow H_Z^{\cdot}(X, F) .$$

On a alors des «edge-homomorphisms»

$$'E_2^{n,1}=H^n(X, \underline{H}_Z^1 F)\longrightarrow H_Z^{n+1}(X, F) ,$$

et

$$H_Z^{n+1}(X, F)\longrightarrow 'E_2^{0,n+1}=\Gamma(X, \underline{H}_Z^{n+1}F) .$$

Or, il y a un morphisme canonique (1.1.2)

$$R^q j_*(F|X-Z)\longrightarrow \underline{H}_Z^{q+1}F ,$$

qui est bijectif pour $q\geqq 1$. On en déduit un morphisme entre les termes initiaux des deux suites spectrales

$$E_2^{p,q}\longrightarrow 'E_2^{p,q+1} ,$$

et puis, un morphisme entre les aboutissements:

$$H^n(X-Z, F)\longrightarrow H_Z^{n+1}(X, F) .$$

Enfin on a obtenu les diagrammes commutatifs;

(1.3.7)
$$\begin{array}{ccc} H^n(X-Z, F) & \longrightarrow & \Gamma(X, R^n j_*(F|X-Z)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_Z^{n+1}(X, F) & \longrightarrow & \Gamma(X, \underline{H}_Z^{n+1}F) , \end{array}$$

et

(1.3.8)
$$\begin{array}{ccc} H^n(X, j_*(F|X-Z)) & \longrightarrow & H^n(X-Z, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X, \underline{H}_Z^1 F) & \longrightarrow & H_Z^{n+1}(X, F) . \end{array}$$

En vertu d'une résolution injective de F, on vérifie immédiatement que ces morphismes viennent du «connecting homomorphism».

1.4. Soit B la frontière d'un ouvert relativement compact D. On suppose que, à chaque point de B, on puisse trouver un voisinage de ce point tel que le couple $(B\cap V, V)$ soit homéomorphe au couple $((B\cap V)\times \{0\}, (B\cap V)\times \boldsymbol{R}^1)$. Sous cette condition on peut calculer la cohomologie locale du faisceau constant;

$$\underline{H}^p_b C \cong H^p_{\{0\}}(\boldsymbol{R}^1, \boldsymbol{C}) = 0 \quad \text{pour} \quad p > 1\,, \qquad (1.4.1)$$
$$= C_B \quad \text{pour} \quad p = 1\,,$$

où C_B est le faisceau constant C sur B prolongé par zéro en dehors de B.

D'après (1.3.1), (1.3.3) et (1.4.1) on a un isomorphisme

$$H^{p+1}_B(X, \boldsymbol{C}) \cong H^p(B, \boldsymbol{C}) \quad \text{pour tout} \quad p\,. \qquad (1.4.2)$$

§2. Cohomologie locale au bord d'un ouvert pseudoconvexe.

2.1. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique réduit, $\mathcal{O}_X$ étant le faisceau structuel. $\mathfrak{m}_x$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Soient D un ouvert relativement compact de X et B sa frontière. On sait, d'après [3], que, quel que soit $x \in B$, il existe une fonction f, définie et indéfiniment différentiable dans un voisinage V de x, telle que l'on ait

$$D \cap V = \{y \in V;\, f(y) < f(x)\}\,.$$

Nous supposons désormais que D soit fortement pseudoconvexe. Ii existe un voisinage U de B et une fonction fortement pluri-sousharmonique φ sur U tels que

$$D \cap U = \{x \in U;\, \varphi(x) < 0\}\,.$$

On désigne par $k(x)$ la dimension de plongement au point x, c'est à dire, celle de l'espace tangent de Zariski au point x. Pour tout faisceau du $\mathcal{O}_X$-module cohérent F on a la relation

$$d(x) + \mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x = k(x)\,, \qquad (2.1.1)$$

où $d(x)$ est le plus petit entier tel qu'on ait une résolution de F de longueur $d(x)$ par des faisceaux libres dans un voisinage convenable de x. On pose

$$\mathrm{codh}\, F = \inf_{x \in X} \mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x\,,$$

et on l'appelle *codimension homologique de F*.

Andreotti-Grauert [1] ont montré les résultats suivants.

$$R^p(j_-)_*(F|D) = 0\,, \qquad p \geq 1\,, \qquad (2.1.2)$$

$$R^p(j_+)_*(F|X - \bar{D})_x = 0\,, \qquad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq \mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x - 2\,. \qquad (2.1.3)$$

(2.1.4) $(j_+)_*(F|X-\bar{D})_x \cong F_x$, si $\operatorname{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x \geqq 2$ au point $x \in B$.

La dérnière assertion n'est autre que la *propriété d'Hartogs*.

PROPOSITION 2.1.5. *Pour tout faisceau cohérent F sur X tel que* $\operatorname{codh} F \geqq 2$, *on a*

(2.1.5.1) $$\underline{\Gamma}_b F = 0 ,$$

(2.1.5.2) $$\underline{H}_b^p F = R^{p-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D}) \quad \textit{pour tout} \quad p \geqq 2 , \quad \textit{et}$$
$$(\underline{H}_b^p F)_x = 0 \quad \textit{pour} \quad 2 \leqq p \leqq \operatorname{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x - 1 ,$$

(2.1.5.3) $$\underline{H}_b^1 F \cong i_*((j_-)_*(F|D)|B) .$$

En effect, la deuxième égalité découle de (1.1.5), (2.1.2) et (2.1.3). D'après (2.1.4) et (1.1.3)′ on a $\underline{\Gamma}_{in} F|B = \underline{H}_{in}^1 F|B = 0$, d'où et d'après (1.1.4), $\underline{\Gamma}_b F = 0$ et $(j_-)_*(F|D)|B \cong \underline{H}_b^1 F|B$.

REMARQUE. Ci-dessus on a montré que $\underline{\Gamma}_{in} F$ est un faisceau qui induit F sur D et 0 dans $X-D$, donc par l'unicité de tel faisceau on a $\underline{\Gamma}_{in} F = (j_-)_!(F|D)$, pour F cohérent tel que $\operatorname{codh} F \geqq 2$. Comparer (1.1.4), (1.2.4) et (2.1.5.3).

LEMME 2.1.6. *Soient F un faisceau cohérent,* $\operatorname{codh} F \geqq 2$, *sur X et $F \to I^{\cdot}$ une résolution injective de F. Alors le complexe $i_*((j_-)_*(I^{\cdot}|D)|B)$ donne une résolution flasque de $\underline{H}_b^1 F$.*

DÈMONSTRATION. D'abord on note le fait suivant: la restriction à l'ouvert D d'un faisceau injectif I est un faisceau injectif (vu comme $(\mathcal{O}_X|D)$-module) et puis l'image directe $(j_-)_*(I|D)$ est aussi un faisceau injectif. B étant fermée, le faisceau $i_*((j_-)_*(I|D)|B)$ est un faisceau flasque. Soit $F \to I^{\cdot}$ une resolution injective de F. On a

$$h^q(j_-)_*(I^{\cdot}|D) = R^q(j_-)_*(F|D) = 0$$

pour $q \geqq 1$, d'après (2.1.2). Donc $(j_-)_*(I^{\cdot}|D)$ est une résolution injective du $(j_-)_*(F|D)$. Ensuite

$$i_*((j_-)_*(F|D)|B) \longrightarrow i_*((j_-)_*(I^{\cdot}|D)|B)$$

donne une résolution flasque. De là et d'après (2.1.5.3) on conclut le lemme.

PROPOSITION 2.1.7. *Soit $F \to I^{\cdot}$ une résolution injective du faisceau cohérent F. Pour toute famille du support Φ, on a*

$$H_\Phi^p(X, \underline{H}_b^1 F) \cong h^p \Gamma_\Phi(B, (j_-)_*(I^{\cdot}|D)) .$$

Ainsi que pour toute partie localement fermée Z de X,

$$H_Z^p(X, \underline{H}_b^1 F) \cong h^p \Gamma_{Z \cap B}(B, (j_-)_*(I^\cdot | D)) .$$

2.2. Appliquant des suites spectrales de 1.3, on tire quelques relations entre des cohomologies envisagées.

D'abord, comme une conséquence immédiate de (2.1.2), la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q(j_-)_*(F|D)) \Longrightarrow H^\cdot(D, F)$$

est dégénérée et on a

(2.2.1) $$H^\cdot(X, (j_-)_*(F|D)) \cong H^\cdot(D, F) .$$

Il résulte aussi de (2.1.3) que

(2.2.2) $$H^p(X, (j_+)_*(F|X-\bar{D})) \cong H^p(X-\bar{D}, F)$$

pour $p \leqq \operatorname{codh} F-2$, et qu'on a une suite exacte des «edge-homomorphisms»

(2.2.2)′ $$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^{m-1}(X, (j_+)_*(F|X-\bar{D})) \longrightarrow H^{m-1}(X-\bar{D}, F) \\ &\longrightarrow \Gamma(B, R^{m-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D})) \longrightarrow H^m(X, (j_+)_*(F|X-\bar{D})) , \end{aligned}$$

où $m = \operatorname{codh} F$.

On passe maintenant au faisceau $\underline{H}_b^\cdot F$. En vertu de (2.1.5), la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H}_b^q F) \Longrightarrow H_B^\cdot(X, F)$$

est dégénérée pour $q = 0, 2, \cdots, \operatorname{codh} F-1$. On a donc des isomorphismes

(2.2.3) $$H_B^p(X, F) \cong H^{p-1}(X, \underline{H}_b^1 F)$$

pour $1 \leqq p \leqq \operatorname{codh} F-1$, et une suite exacte

(2.2.3)′ $$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^{m-1}(B, \underline{H}_b^1 F) \longrightarrow H_B^m(X, F) \longrightarrow \Gamma(B, \underline{H}_b^m F) \\ &\longrightarrow H^m(B, \underline{H}_b^1 F) \longrightarrow H_B^{m+1}(X, F) , \end{aligned}$$

où $m = \operatorname{codh} F$.

On va envisager l'homomorphisme canonique entre les suites (2.2.2)′ et (2.2.3)′. Soit, pour tout q,

$$R^q(j_+)_*(F|X-\bar{D}) \longrightarrow \underline{H}_b^{q+1} F$$

l'homomorphisme obtenu par composer les deux homomorphismes

$$R^q(j_+)_*(F|X-\bar{D}) \longrightarrow R^q j_*(F|X-B) \longrightarrow \underline{H}_b^{q+1} F .$$

Le premier d'eux est l'injection canonique. D'après une discussion pareille au (1.3.8) on déduit un homomorphisme:

(2.2.4)
$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow H^{m-1}(X, (j_+)_*(F|X-\bar{D})) & \longrightarrow & H^{m-1}(X-\bar{D}, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow H^{m-1}(X, \underline{H}_b^1 F) & \longrightarrow & H_B^m(X, F) \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow \Gamma(B, R^{m-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D})) & \longrightarrow & H^m(X, (j_+)_*(F|X-\bar{D})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \longrightarrow \Gamma(B, \underline{H}_b^m F) & \longrightarrow & H^m(X, \underline{H}_b^1 F) \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \longrightarrow H^m(X-\bar{D}, F) \\ \downarrow \\ \longrightarrow H_B^{m+1}(X, F) \end{array} \quad .$$

Si $m = \operatorname{codh} F \geqq 2$ on a l'isomorphisme

$$\Gamma(B, R^{m-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D})) \xrightarrow{\cong} \Gamma(B, \underline{H}_b^m F) ,$$

mais pour les autres lignes verticaux ils ne sont en général pas bijectifs.

Rappelons le «connecting homomorphism»

$$\beta^p : H^p(X-\bar{D}, F) \longrightarrow \Gamma(B, R^p(j_+)_*(F|X-\bar{D}))$$

qui apparaît dans (2.2.2)'. Soient $x \in B$ et V un voisinage de x, alors on a l'homomorphisme de restriction

$$H^p(X-\bar{D}, F) \longrightarrow H^p(V-\bar{D}, F) ,$$

ce qui entraine un homomorphisme

$$H^p(X-\bar{D}, F) \longrightarrow R^p(j_+)_*(F|X-\bar{D})_x ,$$

car le faisceau $R^p(j_+)_*(F|X-\bar{D})$ n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau

$$V \rightsquigarrow H^p(V-\bar{D}, F) .$$

Ainsi on a décrit β^p.

On obtient la même déscription pour

$$\gamma^p : H_B^p(X, F) \longrightarrow \Gamma(B, \underline{H}_b^p F) .$$

2.3. Le but de ce paragraphe est le calcul de cohomologies $H^{\cdot}(B, \underline{H}_b^1 F)$.

Soit F un faisceau cohérent sur X tel que codh $F \geqq 2$. D'après (1.2.4) et (2.1.5.3), on a la suite exacte de faisceaux;

$$(2.3.1) \qquad 0 \longrightarrow (j_-)_!(F|D) \longrightarrow (j_-)_*(F|D) \longrightarrow \underline{H}_b^1 F \longrightarrow 0 .$$

Ce qui découle aussi de (1.1.4) et des faits que

$$\underline{\Gamma}_b F = 0 , \qquad \underline{\Gamma}_{in} F = (j_-)_!(F|D) \quad \text{et} \quad \underline{H}_{in}^1 F = 0 ,$$

voir la remarque après (2.1.5).

Considéront la suite exacte de cohomologies associée à (2.3.1):

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \Gamma(X, (j_-)_!(F|D)) \longrightarrow \Gamma(X, (j_-)_*(F|D)) \longrightarrow \\
&\Gamma(X, \underline{H}_b^1 F) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^p(X, (j_-)_!(F|D)) \longrightarrow H^p(X, (j_-)_*(F|D)) \\
&\longrightarrow H^p(X, \underline{H}_b^1 F) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}$$

D'après (1.3.6) et (2.3.1), on voit que la suite ci-dessus s'écrit selon

$$\begin{aligned}
(2.3.2) \qquad &0 \longrightarrow \Gamma_c(D, F) \longrightarrow \Gamma(D, F) \longrightarrow \Gamma(B, \underline{H}_b^1 F) \\
&\longrightarrow \cdots \longrightarrow H^{p-1}(B, \underline{H}_b^1 F) \longrightarrow H_c^p(D, F) \longrightarrow H^p(D, F) \\
&\longrightarrow H^p(B, \underline{H}_b^1 F) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.3.3. *Si D est de Stein et si* codh $F \geqq 2$, *on a*

$$\Gamma(D, F) \cong \Gamma(B, \underline{H}_b^1 F) ,$$

$$H_B^{p+1}(X, F) \cong H^p(B, \underline{H}_b^1 F) = 0 , \quad \textit{pour} \quad 1 \leqq p \leqq \operatorname{codh} F - 2 ,$$

et

$$H^p(B, \underline{H}_b^1 F) = 0 \quad \textit{pour} \quad p \geqq \dim F ,$$

où $\dim F = \sup_{x \in X} \dim_{\mathcal{O}_x} F_x = \sup_{x \in X} \sup_{p \in \operatorname{Ass} F_x} \dim \mathcal{O}_x/p$, Ass F_x *étant les idéaux premiers associés à* F_x.

En effet, D étant de Stein, on a

$$H^p(D, F) = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqq 1 ,$$

et

$$(2.3.4) \qquad H_c^p(D, F) = 0 , \quad \text{pour} \quad p < \operatorname{codh} F \quad \text{et} \quad p > \dim F ,$$

[25, 21]. Donc la proposition découle de la suite (2.3.2).

On dit qu'un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-module F est *de Cohen-Macaulay* si codh $F = \dim F$.

COROLLAIRE 2.3.5. *Si F est un faisceau de Cohen-Macaulay, on a*

$$H^p(B, \underline{H}_b^1 F)=0 \quad pour \quad p\neq 0,\ \dim F-1\ .$$

On a une version locale de la proposition sans l'hypothèse que D soit de Stein. D'abord on note le fait que;

(2.3.6) *chaque point $x\in B$ possède un voisinage de Stein V tel que*

$$H_\Phi^p(V\cap D, F)=0\ , \quad pour \quad p<\mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x \quad et \quad p>\dim F_x\ ,$$

où Φ est la famille des parties fermées contenues dans $\bar{V}\cap D$.

L'assertion (2.3.6) est démontrée dans [1] pour $p<\mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x$, et dans [21] pour $p>\dim F_x$.

Le même raisonnement que dans la Proposition 2.3.3 montre la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3.7. *Soit $x\in B$. Si $\mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x\geqq 2$, il existe un voisinage de Stein V de x tel que*

$$\Gamma(V\cap D, F)\cong\Gamma(V\cap B, \underline{H}_b^1 F)\ ,$$

$$H_{B\cap V}^{p+1}(V, F)\cong H^p(V\cap B, \underline{H}_b^1 F)=0\ , \quad pour \quad 1\leqq p\leqq \mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x-2\ ,$$

et

$$H^p(V\cap B, \underline{H}_b^1 F)=0 \quad pour \quad p\geqq \dim F_x\ .$$

Soit F un faisceau cohérent avec $\mathrm{codh}\, F\geqq 2$. Soit $\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert et fini de B tel que

$$H^p(U_i, \underline{H}_b^1 F)=0 \quad \text{pour} \quad 1\leqq p\leqq \mathrm{codh}\, F-2\ .$$

Un tel recouvrement existe d'après la proposition ci-dessus, et on peut le prendre aussi fin que l'on veut. Or, il existe une suite spectrale aboutissante au groupe gradué de cohomologie $H^\cdot(B, \underline{H}_b^1 F)$, dont le terme initial est

$$E_2^{p,q}=H^p(\mathscr{U}, \mathscr{H}^q(\underline{H}_b^1 F))\ ,$$

où $\mathscr{H}^q(G)$ désigne, pour un faisceau abélien G sur B, le préfaisceau sur B;

$$V\longrightarrow H^q(V, G)\ .$$

D'après l'hypothèse on a

$$E_2^{p,q}=0 \quad \text{pour} \quad 1\leqq q\leqq \mathrm{codh}\, F-2\ ,$$

donc on a montré

(2.3.8) $$H^p(\mathscr{U}, \underline{H}_b^1 F)\cong H^p(B, \underline{H}_b^1 F) \quad \text{pour} \quad p\leqq \mathrm{codh}\, F-2\ .$$

2.4.

LEMME 2.4.1. *Soient F un faisceau cohérent sur X et Z une partie fermée de X. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que*

$$H^p_{Z\cap V}(V, F)=0$$

pour tout $p>\dim_{\mathcal{O}_{X,x}} F_x$.

DÉMONSTRATION. Soit Y le support de F. Y est un sous-ensemble analytique de X de dimension $\dim_y Y=\dim_{\mathcal{O}_{X,x}} F_y$. On a, d'après (1.3.4),

$$H^p_{Z\cap Y\cap V}(Y\cap V, F)\cong H^p_{Z\cap V}(V, F)$$

pour tout ouvert V de X. Cela est ainsi, on peut supposer que $x \in Z\cap Y$, et que les ensemble Y et X définissent un même germe d'ensemble analytique au point x, donc que $\dim_{\mathcal{O}_{X,x}} F_x=\dim_x X$. Pour un voisinage de Stein du x, on a

$$H^{p+1}_{Z\cap V}(V, F)\cong H^p(V-Z, F) .$$

On sait d'après [21]

$$H^p(V-Z, F)=0$$

pour $p>\dim V$. D'autre part, d'après un théorème de Malgrange étendu par Siu [26] pour un espace analytique, il existe un voisinage ouvert U de x tel que, pour tout ouvert W dans U, on ait

$$H^n(W, F)=0 , \qquad n=\dim_x X .$$

De la sorte on peut trouver un voisinage V de x tel que

$$H^p_{Z\cap V}(V, F)=0 \quad \text{pour} \quad p>\dim_x X .$$

Soit x un point situé sur la frontière B. Grace au lemme ci-dessus on trouve un voisinage V de x tel que, pour tout faisceau cohérent F sur X, on ait

$$H^p_{B\cap V}(V, F)=0 , \quad \text{pour} \quad p>\dim F_x ,$$

de sorte que

$$(\underline{H}^p_b F)_x=0 \quad \text{pour} \quad p>\dim F_x .$$

En particulier, si F_x est un module de Cohen-Macaulay, on a

$$R^{p-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D})_x\cong(\underline{H}^p_b F)_x=0 , \quad \text{pour} \quad p\neq 1, \dim F_x .$$

Appliquant ce fait au faisceau de Cohen-Macaulay de $\dim F=n$, on voit que le diagramme (2.2.4) des suites exactes peut être prolongé plus à droite respectant l'exactitude:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longrightarrow H^p(B, R^{n-1}(j_+)_*F) & \longrightarrow & H^{p+n}(X, (j_+)_*F) & \longrightarrow \\ \downarrow\cong & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow H^p(B, \underline{H}_b^n F) & \longrightarrow & H^{p+n}(X, \underline{H}_b^1 F) & \longrightarrow \end{array} \tag{2.4.2}$$

$$\begin{array}{ccccc} H^{p+n}(X-\bar{D}, F) & \longrightarrow & H^{p+1}(B, R^{n-1}(j_+)_*F) & \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow\cong & \\ H_B^{p+n+1}(X, F) & \longrightarrow & H^{p+1}(B, \underline{H}_b^n F) & \longrightarrow \cdots . \end{array}$$

Notons que F n'est nécessaire d'être de Cohen-Macaulay que sur un voisinage de B.

PROPOSITION 2.4.3. *Soient D un ouvert de Stein relativement compact et B sa frontière. Soit F un faisceau cohérent sur X qui est de Cohen-Macaulay dans un voisinage de B. On a*

$$H_B^{p+n}(X, F)\cong H^p(B, \underline{H}_b^n F)\ , \qquad p\geqq 1\ ,$$

et une suite exacte;

$$0\longrightarrow H^{n-1}(B, \underline{H}_b^1 F)\longrightarrow H_B^n(X, F)\longrightarrow \Gamma(B, \underline{H}_b^n F)\longrightarrow 0\ ,$$

où $n=\dim F$.

La proposition découle de la Proposition 2.3.3 et de (2.4.2).

PROPOSITION 2.4.4. *Soit $x\in B$. Soit F un faisceau de Cohen-Macaulay dans un voisinage de x. Il existe alors un voisinage V de x tel que*

$$H^p(B\cap V, \underline{H}_b^n F)=0 \quad \textit{pour} \quad p\geqq 1\ ,$$

où $n=\dim F$.

DÉMONSTRATION. Soit V un voisinage de Stein de x tel que

$$H^p(V\cap B, \underline{H}_b^1 F)=0 \quad \text{pour} \quad p\geqq n\ , \quad \text{(Proposition 2.3.7)}\ .$$

Le même raisonnement que dans la Proposition 2.4.3 montre que

$$H_{B\cap V}^{p+n}(V, F)\cong H^p(B\cap V, \underline{H}_b^n F) \quad \text{pour} \quad p\geqq 1\ .$$

On a d'autre part d'après le Lemme 2.4.1

$$H_{B\cap V}^i(V, F)=0 \quad \text{pour} \quad i>n\ ,$$

donc

$$H^p(B\cap V, \underline{H}^n_b F)=0 \quad \text{pour} \quad p\geqq 1 .$$

COROLLAIRE.

$$H^p(B\cap V, R^{n-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D}))=0$$

pour $p\geqq 1$.

§3. Problème d'extension.

3.1. Soient X un espace topologique et D un ouvert relativement compact avec sa frontière B. Soit F un faisceau abélien sur X.

Les donnés d'un recouvrement ouvert $\mathscr{U}=\{U_i; 1\leqq i\leqq t\}$ de B et d'une suite décroissante d'ouverts D^j; $0\leqq j\leqq t$, sont appelés *système de p-Hartogs* s'ils satisfont aux conditions suivantes;

(i) $D=D^0\supset D^1\supset\cdots\supset D^t$, D^t est relativement compact dans D, et D^j-D^{j+1}, pour chaque j, est relativement compact dans U_{j+1},

(ii) $H^{p-1}(U_i\cap U_j-\bar{D}, F)=0$ pour tous i et j.

On a des suites exactes de Mayer-Viertoris:

$$\begin{aligned}(3.1.1)\qquad &\cdots\longrightarrow H^q(X-\bar{D}^j, F)\longrightarrow H^q(X-\bar{D}^{j-1}, F)\times H^q(U_j-\bar{D}^j, F)\\ &\longrightarrow H^q(U_j-\bar{D}^{j-1}, F)\longrightarrow H^{q+1}(X-\bar{D}^j, F)\longrightarrow\cdots ,\end{aligned}$$

pour $j=0, 1, 2, \cdots$.

LEMME 3.1.2. *Supposons qu'on soit donné un système de p-Hartogs pour un* $p\geqq 2$. *Soit* $u\in H^p(X-\bar{D}, F)$ *telle que, quel que soit* j, $1\leqq j\leqq t$, *la classe* u *restreinte à* $U_j-\bar{D}$ *soit la classe nulle de* $H^p(U_j-\bar{D}, F)$. *Alors* u *admet un prolongement au* $X-\bar{D}^t$;

$$u=v|X-\bar{D} \quad \textit{pour une} \quad v\in H^p(X-\bar{D}^t, F) .$$

DÉMONSTRATION. Comme $u|U_1-\bar{D}^0=0$, la classe nulle sur $U_1-\bar{D}^1$ a même restriction à $U_1-\bar{D}^0$ que u. De la suite (3.1.1) on tire qu'il existe $u_1\in H^p(X-\bar{D}^1, F)$ telle que $u_1|X-\bar{D}=u$ et que $u_1|U_1-\bar{D}^1=0$. Considérons la suite suivante de Mayer-Viertoris;

$$\begin{aligned}&H^{p-1}(U_1\cap U_2-\bar{D}, F)\longrightarrow H^p(U_2-\bar{D}^1, F)\\ &\qquad\xrightarrow[r]{} H^p(U_1\cap U_2-\bar{D}^1, F)\times H^p(U_2-\bar{D}, F) .\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii) r est injective. Puisque $u_1|U_1\cap U_2-\bar{D}^1=0$ et $u_1|U_2-\bar{D}=0$, on a $u_1|U_2-\bar{D}^1=0$.

On opère sur $X-\bar{D}^1$, U_2, $X-\bar{D}^2$ comme sur $X-\bar{D}^0$, U_1, $X-\bar{D}^1$ et on trouve $u_2 \in H^p(X-\bar{D}^2, F)$ telle que $u_2|X-\bar{D}^1=u_1$ et que $u_2|U_2-\bar{D}^2=0$. Ainsi de suite on construit une classe

$$v=u_t \in H^p(X-\bar{D}^t, F) \quad \text{telle que} \quad v|X-\bar{D}=u\ .$$

PROPOSITION 3.1.3. *Soit $p \geqq 2$ et on suppose qu'à chaque point $x \in B$ il existe un système fondamental de voisinages V de x tels que $H^{p-1}(V-\bar{D}, F)=0$. Soit $u \in H^p(X-\bar{D}, F)$. Pour que u soit la restriction d'une $u' \in H^p(X-\bar{D}', F)$ au $X-\bar{D}$, D' étant un ouvert relativement compact dans D, il est nécessaire et suffisant que $\beta^p u$ soit nulle dans $\Gamma(B, R^p(j_+)_*(F|X-\bar{D}))$, où l'application β^p est celle à la fin de 2.2.*

DÉMONSTRATION. Soit $\beta^p u=0$. Pour tout $x \in B$ on trouve un voisinage V de x tel que $\beta^p u$ donne naissance à la classe nulle de $H^p(V'-\bar{D}, F)$ pour tout ouvert $V' \subset V$. On recouvre B par une famille finie $\mathscr{V}$ de tels ouverts V, et on choit un système de p-Hartogs $(\mathscr{U}, \{D^j\})$ plus fin que $\mathscr{V}$, ce qui est possible d'après l'hypothèse. Cela faisant on conclut d'après le Lemme 3.1.2 que u se prolonge au $X-\bar{D}^t$.

Soit en revanche u obtenue en restreinant quelque $u' \in H^p(X-\bar{D}', F)$, où $D' \Subset D$. Soit $x \in B$, on prend un voisinage V de x assez petit que $\bar{V} \cap \bar{D}'=\emptyset$, donc $(X-\bar{D}) \cup V \subset X-\bar{D}'$. On a le diagramme commutatif;

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(X-\bar{D}', F) & \longrightarrow & H^p(V, F) & \longrightarrow & \varinjlim_{V \ni x} H^p(V, F)=0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^p(X-\bar{D}, F) & \longrightarrow & H^p(V-\bar{D}, F) & \longrightarrow & R^p(j_+)_*(F|X-\bar{D})_x\ .
\end{array}$$

D'où $(\beta^p u)_x=(\beta^p(u'|X-\bar{D}'))_x=0$.

REMARQUE: L'argument ci-dessus est valable non-seulement pour B mais aussi pour une partie de B, c'est à dire, on peut montrer que la donnée d'une u de $H^p(V-\bar{D}, F)$ pour un ouvert V, $V \cap B \neq \emptyset$, est la restriction d'une $u' \in H^p(V-\bar{D}', F)$, $D' \Subset D$, si et seulement si $\beta^p u=0$ sur $V \cap B$.

3.2. Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace analytique réduit et soit D un ouvert relativement compact dans X à frontière B fortement pseudoconvexe.

Soit F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_X$-module. D'après [1], quel que soit $x \in B$, il existe un système fondamental de voisinage de Stein de x tels que

(3.2.1.1) $\quad H^p(V-\bar{D}, F)=0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq \mathrm{prof}_{\mathfrak{m}_x} F_x-2\ ,$

et que, si $\operatorname{prof}_{m_x} F_x \geqq 2$, l'homomorphisme

$$\Gamma(V, F) \longrightarrow \Gamma(V-\bar{D}, F) \tag{3.2.1.2}$$

soit bijectif.

LEMME 3.2.2. *On peut choisir un recouvrement $\mathscr{U}=\{U_i; 1\leqq i\leqq t\}$ de B dans X, aussi fin qu'on veut, et une suite décroissante $\{D^j; 0\leqq j\leqq t\}$ d'ouverts relativement compacts et fortement pseudoconvexes tels que;*

(i) $D=D^0\supset D^1\supset\cdots\supset D^t$, $D^0\supset D^t$, $D^j-D^{j+1}\subset U_{j+1}$ *pour* $0\leqq j\leqq t-1$.

(ii) *pour tout faisceau cohérent F sur X et pour tout r, $1\leqq r\leqq$ codh $F-2$, on ait*

$$H^r(U_i-\bar{D}^j, F)=0\ , \qquad 1\leqq i\leqq t\ , \qquad 0\leqq j\leqq t\ ,$$

et, si codh $F\geqq 2$, *l'homomorphisme*

$$\Gamma(U_i, F)\longrightarrow\Gamma(U_i-\bar{D}^j, F)$$

soit bijectif.

La démonstration se fait avec le même raisonnement qu'aux lemmes dans n° 17 et n° 20 de [1].

De ce lemme et de la suite exacte (3.1.1) on déduit que, pour tout j, l'homomorphisme

$$H^p(X-\bar{D}^j, F)\longrightarrow H^p(X-\bar{D}^{j-1}, F)$$

est bijectif pour $2\leqq p\leqq \operatorname{codh} F-2$, et surjectif pour $p=1$. D'ailleurs, si codh $F\geqq 2$, l'homomorphisme

$$\Gamma(U_i, F)\longrightarrow\Gamma(U_i-\bar{D}^j, F)$$

est bijectif, en particulier, la suite

$$\begin{aligned}0\longrightarrow\Gamma(X-\bar{D}^j, F)\longrightarrow\Gamma(X-\bar{D}^{j-1}, F)\times\Gamma(U_i-\bar{D}^j, F)\\ \longrightarrow\Gamma(U_i-\bar{D}^{j-1}, F)\longrightarrow 0\end{aligned}$$

est exacte pour tout j. Il s'ensuit que l'homomorphisme

$$H^1(X-\bar{D}^j, F)\longrightarrow H^1(X-\bar{D}^{j-1}, F)$$

est injectif, donc bijectif.

De là on obtient le

THÉORÈME 3.2.3. *Il existe un ouvert D', $D'\subset D$, à frontière fertement pseudoconvexe tel qu'on ait un isomorphisme*

$$H^p(X-\bar{D}', F) \xrightarrow{\cong} H^p(X-\bar{D}, F)$$

pour $p \leqq \operatorname{codh} F-2$.

Sur l'ouvert fortement pseudoconvexe D on a une fonction continue $\varphi > 0$, fortement plurisousharmonique hors d'un compact K de D, telle que l'ensemble $\{\varphi > c\}$ soit relativement compact dans D pour tout $c > 0$. On pose $c_0 = \sup_K \varphi$, et $B_c = \{\varphi < c\}$.

THÉORÈME 3.2.4. *L'homomorphisme de restriction*

$$H^p(X-\bar{B}_{c_0}, F) \longrightarrow H^p(X-\bar{D}, F)$$

est surjectif pour tout $p \leqq \operatorname{codh} F-2$.

DÉMONSTRATION. Le théorème ci-dessus entraine l'existence d'un $c > c_0$ tel que

$$H^p(X-\bar{B}_c, F) \longrightarrow H^p(X-\bar{D}, F)$$

soit isomorphisme. Envisageon l'ensemble Λ des nombres $a \geqq c_0$ tels que

$$H^p(X-\bar{B}_a, F) \longrightarrow H^p(X-\bar{D}, F)$$

soit surjectif pour tout $p \leqq \operatorname{codh} F-2$. Pour montrer $c_0 \in \Lambda$ il suffit de vérifier les suivantes:

(i) si $a \in \Lambda$ et $c > b > a$ alors $b \in \Lambda$,

(ii) si $a_n \searrow a$ et $a_n \in \Lambda$ pour tout n, alors $a \in \Lambda$,

(iii) si $a \in \Lambda$, $a > c_0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tet que $a - \varepsilon \in \Lambda$.

(i) est évidente, (ii) découle du lemme dans $n°$ 18 de [1] et (iii) est une conséquence du théorème ci-dessus.

3.3. Soit D un ouvert relativement compact à frontière B fortement pseucoconvexe dans un espace analytique X. Soit F un faisceau cohérent sur X. On cherche maintenant des obstructions de prolonger la cohomologie $H^{m-1}(X-\bar{D}, F)$ pour $m = \operatorname{codh} F$.

Soit $\mathscr{A}$ la famille des ouverts relativement compact dans D à frontière fortement pseudoconvexe, étant ordonnée par l'inclusion. La famille des cohomologies

$$H^p(X-\bar{A}, F)\ ; \qquad A \in \mathscr{A}\ ,$$

si l'on définit le morphism par la restriction

$$H^p(X-\bar{A}, F) \longrightarrow H^p(X-\bar{A}', F)\ , \qquad A \subset A'\ ,$$

forme un système inductif. Désignons

$$H_0^p(X-\bar{D}, F)=\varinjlim_{\mathscr{A}} H^p(X-\bar{A}, F) .$$

On sait que $H_0^p(X-\bar{D}, F)\cong H^p(X-D, F)$. Désignons l'homomorphisme

$$\alpha^p: H_0^p(X-\bar{D}, F)\longrightarrow H^p(X-\bar{D}, F) .$$

THÉORÈME 3.3.1. *Il y a une suite exacte*

$$0\longrightarrow H_0^{m-1}(X-\bar{D}, F)\xrightarrow{\alpha^{m-1}} H^{m-1}(X-\bar{D}, F)$$
$$\xrightarrow{\beta^{m-1}} \Gamma(B, R^{m-1}(j_+)_*(F|X-\bar{D})) .$$

DÉMONSTRATION. On a déjà montré que $\ker \beta^{m-1}=\operatorname{Im}\alpha^{m-1}$ dans 3.1.3. Montrons que α^{m-1} est injectif. Soit $u\in H^{m-1}(X-\bar{A}, F)$ telle que $u|X-\bar{D}=0$. On recouvre B par une famille d'ouverts (U_i) du Lemme 3.2.2 de telle façon que $\bar{U}_i\cap \bar{A}=\varnothing$, $i=1, \cdots, t$, et que chaque U_i est un ouvert de Stein. Soit D^j, $0\leqq j\leqq t$, la suite décroissante d'ouverts du Lemme 3.2.2; $D^0=D$, $A\subset D^t\subset D^0$, $D^j-D^{j+1}\subset U_{j+1}$. Or on a la suite exacte

$$H^{m-2}(U_j-\bar{D}^{j-1}, F)\longrightarrow H^{m-1}((X-\bar{D}^{j-1})\cup U_j, F)$$
$$\longrightarrow H^{m-1}(X-\bar{D}^{j-1}, F)\times H^{m-1}(U_j, F) ,$$

donc on a des homomorphismes injectifs

$$H^{m-1}((X-\bar{D}^{j-1})\cup U_j, F)\longrightarrow H^{m-1}(X-\bar{D}^{j-1}, F)$$

pour tout j. Faisant $j=1$ on voit que $u|(X-\bar{D})\cup U_1=0$, donc $u|X-\bar{D}^1=0$. Ensuite, faisant $j=2$ on trouve $u|X-\bar{D}^2=0$. Ainsi de suite on a $u|X-\bar{D}^t=0$. D^t étant relativement compact dans D, on a montré l'injectivité de α^{m-1}.

COROLLAIRE 3.3.2. *Il y a un isomorphisme*

$$H^{m-1}(X, (j_+)_*(F|X-\bar{D}))\cong H^{m-1}(X-D, F) .$$

En effet, le corollaire est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus et de (2.2.2)'.

§4. Cohomologie de de Rham sur la frontière fortement pseudoconvexe.

4.1. Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace analytique réduit équidimensionnel, de dimension n. Soit D un ouvert relativement compact dans X avec la frontière fortement pseudoconvexe B.

On désigne par Ω_X^p, $p \geqq 0$, le faisceau des p-formes holomorphes avec la différentielle extérieure d. On a $\Omega_X^0 = \mathcal{O}_X$, et un complexe différentielle

$$\Omega_X^{\cdot} = (\Omega_X^p, d) .$$

On suppose qu'il y ait un voisinage de B, constitué par des points lisses de X, donc une variété complexe de dimension n, et que B soit une sous-variété (différentiable) de codimension 1 dans ce voisinage.

Sous l'hypothèse ci-dessus on a, d'après 1.4,

$$(4.1.1)\qquad \underline{H}_b^p \boldsymbol{C} \begin{cases} =0 , & p \neq 1 , \\ = \boldsymbol{C}_B , & p=1 , \end{cases} \quad \text{et} \quad R^p(j_-)_*(\boldsymbol{C}|D) \begin{cases} =0 , & p \neq 0 \\ = \boldsymbol{C}_{\bar{D}} , & p=0 , \end{cases}$$

où $\boldsymbol{C}_Z$, pour Z fermée, est le faisceau constant $\boldsymbol{C}$ sur Z prolongé par 0 hors de Z.

Par l'hypothèse faite ci-dessus tout faisceau Ω_X^p, $p \geqq 0$, est localement libre dans un voisinage de B, et on a, dans ce voisinage, la suite exacte;

$$(4.1.2)\qquad 0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^n \longrightarrow 0 .$$

Rappelons enfin que,

$$\underline{H}_b^p F = 0 ,$$

pour tout faisceau cohérent F qui est localement libre près de B et pour tout entier p sauf 1 et n.

LEMME 4.1.3. *La suite*

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{C}_{\bar{D}} \longrightarrow (j_-)_*(\Omega_X^0|D) \longrightarrow (j_-)_*(\Omega_X^1|D) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (j_-)_*(\Omega_X^n|D) \longrightarrow 0$$

est exacte dans un voisinage de B.

DÉMONSTRATION. On considère la suite spectrale associée à l'hypercohomologie de $(j_-)_*$ par rapport au complexe $(\Omega_X^{\cdot})$;

$$E_2^{p,q} = h^p(R^q(j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D)) \Longrightarrow \boldsymbol{R}^{\cdot}(j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D) .$$

D'abord on note que, le complexe de faisceaux $(\Omega_X^{\cdot})$ étant quasi-isomorphe au complexe

$$(\boldsymbol{C}); 0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

dans un voisinage de B (4.1.2), on a

$$\boldsymbol{R}^{\cdot}(j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D) \cong \boldsymbol{R}^{\cdot}(j_-)_*(\boldsymbol{C}|D) .$$

Cette suite spectrale est dégénérée;

$$E_2^{p,q}=0 \quad \text{pour} \quad q\neq 0 \quad (2.1.2) .$$

On a donc

$$h^p((j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}\,|\,D))\cong R^p(j_-)_*(C\,|\,D) .$$

D'où et d'après (4.1.1) découle le lemme.

PROPOSITION 4.1.4. *Les suites suivantes sont exactes:*

$$0\longrightarrow C_B\longrightarrow \underline{H}_b^1\Omega_X^0\longrightarrow \underline{H}_b^1\Omega_X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{H}_b^1\Omega_X^n\longrightarrow 0 ,$$

$$0\longrightarrow \underline{H}_b^n\Omega_X^0\longrightarrow \underline{H}_b^n\Omega_X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{H}_b^n\Omega_X^n\longrightarrow 0 .$$

DÉMONSTRATION. On considère la suite spectrale associée à l'hypercohomologie de $\underline{\Gamma}_b$ par rapport au complexe $(\Omega_X^{\cdot})$;

$$E_2^{p,q}=h^p(\underline{H}_b^q\Omega_X^{\cdot})\Longrightarrow R^{\cdot}\underline{\Gamma}_b\Omega_X^{\cdot} .$$

D'après (4.1.2) on a

$$R^{\cdot}\underline{\Gamma}_b\Omega_X^{\cdot}\cong \underline{H}_b^{\cdot}C .$$

D'une part cette suite spectrale est dégénérée;

$$E_2^{p,q}=0 \quad \text{pour} \quad q\neq 1,\, n .$$

D'autre part on a

$$\underline{H}_b^iC=C_B \quad \text{pour} \quad i=1 , \quad \text{et } 0 \text{ pour} \quad i\neq 1 .$$

Donc on a

$$h^p(\underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot})=0 \quad \text{pour} \quad 1\leq p\leq n-1 ,$$

$$h^n(\underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot})\cong h^0(\underline{H}_b^n\Omega_X^{\cdot}) ,$$

et

$$h^{p+n}(\underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot})\cong h^p(\underline{H}_b^n\Omega_X^{\cdot})=0 \quad \text{pour} \quad p\geq 1 .$$

Il reste à vérifier

$$h^n(\underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot})=0 .$$

On a vu que, pour tout faisceau cohérent F, l'homomorphisme

$$(j_-)_*(F\,|\,D)\longrightarrow \underline{H}_b^1F$$

est surjectif, (2.3.1). On a donc le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd} (j_-)_*(\Omega_X^{n-1} | D) \arrow[r] \arrow[d, "(j_-)_*d"'] & \underline{H}_b^1 \Omega_X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{H}_b^1 d"] & 0 \\ (j_-)_*(\Omega_X^n | D) \arrow[r] & \underline{H}_b^1 \Omega_X^n \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

$(j_-)_*d$ étant surjective d'après le Lemme 4.1.3, l'homomorphisme

$$\underline{H}_b^1 d ;\ \underline{H}_b^1 \Omega_X^{n-1} \longrightarrow \underline{H}_b^1 \Omega_X^n$$

est surjectif, d'où $h^n(\underline{H}_b^1 \Omega_X^{\cdot})=0$.

On pose

$$m = \min_p \inf_V \operatorname{prof}_{m_x} \Omega_{X,x}^p , \quad V \text{ étant un voisinage de } \bar{D} .$$

THÉORÈME 4.1.5. *Sous l'hypothèse enoncée au debut, on a un isomorphisme*

$$H^{\cdot}(B, C) \cong \boldsymbol{H}^{\cdot}(B, \underline{H}_b^1 \Omega_X^{\cdot}) .$$

Si, en outre, D est un ouvert de Stein, on a, pour $p \leqq m-2$,

$$H^p(B, C) \cong h^p \Gamma(B, \underline{H}_b^1 \Omega_X^{\cdot}) .$$

La démonstration du théorème suit les Propositions 4.1.4 et 2.3.3.

THÉORÈME 4.1.6. *Supposons que D soit de Stein. On a*

$$h^p \Gamma(D, \Omega_X^{\cdot}) \cong H^p(B, C) , \quad \text{pour} \quad p \leqq m-2 .$$

Si, en outre, chaque point de D a un voisinage holomorphiquement contractible à ce point (condition de Reiffen [22]*), on a*

$$H^p(D, C) \cong H^p(B, C) , \quad \text{pour} \quad p \leqq m-2 .$$

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 2.3.1 on a un isomorphisme

$$\Gamma(D, \Omega_X^{\cdot}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(B, \underline{H}_b^1 \Omega_X^{\cdot}) ,$$

si $m \geqq 2$, que l'on peut supposer. Le morphisme $F \to \underline{H}_b^1 F$ étant fonctoriel, on voit que le diagramme suivant est commutatif;

$$\begin{tikzcd} \Gamma(D, \Omega_X^p) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "d"] & \Gamma(B, \underline{H}_b^1 \Omega_X^p) \arrow[d, "\underline{H}_b^1 d"] \\ \Gamma(D, \Omega_X^{p+1}) \arrow[r, "\cong"] & \Gamma(B, \underline{H}_b^1 \Omega_X^{p+1}) . \end{tikzcd}$$

D'où un isomorphisme

$$h^p\Gamma(D, \Omega_X^{\cdot}) \longrightarrow h^p\Gamma(B, \underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot}) .$$

La première partie est montrée par le théorème ci-dessus. Si D est de Stein et satisfait à la condition de Reiffen on a

$$H^p(D, C) \cong h^p\Gamma(D, \Omega_X^{\cdot}) \quad \text{pour tout} \quad p .$$

D'où la deuxième assertion.

§5. Cohomologies de de Rham sur des variétés c.r.

Soit $(V, \mathcal{O}_V)$ une variété analytique complexe de dimension n. Soit B une sous-variété différentiable à codimension 1 dans la variété différentiable réele sous-jacente à V. Alors la variété B admet une structure dite partiellement complexe;

$$\mathrm{S}(B) = \mathrm{T}^{1,0}(V) \cap \mathrm{T}^c(B) ,$$

où $\mathrm{T}^{1,0}(V)$ est le fibré tangent holomorphe de V et $\mathrm{T}^c(B)$ est le complexifié du fibré tangent $\mathrm{T}(B)$ de B. Sur une variété munie d'une structure partiellement complexe on peut espérer faire l'analyse des objects (partiellement) holomorphes. On montrera, en effet, le lemme de Poincaré holomorphe et, appliquant des résultats bien conus de M. M. Kohn, Andreotti, Hill, Naruki et Tanaka [2, 7, 19, 27], on fait dans la section suivante un calcul de la cohomologie $H^p(B, C)$ par la cohomologie de de Rham des formes holomorphes sur B.

5.1. Soient M une variété différentiable et $\mathrm{T}(M)$ le fibré tangent de M. On appelle *structure partiellement complexe* sur M la donnée d'un sous-fibré vectoriel complexe S de $\mathrm{T}^c(M)$, le complexifié de $\mathrm{T}(M)$, satisfaisant aux conditions suivantes:

(PC. 1) $\mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{S}} = 0$, où $\overline{\mathrm{S}}$ est la conjugée de S,

(PC. 2) S est *formellement intégrable*; autrement dit si X_1, X_2 sont deux sections de S, le crochet $[X_1, X_2]$ est encore une section de S.

Une variété différentiable munie d'une structure partiellement complexe s'appelle *variété c.r.* (*cauchy-riemanniene*).

Soient (M, S) et (M', S') deux variétés c.r. et soit $f: M \to M'$ une application différentiable. On dit que f est un *morphisme c.r.* si l' homomorphisme (de fibrés vectoriels)

$$df \otimes 1_C : \mathrm{T}^c(M) \longrightarrow \mathrm{T}^c(M')$$

se restreint au homomorphisme de S dans S';

$$df \otimes 1_C(\mathrm{S}) \subset \mathrm{S}' .$$

Une variété complexe V est une variété c.r. si l'on pose

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}^{1,0}(V); \text{ fibré tangent holomorphe de } V .$$

Sur la ligne droite $\boldsymbol{R}^1$ il n'y a qu'une structure partiellement complexe $\mathrm{S}=0$. On voit $\boldsymbol{R}^1 = (\boldsymbol{R}^1, 0)$ comme une variété c.r.

L'*image réciproque* d'une variété c.r. par une application différentiable existe toujours. En particulier, soit B une sous-variété différentiable d'une variété complexe V et $i\colon B \to V$ l'inclusion, alors

$$i^*(V, \mathrm{T}^{1,0}(V)) = (B, \mathrm{T}^{1,0}(V) \cap \mathrm{T}^C(B))$$

est une variété c.r.

On peut former le *produit* des deux variétés c.r.; il y a une structure partiellement complexe sur le produit (dans la catégorie des variétés différentiables) des deux variétés c.r. telle que les projections canoniques sont des morphismes c.r.

Le fibré tangent holomorphe d'une variété c.r. (M, S) est défini comme le fibré quotient

$$\hat{\mathrm{T}}(M) = \mathrm{T}^C(M)/\bar{\mathrm{S}} \ , \quad [27] .$$

Une forme différentielle φ sur un ouvert U de M est dite *de type* (p, q) si, pour tout $x \in U$, on a

$$\varphi_x(X_1, X_2, \cdots, X_{p+q}) = 0$$

dès que $p+1$ des vecteurs X_i appartiennent à $\hat{\mathrm{T}}_x(M)$ ou que $q+1$ des vecteurs X_i appartiennent à $\bar{\mathrm{S}}_x$.

On note par $\boldsymbol{E}^{p,q}(M)$ le fibré vectoriel des formes différentielles de type (p, q). $\boldsymbol{E}^{p+q}(M)$ est un sous-fibré vectoriel du $\boldsymbol{E}^{p+q}(M)$; fibré vectoriel des formes différentielles de degré $p+q$.

La différentielle extérieure d'une forme différentielle ω est notée $d\omega$. Pour une forme différentielle de type (p, q) ω sur un ouvert, $d'\omega$ (resp. $d''\omega$ et $\beta\omega$) se désigne la composante de type $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$ et $(p+2, q-1)$) de la différentielle extérieure $d\omega$, les autres composantes de $d\omega$ sont nulles.

On a

$$d'\omega(X_0, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q)$$
$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j X_j(\omega(X_0, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, Y_q))$$
$$+ \sum_{0\leq i<j\leq p} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, Y_q)$$
$$+ \sum_{\substack{0\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{i+j}\omega(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_p, [X_i, Y_j], \cdots, \hat{Y}_j, \cdots, Y_q)\ ,$$

$$d''\omega(X_1, \cdots, X_p, Y_0, \cdots, Y_q)$$
$$=(-1)^p \sum_{j=0}^{q} (-1)^j Y_j(\omega(X_1, \cdots, \hat{Y}_j, \cdots, Y_q))$$
$$+ \sum_{0\leq i<j\leq q} (-1)^{i+j}\omega(X_1, \cdots, X_p, [Y_i, Y_j], \cdots, \hat{Y}_i, \cdots, \hat{Y}_j, \cdots, Y_q)$$
$$+ \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 0\leq j\leq q}} (-1)^{i+j}\omega([X_i, Y_j], \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{Y}_j, \cdots, Y_q)$$

$$\beta\omega(X_1, \cdots, X_{p+2}, Y_1, \cdots, Y_{q-1})$$
$$= \sum_{1\leq i<j\leq p+2} (-1)^{i+j+p}\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{p+2}, [X_i, X_j], Y_1, \cdots, Y_{q-1})\ ,$$

où les X_i sont des sections de $\hat{\mathrm{T}}(M)$ et les Y_j sont celles de $\bar{\mathrm{S}}$.

Par définition on a $d=d'+d''+\beta$. Pour la variété c.r. $\boldsymbol{R}^1$ on a $d=d'$.

Soient M, M' deux variétés c.r. et f: $M\rightarrow M'$ une application différentiable. Pour que f soit un morphisme c.r. il faut et il suffit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E^{p,q}(M) & \xleftarrow{f^*} & E^{p,q}(M') \\ \downarrow{\scriptstyle d''} & & \downarrow{\scriptstyle d''} \\ E^{p,q+1}(M) & \xleftarrow{f^*} & E^{p,q+1}(M') \end{array}$$

soit commutatif pour tous p et q.

Une forme différentielle ω de type $(p, 0)$ s'appelle *p-forme holomorphe* si $d''\omega=0$.

5.2. Soit (M, S) une variété c.r. On fait l'identification de $\mathrm{T}^c(M)$ et $\hat{\mathrm{T}}(M)\oplus\bar{\mathrm{S}}$.

Le produit intérieure d'un champ de vecteur X est noté $i(X)$, et la transformation infinitésimale (la dérivée de Lie) est notée $\theta(X)$, [5]. On a alors

$$\theta(X)=di(X)+i(X)d\ ,$$

et, pour une forme différentielle φ de degré n,

$$(\theta(X)\varphi)(X_1, \cdots, X_n) = X(\varphi(X_1, \cdots, X_n)) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(X_1, \cdots, [X, X_j], \cdots, X_n) .$$

Soit ω une forme différentielle de type (p, q) sur un ouvert U et X un champ de vecteur sur U. On a les formules suivantes si l'on envisage les composantes de l'égalité ci-dessus:

(5.2.1) *Si X est un champ de vecteur holomorphe; $X \in \Gamma(U, \hat{\mathrm{T}}(M))$, on a*

$$(\theta(X)\omega)_{(p,q)} = d'i(X)\omega + i(X)d'\omega ,$$

$$(\theta(X)\omega)_{(p-1,q+1)} = d''i(X)\omega + i(X)d''\omega ,$$

$$(\theta(X)\omega)_{(p+1,q-1)} = \beta i(X)\omega + i(X)\beta\omega ,$$

les autres composantes sont nulles.

(5.2.2) *Si $X \in \Gamma(U, \bar{\mathrm{S}})$, on a*

$$(\theta(X)\omega)_{(p,q)} = d''i(X)\omega + i(X)d''\omega ,$$

$$(\theta(X)\omega)_{(p+1,q-1)} = d'i(X)\omega + i(X)d'\omega ,$$

les autres composantes sont nulles.

Soient M_1, M_2 deux variétés différentiables. L'application $j_y\colon M_1 \to M_1 \times M_2$, pour $y \in M_2$ fixé, désigne l'injection canonique

$$j_y(x) = (x, y) .$$

Ainsi que

$$j_x\colon M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2 , \qquad j_x(y) = (x, y) ,$$

pour $x \in M_1$. Soit X un champ de vecteur sur M_2. On verra X comme un champ de vecteur $\tilde{X}$ sur $M_1 \times M_2$ par $(dj_x)_{x \in M_1}$;

$$\tilde{X}_{(x,y)} = (dj_x)(X_y) ,$$

et on emploi l'abréviation $\tilde{X} = X$. Soient φ une forme différentielle de rang n sur $M_1 \times M_2$ et X un champ de vecteur sur M_2. On peut facilement verifier que,

(5.2.3) $$(j_y^*\theta(X)\varphi)(x; X_1, \cdots, X_n) = X(\varphi((x, y); dj_yX_1, \cdots, dj_yX_n)) ,$$

pour $(x, y) \in M_1 \times M_2$ et les champs de vecteurs X_i sur M_1.

Soient maintenant M_1 et M_2 deux variétés c.r. Soient

$$d=d'+d''+\beta$$

la différentielle extérieure et ses composantes sur la variété c.r. M_1 (5.1), ainsi que

$$d_{M_1\times M_2}=d'_{M_1\times M_2}+d''_{M_1\times M_2}+\beta_{M_1\times M_2} ,$$

sur la variété c.r. $M_1\times M_2$.

Pour $y\in M_2$, l'application $j_y\colon M_1\to M_1\times M_2$ est évidemment un morphisme c.r., ainsi que $j_x\colon M_2\to M_1\times M_2$, pour $x\in M_1$. De sorte que le type d'une forme différentielle est conservé par j_y^*:

$$j_y^*\colon E^{p,q}(M_1\times M_2)\longrightarrow E^{p,q}(M_1) ,$$

et on a

$$j_y^* d'_{M_1\times M_2}=d' j_y^* , \quad \text{etc. .}$$

Pour un champ de vecteur X sur M_2 et une forme différentielle de type (p, q) φ sur $M_1\times M_2$, la formule (5.2.3) entraine que

$$j_y^*\theta(X)\varphi\in E^{p,q}(M_1) .$$

D'où et d'après (5.2.1) on a le

Lemme 5.2.4. *Soit X un champ de vecteur holomorphe sur M_2. On a, pour toute $\varphi\in E^{p,q}(M_1\times M_2)$,*

$$X(j_y^*\varphi)=d' j_y^* i(X)\varphi+j_y^* i(X) d'_{M_1\times M_2}\varphi ,$$

et

$$0=d'' j_y^* i(X)\varphi+j_y^* i(X) d''_{M_1\times M_2}\varphi .$$

5.3. Soit M une variété c.r. On désigne par $\Omega^p(M)$ le fibré des p-formes holomorphes;

$$\Omega^p(M)=\{\omega\in E^{p,0}(M);\, d''\omega=0\} .$$

$(\Omega^{\cdot}(M), d)$ donne un complexe différentiel. Le lemme de Poincaré holomorphe se dit comme suit.

Lemme 5.3.1. *Le complexe différentiel $(\Omega^{\cdot}(M), d)$ est homotopiquement trivial.*

Démonstration. Le problème étant local on considère sur une carte locale (U, u) telle que l'ouvert $u(U)\subset \boldsymbol{R}^m$, $m=\dim_R M$, soit un voisinage convexe de l'origine O. On pose $x_0=u^{-1}(O)$. On définit l'application différentiable

$$h: \boldsymbol{I}\times U \longrightarrow U\ , \qquad \boldsymbol{I}=(-\varepsilon, \varepsilon)\ ,$$

par

$$h(t, x)=u^{-1}(tx^1, \cdots, tx^m)\ , \quad \text{si} \quad u(x)=(x^1, \cdots, x^m)\ .$$

Il est facile à vérifier que h est un morphisme c.r. de $\boldsymbol{I}\times U$ dans U;

$$dh(\{0\}\times \mathrm{S})\subset \mathrm{S}\ ,$$

et que

$$(h\cdot j_0)(x)=h(0, x)=x_0\ ,$$

$$(h\cdot j_1)(x)=h(1, x)=x\ ,$$

où j_t: $U\rightarrow \boldsymbol{I}\times U$; $j_t(x)=(t, x)$, $-\varepsilon<t<\varepsilon$.

Comme $d_R=d'_R$, on a

$$d'_{R\times M}=d'_R+d'\ ,$$

$$d''_{R\times M}=d''\ ,$$

avec une convention évidente. On a donc

$$d'_{R\times M}h^*=h^*d' \quad \text{et} \quad d''_{R\times M}h^*=h^*d''\ .$$

On définit l'opérateur d'homotopie comme suit. On pose, pour une forme différentielle de type $(p, 0)$ ω sur U,

$$K\omega=\int_0^1 j_t^*i\Big(\frac{d}{dt}\Big)h^*\omega dt\ .$$

$K\omega$ est une forme differentielle de type $(p-1, 0)$ sur U. D'après le Lemme 5.2.4 on a

$$\begin{aligned} d'K\omega+Kd'\omega&=\int_0^1 \frac{d}{dt}(j_t^*h^*\omega)dt \\ &=(h\cdot j_1)^*\omega-(h\cdot j_0)^*\omega=\omega\ , \end{aligned}$$

et

$$d''K\omega+Kd''\omega=0\ .$$

En particulier si ω est une p-forme holomorphe, $K\omega$ est une $(p-1)$-forme holomorphe.

THÉORÈME 5.3.2.

$$H^{\cdot}(M, C) \cong H^{\cdot}(M, \Omega^{\cdot}_M),$$

où $\Omega^{\cdot}_M$ est le complexe de faisceaux associés au fibré $\Omega^{\cdot}(M)$.

§6. Cohomologie du complexe des formes holomorphes qui sont lisses jusqu'au bord.

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique réduit équidimensionnel de dimension n, et D un ouvert relativement compact dans X dont la frontière B est une sous-variété différentiable de codimension 1 dans la partie régulière de X. Il existe en particulier un voisinage ouvert V de B qui est une variété complexe de dimension n.

6.1. La frontière B de D est une variété c.r. munie de la structure partiellement complexe

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}^{1,0}(V) \cap \mathrm{T}^{c}(B).$$

Soient $\mathscr{E}^{p,q}_B$ le faisceau associé au fibré vectoriel $E^{p,q}(B)$ des formes différentielles de type (p, q) sur la variété c.r. B, et Ω^p_B le faisceau associé au fibré $\Omega^p(B)$ des p-formes holomorphes.

(6.1.1) [2] *Si B est fortement pseudoconvexe, le complexe de Dolbeault*

$$0 \longrightarrow \Omega^p_B \longrightarrow \mathscr{E}^{p,0}_B \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{p,1}_B \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{p,n-1}_B$$

est exact.

$\mathscr{E}^{p,q}_B$ étant un faisceau fin, il découle de (6.1.1) la proposition suivante.

PROPOSITION 6.1.2. *Si B est fortement pseudoconvexe on a*

$$H^q(B, \Omega^p_B) \cong h^q\Gamma(B, \mathscr{E}^{p,\cdot}_B), \quad pour \quad q \leq n-2.$$

D'après [2, 7, 27] on sait que
(6.1.3) *si D est une variété de Stein, on a*

$$h^q\Gamma(B, \mathscr{E}^{p,\cdot}_B) = 0 \quad pour \quad q \neq 0, \quad n-1.$$

D'où l'analogie du théorème B de Cartan sur la frontière:

PROPOSITION 6.1.4. *Si D est une variété de Stein,*

$$H^q(B, \Omega_B^p)=0 \quad pour \quad 1 \leqq q \leqq n-2 \, .$$

Le Théorème 5.3.2 et la Proposition 6.1.4 entrainent le

THÉORÈME 6.1.5. *Si D est une variété de Stein,*

$$H^q(B, C) \cong h^q \Gamma(B, \Omega_B^{\cdot})$$

pour $q \leqq n-2$.

6.2. Le problème du prolongement d'une fonction définie et holomorphe sur le bord d'un domaine U à une fonction holomorphe dans U est conu au nom de Bochner et Lewy. La version globale est résolue dans [2] pour U $(n-1)$-convexe, et la version locale pour U 1-convexe a été obtenue dans [17]. Ici on montrera la version locale pour U $(n-1)$-convexe.

LEMME 6.2.1. *Soient V une variété complexe de dimension n et B une sous-variété différentiable à codimension réele* 1. *On suppose qu'il existe une fonction différentiable Φ dans un voisinage W d'un point $x_0 \in B$, telle que*

$$B \cap W = \{x \in W; \Phi(x) = \Phi(x_0)\} \, ,$$

et que la forme de Lévi de Φ restreinte au $\mathrm{T}^{1,0}(V)_{x_0} \cap \mathrm{T}^C(B)_{x_0}$ ait au moins une valeur propre strictement positive. Alors il existe un voisinage U de x_0 tel que toute p-forme holomorphe sur $B \cap U$ (au sens de c.r.) *admet un prolongement unique à une forme différentielle de type* $(p, 0)$ *dans $U_- = \{x \in U; \Phi(x) \leqq \Phi(x_0)\}$ qui est holomorphe dans $\mathring{U}_- = \{x \in U; \Phi(x) < \Phi(x_0)\}$.*

DÉMONSTRATION. D'après notre hypothèse sur la frontiére $W \cap B$, on voit qu'il existe un voisinage de Stein U tel qu'on ait

$$\Gamma(U, \Omega_V^p) \cong \Gamma(U - U_-, \Omega_V^p) \, , \quad [1] \, .$$

Soit $\omega \in \Gamma(U \cap B, \Omega_B^p)$. Il existe une forme différentielle de type $(p, 0)$ φ dans U qui prolonge ω telle que $\bar{\partial}\varphi$ s'annule sur $B \cap U$ à l'ordre infinie (Lemme 2.2 dans [2]). On pose

$$v = \begin{cases} \bar{\partial}\varphi & \text{dans } U_- \\ 0 & \text{dans } U - U_- \, . \end{cases}$$

On a $\bar{\partial}v = 0$, et, U étant de Stein, il existe une $\psi'' \in \Gamma(U, \mathscr{E}^{p,0}(V))$ telle que $v = \bar{\partial}\psi''$, de sorte que ψ'' restreinte au $U - U_-$ est holomorphe. Soit ψ' la p-forme holomorphe dans U qui prolonge $\psi'' | U - U_-$. On pose

$\psi=\psi''-\psi'$. On a alors

$$\bar{\partial}\psi=\bar{\partial}\psi''=v\ ,$$

et le support de ψ est contenu dans U_-. D'où on trouve que la forme différentielle de type $(p, 0)$ $\varphi-\psi|U_-$ donne le prolongement de ω dans U_- et que sa restriction au $\mathring{U}_-$ est holomorphe. L'unicité du prolongement est facile à montrer.

Soient X, D et B comme au début de cette section.

$$i\colon B\longrightarrow X\ ,\quad \text{et}\quad j_-\colon D\longrightarrow X$$

désignent les inclusions canoniques. Le Lemme 6.2.1 entraine l'existence d'un morphisme de faisceaux sur B;

$$\Omega_B^p\longrightarrow(j_-)_*(\Omega_X^p|D)|B\ .$$

Ce morphisme composé avec le morphisme (1.1.4) donne un morphisme de faisceaux sur X;

$$\varepsilon^p\colon i_*\Omega_B^p\longrightarrow\underline{H}_b^1\Omega_X^p\ . \tag{6.2.2}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} i_*\Omega_B^p & \xrightarrow{\varepsilon^p} & \underline{H}_b^1\Omega_X^p \\ {\scriptstyle i_*d_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{H}_b^1 d_X} \\ i_*\Omega_B^{p+1} & \xrightarrow{\varepsilon^{p+1}} & \underline{H}_b^1\Omega_X^{p+1} \end{array}$$

est commutatif pour tout p, c'est à dire que $\varepsilon^{\cdot}=(\varepsilon^p)$ est un morphisme du complexe de faisceaux.

6.3. On suppose désormais que la frontière B de D est fortement pseudoconvexe et que tout point de D admet une contraction holomorphe d'un voisinage de ce point au ce point [22].

PROPOSITION 6.3.1.

$$\varepsilon^p\colon i_*\Omega_B^p\longrightarrow\underline{H}_b^1\Omega_X^p$$

est injective, et le morphisme

$$\varepsilon^{\cdot}\colon i_*\Omega_B^{\cdot}\longrightarrow\underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot}$$

est un quasi-isomorphisme;

$$h^p(i_*\Omega_B^{\cdot})\cong h^p(\underline{H}_b^1\Omega_X^{\cdot})\ ,\quad \textit{pour}\quad p\geqq 0\ .$$

En effect, l'unicité du prolongement $\Omega_B^p \to (j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D)$ et l'isomorphisme (2.1.5.3)

$$(j_-)_*(\Omega_X^p \,|\, D) \,|\, B \cong \underline{H}_b^1 \Omega_X^p \ ,$$

montrent que ε^p est injective. D'après la Proposition 4.1.4 et le Lemme 5.3.1. On a

$$\begin{aligned} h^p(i_* \Omega_B^{\cdot}) \cong h^p(\underline{H}_b^1 \Omega_X^{\cdot}) &= 0 \ , \quad \text{pour} \quad p \geqq 1 \ , \\ &\cong C_B \ , \quad \text{pour} \quad p = 0 \ . \end{aligned}$$

Donc $\varepsilon^{\cdot}$ est un quasi-isomorphisme.

On introduit maintenant le faisceau des formes holomorphes dans D qui sont lisses jusqu'à la frontière B.

On a envisagé dans (2.3.1) la suite exacte suivante;

$$0 \longrightarrow (j_-)_!(\Omega_X^p \,|\, D) \longrightarrow (j_-)_*(\Omega_X^p \,|\, D) \xrightarrow{\lambda^p} \underline{H}_b^1 \Omega_X^p \longrightarrow 0 \ .$$

On définit un sous-faisceau $\Omega_X^p(B)$ du $(j_-)_*(\Omega_X^p \,|\, D)$, appelé faisceau des p-formes holomorphes lisses jusqu'au bord, et un morphisme

$$\mu^p \colon \Omega_X^p(B) \longrightarrow \Omega_B^p \ ,$$

comme suit;

$$\Omega_X^p(B) = \{ s \in (j_-)_*(\Omega_X^p \,|\, D); \ \text{il existe un} \ t \in \Omega_B^p \ \text{tel que} \ \lambda^p s = \varepsilon^p t \} \ ,$$

et

$$\mu^p s = t \quad \text{pour} \quad s \in \Omega_X^p(B) \ , \quad \text{où} \quad \lambda^p s = \varepsilon^p t \ .$$

On a alors le diagramme commutatif suivant des deux suites exactes;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (j_-)_!(\Omega_X^p \,|\, D) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_X^p(B) \arrow[r, "\mu^p"'] \arrow[d, "\delta^p"] & \Omega_B^p \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (j_-)_!(\Omega_X^p \,|\, D) \arrow[r] & (j_-)_*(\Omega_X^p \,|\, D) \arrow[r, "\lambda^p"'] & \underline{H}_b^1 \Omega_X^p \arrow[r] & 0 \ ,
\end{tikzcd}$$

δ^p étant l'injection canonique.

THÉORÈME 6.3.2.

$$H^{\cdot}(D, C) \cong H^{\cdot}(X, \Omega_X^{\cdot}(B)) \ .$$

DÉMONSTRATION. Du diagramme ci-dessus et de la Proposition 6.3.1 découle que

$$\delta^{\cdot}=(\delta^{p})\colon \Omega^{\cdot}_{X}(B)\longrightarrow (j_{-})_{*}(\Omega^{\cdot}_{X}\,|\,D)$$

est un quasi-isomorphisme, donc il y a un isomorphisme de l'hypercohomologie de complexes $\Omega^{\cdot}_{X}(B)$ dans celle de $(j_{-})_{*}(\Omega^{\cdot}_{X}\,|\,D)$:

$$\boldsymbol{H}^{\cdot}(X,\ \Omega^{\cdot}_{X}(B))\xrightarrow{\cong}\boldsymbol{H}^{\cdot}(X,\ (j_{-})_{*}(\Omega^{\cdot}_{X}\,|\,D))\ .$$

Le premier terme d'une suite spectrale associé à la dernière hypercohomologie est

$$E_{1}^{p,q}=H^{q}(X,\ (j_{-})_{*}(\Omega^{p}_{X}\,|\,D))\ ,$$

et celui associé à $\boldsymbol{H}^{\cdot}(D,\ \Omega^{\cdot}_{X})$ est donné par

$$H^{q}(D,\ \Omega^{p}_{X})\ .$$

On a d'autre part

$$H^{q}(X,\ (j_{-})_{*}(\Omega^{p}_{X}\,|\,D))\cong H^{q}(D,\ \Omega^{p}_{X})\ ,$$

d'après (2.2.1). Donc

$$\boldsymbol{H}^{\cdot}(X,\ (j_{-})_{*}(\Omega^{\cdot}_{X}\,|\,D))\cong\boldsymbol{H}^{\cdot}(D,\ \Omega^{\cdot}_{X})\ .$$

D'après le lemme de Poincaré [22] qui est valable grace à l'hypothèse faite au début, on a

$$\boldsymbol{H}^{\cdot}(D,\ \Omega^{\cdot}_{X})\cong H^{\cdot}(D,\ \boldsymbol{C})\ .$$

c.q.f.d.

LEMME 6.3.3. *Si D est de Stein, on a*

$$H^{q}(X,\ \Omega^{p}_{X}(B))\cong H^{q}(B,\ \Omega^{p}_{B})\ ,\quad \textit{pour}\quad q\neq n-1,\ n\ .$$

DÉMONSTRATION. On a vu l'exactitude de la suite

$$0\longrightarrow (j_{-})_{!}(\Omega^{p}_{X}\,|\,D)\longrightarrow\Omega^{p}_{X}(B)\longrightarrow\Omega^{p}_{B}\longrightarrow 0\ .$$

Il en découle, grace aux (1.3.1) et (1.3.6), la suite exacte de cohomologies;

$$\cdots\longrightarrow H^{q}_{c}(D,\ \Omega^{p}_{X})\longrightarrow H^{q}(X,\ \Omega^{p}_{X}(B))\longrightarrow H^{q}(B,\ \Omega^{p}_{B})\longrightarrow H^{q+1}_{c}(D,\ \Omega^{p}_{X})\longrightarrow\cdots\ .$$

D'après (2.3.4) et (2.4.9) on conclut

$$H^{q}(X,\ \Omega^{p}_{X}(B))\cong H^{q}(B,\ \Omega^{p}_{B})\ ,\qquad q\neq n-1,\ n\ .$$

THÉORÈME 6.3.4. *Si D est une variété de Stein avec bord B, on a*

$$H^p(D, C) \cong h^p\Gamma(\bar{D}, \Omega^{\cdot}_X(B))$$

pour $p \leqq n-2$.

DÉMONSTRATION. Considérons la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(B)) \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{\cdot}(X, \Omega^{\cdot}_X(B)) \cong H^{\cdot}(D, C) .$$

D'après le lemme ci-dessus et la Proposition 6.1.4.

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq q \leqq n-2 .$$

On obtient donc

$$H^p(D, C) \cong h^p\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_X(B)) , \quad \text{pour} \quad p \leqq n-2 .$$

Bibliographie

[1] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193-259.

[2] A. ANDREOTTI and C. D. HILL, E. E. Levi convexity and H. Lewy problem I, II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), 325-363, 747-806.

[3] A. ANDREOTTI et F. NORGUET, Problème de Lévi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (1966), 197-241.

[4] C. BANICA et O. STANASILÀ, Des caractérisations topologiques de la profondeur d'un faisceau analytique cohérent, C. R. Acad. Sci. Paris, **269** (1969), 636-639.

[5] N. BOURBAKI, Variétés Différentielles et Analytiques, Hermann, Paris, 1967.

[6] H. CARTAN and S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[7] G. B. FOLLAND and J. J. KOHN, The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex, Ann. of Math. Studies, N°. 75, Princeton Univ. Press, Princeton, 1972.

[8] H. GRAUERT, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. of Math., **68** (1958), 460-472.

[9] H. GRAUERT, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann., **146** (1962), 331-368.

[10] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., **9** (1957), 119-221.

[11] A. GROTHENDIECK, Local cohomology, Lecture Notes in Math. n°. **41**, Springer, 1967.

[12] A. GROTHENDIECK, Cohomologie Locale des Faisceaux Cohérents et Théorème de Lefschetz Locaux et Globaux (SGA2), Advanced Studies in Pure Math., North-Holland, Amsterdam, 1962.

[13] A. GROTHENDIECK, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. I. H. E. S., n°. **29** (1966), 95-103.

[14] G. M. HENKIN, Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications, Math. USSR-Sb., vol. **7** (1969), 597-615.

[15] J. J. KOHN and H. ROSSI, On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, Ann. of Math., **81** (1965), 451-472.

[16] M. KURANISHI, Deformations of isolated singularities and ∂_b, Lect. Notes, Columbia Univ., 1973.

[17] H. LEWY, On the local character of the solutions of an typical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex

variables, Ann. of Math., **64** (1956), 514-522.

[18] B. Malgrange, Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 231-237.

[19] I. Naruki, Some remarks on isolated singularity and their applications to algebraic manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., **13** (1977), 17-46.

[20] J-P. Ramis, Théorèmes des separations et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **32** (1978), 933-997.

[21] H-J. Reiffen, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompakten Träger, Math. Ann., **164** (1966), 272-279.

[22] H-J. Reiffen, Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen, Math. Z., **101** (1967), 269-284.

[23] G. Scheja, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen, Math. Ann., **144** (1961), 345-360.

[24] J-P. Serre, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Coll. sur les fonctions de plusiers variables, Bruxelles, 1953, 57-68.

[25] Y-T. Siu, Analytic sheaf cohomology with compact supports, Compositio Math., **21** (1969), 52-58.

[26] Y-T. Siu, Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional complex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **143** (1969), 77-94.

[27] N. Tanaka, A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds, Lectures in Math., **9**, Kyoto Univ., Kinokuniya, Tokyo, 1975.

Addresse Actuelle:
Départment de Mathématiques
Faculté des Sciences et Technologies
Université de Waseda
Nishiokubo, Shinjuku-ku, Tokyo 160