Tokyo J. Math.
Vol. 4, No. 2, 1981

Transformation des Fonctionnelles Analytiques à Porteurs non Compacts

Patrick SARGOS et Mitsuo MORIMOTO

Université de Bordeaux I et Sophia Université

Le but de cet article est d'étendre en dimension $n \geqq 1$ la théorie des fonctionnelles analytiques à porteurs non compacts déjà étudiée en détails en dimension un par le deuxième auteur dans [7] et [8].

Ces fonctionnelles ont été introduites par Sebastiaõ e Silva ([13]) sous le nom de "ultra-distributions de type exponentiel". On étend également en dimension $n \geqq 1$ les résultats de Morimoto et Yoshino ([11]) concernant la transformation introduite par Avanissian et Gay dans [1].

L'espace de base que l'on considère, noté $Q(L; K')$, où L est un convexe fermé de partie imaginaire bornée de $\boldsymbol{C}^n$, et K' un convexe compact de $\boldsymbol{R}^n$, est formé des fonctions holomorphes sur les ε-voisinages de L, à décroissance exponentielle de type $h_{K'}$. Son dual $Q'(L; K')$ s'identifie à un sous-espace de Q'_0 des Fourier ultra-hyperfonctions définies par Zharinov dans [16], et à un sur-espace des fonctionnelles analytiques (au sens de Martineau ([6])) portables par un convexe compact de L.

Des rappels sont faits dans le §1 sur la transformation de Fourier dans les espaces $Q(\boldsymbol{R}^n+iK; K')$ et Q_0. Dans le §2, on démontre la densité de Q_0 dans l'espace $Q(L; K')$ (théorème 2.3.1.). Au §3, on définit une notion de valeur au bord dans Q'_0, et on démontre dans ce cadre, par une méthode directe, un théorème du type "the edge of the wedge", et qui contient le théorème du §1.3 de [16].

Le §4 est consacré à la transformation de Cauchy des fonctionnelles, limitée au cas où $L=F+iK$ est de type produit, préparant ainsi une définition plus générale de cette transformation, par une méthode dûe à Martineau ([6]), et qui sera donnée dans un travail ultérieur. On représente l'espace $Q'(F+iK; K')$ comme un quotient d'espaces de fonctions holomorphes, ou comme une limite projective de tels quotients; ce dernier cas prépare l'étude de la transformation de Laplace, faite au paragraphe suivant.

Reçu, le 18 juin 1980
Revisè, le 3 fevrier 1981

On définit au §5 la transformation de Fourier-Borel qui établit un isomorphisme entre l'espace $Q'(\Gamma^*+S+iK)$ et l'espace $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma; K+iS)$ des fonctions holomorphes dans le cône $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma$. Ce théorème a été démontré dans un cadre plus général par de Roever ([12]). L'injectivité de cette tranformation, qui est donnée dans [12] par une méthode longue et difficile, peut, dans notre cas, être démontrée simplement par des moyens de valeurs au bord et de transformation de Fourier, grâce au théorème de densité du §2.

Enfin, au §6, on étudie la transformation d'Avanissian-Gay, et on démontre, entre autre, que le théorème de Yoshino ([15]) sur le prolongement analytique des fonctions arithmétiques se généralise au cas de n variables.

Nous tenons à exprimer ici notre profonde reconnaissance au Professeur R. Gay qui a bien voulu inviter le deuxième auteur à Bordeaux et lui donner l'occasion de connaître le premier auteur. Sans ses encouragements, la distance géographique nous aurait gênés dans la réalisation du présent article.

§ 1. Préliminaires.

1.1. *Notations.*

On désigne par $z=x+iy$ ou par $\zeta=\xi+i\eta$ les éléments de $\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{R}^n+i\boldsymbol{R}^n$, par $\|z\|=(\sum_{j=1}^n |z_j|^2)^{1/2}$ la norme hermitienne dans $\boldsymbol{C}^n$, par $\|x\|=(\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$ la norme euclidienne dans $\boldsymbol{R}^n$. On pose également $\langle\zeta, z\rangle=\sum_{j=1}^n \zeta_j z_j$ pour ζ et $z\in\boldsymbol{C}^n$ ou $\boldsymbol{R}^n$, et $z^2=\langle z, z\rangle$. S^{n-1} est la sphère unité dans $\boldsymbol{R}^n$, et $B=\{x\in\boldsymbol{R}^n; |x_j|\leqq 1, j=1, \cdots, n\}$ est la boule unité fermée de $\boldsymbol{R}^n$ pour la norme produit. On pose, pour $z\in\boldsymbol{C}^n$, $|z|=\sum_{j=1}^n |z_j|$.

Si $A\subset\boldsymbol{R}^n$ (resp. $\boldsymbol{C}^n$) et $\varepsilon>0$, $A_\varepsilon=A+\varepsilon\mathring{B}$ (resp. $A+\varepsilon\{z\in\boldsymbol{C}^n; |z_j|<1, j=1, \cdots, n\}$) est l'$\varepsilon$-voisinage ouvert de A dans $\boldsymbol{R}^n$ (resp. $\boldsymbol{C}^n$) au sens de la norme produit. En particulier, si $A=A_1\times\cdots\times A_n$, $A_\varepsilon=A_{1,\varepsilon}\times\cdots\times A_{n,\varepsilon}$. Comme $\boldsymbol{R}^n\subset\boldsymbol{C}^n$, si $A\subset\boldsymbol{R}^n$, le contexte expliquera s'il faut considérer A_ε comme un voisinage réel ou complexe de A. On désignera par ∂A la frontière de A, et si A est un ensemble produit, par $\partial_0 A$ sa frontière distinguée. Enfin, pour $A\subset\boldsymbol{R}^n$, on pose $A_{-\varepsilon}=\{x\in A; x+\varepsilon B\subset A\}$; si A est fermé, $A_{-\varepsilon}$ est encore fermé.

On considère deux ensembles produit de $\boldsymbol{C}^n$, $A=A_1\times\cdots\times A_n$ et $A'=A'_1\times\cdots\times A'_n$, avec $A'\subset A$. On pose $A\,\#\,A'=\prod_{j=1}^n (A_j\backslash A'_j)$ et $A\,\#_j\,A'=(A_1\backslash A'_1)\times\cdots\times(A_{j-1}\backslash A'_{j-1})\times A_j\times(A_{j+1}\backslash A'_{j+1})\times\cdots\times(A_n\backslash A'_n)$. Dans le cas où ces ensembles sont réguliers, la frontière distinguée $\partial_0(A\,\#\,A')$ sera toujours orientée selon les conventions habituelles.

Soit K un convexe compact de $\boldsymbol{R}^n$; la fonction h_K est définie pour $x \in \boldsymbol{R}^n$ par $h_K(x)=\sup\{\langle t, x\rangle; t \in K\}$. On rappelle que h_K est une fonction convexe et que, pour tout scalaire $\lambda>0$, $h_K(\lambda x)=\lambda h_K(x)$. Enfin on remarque que $h_{K_\varepsilon}(x)=h_K(x)+\varepsilon|x|$.

Si Γ est un cône de $\boldsymbol{R}^n$ (de sommet zéro), son cône dual $\Gamma^*=\{\xi \in \boldsymbol{R}^n; \langle\xi, x\rangle \leqq 0, x \in \Gamma\}$ est un cône fermé de $\boldsymbol{R}^n$. Si Γ est un cône convexe de $\boldsymbol{R}^n$, ouvert ou fermé, de sommet l'origine, tel que Γ et Γ^* soient tous deux d'intérieur non vide, on dira que Γ est un cône propre. Si Γ est un cône propre, $\Gamma^{**}=\bar{\Gamma}$; de plus $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^*=\mathrm{co}(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*)$, où $\mathrm{co}(A)$ est l'enveloppe convexe de A.

Soient Ω un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ tel que $\mathring{\bar{\Omega}}=\Omega$ et γ une fonction continue sur $\boldsymbol{C}^n$ à valeurs réelles. On désigne par $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes, et par $H_b(\bar{\Omega}; \gamma)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, continues sur $\bar{\Omega}$ et vérifiant l'inégalité

$$\sup\{|f(z)| \exp(-\gamma(z)); z \in \bar{\Omega}\}<+\infty .$$

Muni de la norme correspondante, $H_b(\bar{\Omega}; \gamma)$ est un espace de Banach. Les limites inductives et les limites projectives de tels espaces ont été étudiées par plusieurs auteurs (cf. par exemple [18], §5.6 et 5.7). Dans les cas qui nous intéressent, les espaces obtenus sont du type Dual-Fréchet-Schwartz ou du type Fréchet-Schwartz; nous affirmerons, sans les démontrer, les résultats de ce genre, qui sont maintenant très classiques.

1.2. *L'espace de base $Q(L; K')$.*

DEFINITION 1.2.1. Soient L un convexe fermé de $\boldsymbol{C}^n$, de partie imaginaire bornée, et K' un convexe compact de $\boldsymbol{R}^n$. On pose

$$Q(L; K')=\varinjlim_{\varepsilon, \varepsilon'>0} H_b(\bar{L}_\varepsilon; -h_{K'}(x)-\varepsilon'|x|) .$$

Cet espace de "fonctions-test" a été défini en [7] et est du type Dual-Fréchet-Schwartz. Son dual $Q'(L; K')$ est du type Fréchet-Schwartz et est réflexif; il constitue l'espace des fonctionnelles analytiques dont nous allons étudier les propriétés et les transformations. On remarque que si L est compact, $Q(L; K')$ est l'espace $\mathcal{O}(L)$ des germes de fonctions holomorphes au voisinage de L, muni de sa topologie habituelle; si $L=\boldsymbol{R}^n$ et si $K'=\{0\}$, $Q'(\boldsymbol{R}^n)=Q'(\boldsymbol{R}^n; \{0\})$ coïncide avec l'espace $(\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n))'$ des Fourier-hyperfonctions qui a été défini dans [4], où $\boldsymbol{D}^n$ est le compactifié radial de $\boldsymbol{R}^n$; enfin, si $L=\boldsymbol{R}^n+iK$, où K est un compact convexe de $\boldsymbol{R}^n$, $H_b(\boldsymbol{R}^n+iK; h_{K'}(x))$ coïncide avec l'espace $\Phi(K, K')$ étudié dans [16] et [17].

On définit également l'espace

$$Q_0 = \lim_{K, K' \subset \boldsymbol{R}^n} \operatorname{proj} H_b(\boldsymbol{R}^n + iK;\ -h_{K'}(x))$$

(où $K \subset \boldsymbol{R}^n$ signifie: K est compact dans $\boldsymbol{R}^n$ et a en plus la signification $\mathring{\bar{K}} = K$ à cause de la définition de H_b). Cet espace est un Fréchet-Schwartz et son dual Q_0' est un Dual-Fréchet-Schwartz; il a été défini dans [16] et les éléments de Q_0' y sont appelés les Fourier ultra-hyperfonctions.

1.3. *Transformation de Fourier dans les espaces* Q_0 *et* $Q(\boldsymbol{R}^n + iK; K')$.

On s'intéresse plus particulièrement aux espaces $Q(L; K')$ lorsque L est de la forme $L = F + iK$, où F est un convexe fermé et K un convexe compact dans $\boldsymbol{R}^n$; on peut alors écrire de façon très simple, quand elles sont définies, les transformations de Fourier et de Fourier-Borel (cf. §5). On prend ici $L = \boldsymbol{R}^n + iK$ et on rappelle la définition et les propriétés, données dans [7], de la transformation de Fourier.

Soit $\varphi \in Q(\boldsymbol{R}^n + iK; K')$; pour un $\varepsilon > 0$ et un $\varepsilon' > 0$, φ est dans $H_b(\boldsymbol{R}^n + i\bar{K}_\varepsilon;\ -h_{K'_{\varepsilon'}}(x))$. Alors l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x+iy) \exp(-i\langle \zeta, z\rangle) dx$$

est définie pour tout $\zeta \in \boldsymbol{R}^n + iK'_{\varepsilon'}$ et ne dépend pas de $y \in \bar{K}_\varepsilon$. La fonction

$$\zeta \longrightarrow \int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(z) \exp(-i\langle \zeta, z\rangle) dx$$

est notée $\mathscr{F}\varphi$. On définit de même

$$\bar{\mathscr{F}}\varphi(\zeta) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(z) \exp(i\langle \zeta, z\rangle) dx \ .$$

On a le résultat donné dans [7]:

THÉORÈME 1.3.1. *Les applications* $\mathscr{F}$ *et* $\bar{\mathscr{F}}$

$$Q(\boldsymbol{R}^n + iK;\ K') \xrightarrow{\mathscr{F}} Q(\boldsymbol{R}^n + iK';\ -K)\ ,$$

$$Q(\boldsymbol{R}^n + iK;\ K') \xrightarrow{\bar{\mathscr{F}}} Q(\boldsymbol{R}^n - iK';\ K)$$

sont des isomorphismes topologiques. On a de plus la formule de réciprocité de Fourier

$$\mathscr{F}\bar{\mathscr{F}}\varphi = \bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi = (2\pi)^n \varphi \ .$$

Les applications transposées seront notées ${}^t\mathscr{F}$ et ${}^t\bar{\mathscr{F}}$:

$$Q'(\boldsymbol{R}^n+iK;\ K') \xrightarrow{{}^t\mathscr{F}} Q'(\boldsymbol{R}^n-iK';\ K)\ ,$$
$$Q'(\boldsymbol{R}^n+iK;\ K') \xrightarrow{{}^t\bar{\mathscr{F}}} Q'(\boldsymbol{R}^n+iK';\ -K)\ .$$

On définit de la même façon la transformation de Fourier dans Q_0, et on a les isomorphismes ([16], §2.3)

$$Q_0 \xrightarrow{\mathscr{F}} Q_0\ ,$$
$$Q_0 \xrightarrow{\bar{\mathscr{F}}} Q_0\ .$$

§ 2. Propriétés générales des espaces Q et Q'.

Dans tout ce paragraphe, L est un convexe fermé de partie imaginaire bornée dans $\boldsymbol{C}^n$, et K' est un convexe compact de $\boldsymbol{R}^n$.

2.1. *Représentation des fonctionnelles par des mesures.*

Selon un procédé classique, le résultat ci-dessous nous permettra, dans la suite, d'utiliser, et sans avoir à le mentionner, les opérations usuelles de l'intégration.

PROPOSITION 2.1.1. *Soit* $T \in Q'(L;\ K')$. *Pour tous* ε *et* $\varepsilon'>0$, *il existe une mesure bornée* μ *sur* $\bar{L}_\varepsilon$ *telle que*

$$\langle T,\ \varphi\rangle = \int_{\bar{L}_\varepsilon} \varphi(\zeta)\exp(h_{K'}(\xi)+(\varepsilon'/2)|\xi|)d\mu(\zeta)$$

pour $\varphi \in H_b(\bar{L}_\varepsilon;\ -h_{K'}(\xi)-\varepsilon'|\xi|)$.

DÉMONSTRATION. Pour un ouvert Ω de $\boldsymbol{C}^n$, tel que $\Omega=\mathring{\bar{\Omega}}$, et pour une fonction γ continue sur $\boldsymbol{C}^n$ et à valeurs réelles, on désigne par $C_0(\bar{\Omega};\ -\gamma)$ l'espace des fonctions g, continues sur $\bar{\Omega}$, et telles que les fonctions: $\zeta \to g(\zeta)\exp(\gamma(\zeta))$ tendent vers zéro à l'infini (i.e., pour tout $\delta>0$, il existe un compact M de $\bar{\Omega}$ tel que $|g(\zeta)|\exp(\gamma(\zeta)) \leqq \delta$ pour $\zeta \in \bar{\Omega}\backslash M$); on munit cet espace de la norme

$$\|g\| = \sup\{|g(\zeta)|\exp(\gamma(\zeta));\ \zeta \in \bar{\Omega}\}\ .$$

On désigne par $H_0(\bar{\Omega};\ -\gamma)$ le sous-espace fermé de $C_0(\bar{\Omega};\ -\gamma)$ formé des fonctions g qui sont en outre holomorphes dans Ω. D'après un résultat classique d'analyse, les formes linéaires continues sur $C_0(\bar{\Omega})=C_0(\bar{\Omega};\ 0)$ sont les mesures bornées sur $\bar{\Omega}$.

On choisit ici $\gamma(\zeta)=h_{K'}(\xi)+(\varepsilon'/2)|\xi|$, et $\Omega=L_\varepsilon$. Comme la topologie de $H_0(\bar{\Omega};\ -\gamma)$ est plus fine que celle induite par $H_b(\bar{\Omega};\ -\gamma)$, la restriction de

T à $H_0(\bar{L}_\varepsilon; -\gamma)$ est continue et admet un prolongement $T_1 \in (C_0(\bar{L}_\varepsilon; -\gamma))'$. On vérifie que la forme linéaire $\exp(-\gamma(\zeta))T_1$ est définie et continue sur $C_0(\bar{L}_\varepsilon)$, et donc est représentable par une mesure bornée μ sur $\bar{L}_\varepsilon$; on a

$$\langle T_1, g\rangle = \int_{\bar{L}_\varepsilon} g(\zeta)\exp(h_{K'}(\xi)+(\varepsilon'/2)|\xi|)d\mu(\zeta)$$

pour $g \in C_0(\bar{L}_0; -\gamma)$, donc pour $g \in H_b(\bar{L}_\varepsilon; -h_{K'}(\xi)-\varepsilon'|\xi|)$, d'où le résultat.

2.2. *Approximation de la fonction $z \to -h_K(x)$ par des fonctions plurisousharmoniques.*

("p.s.h" sera l'abréviation de plurisousharmonique).

PROPOSITION 2.2.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$. Etant donnés un compact convexe K de $\boldsymbol{R}^n$ et $\varepsilon>0$, il existe des fonctions $\psi_1, \cdots, \psi_m$ holomorphes dans $\boldsymbol{R}^n+i\Omega$, et une constante $C>0$ telles que*

$$h_K(x) \leqq \inf_{1\leq k\leq m} \operatorname{Re}\psi_k(z) \leqq h_K(x)+\varepsilon|x|+C,\ z \in \boldsymbol{R}^n+i\Omega .$$

LEMME 2.2. *Soient $a>0$, α et β deux reéls. Il existe une fonction $\psi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{R}+i]-a, a[)$ telle que*

$$\lim_{x\to+\infty}\psi_{\alpha,\beta}(z)=\beta \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\psi_{\alpha,\beta}(z)=\alpha ,$$

ces deux limites étant obtenues uniformément en $y \in]-a, a[$.

DÉMONSTRATION. On se ramène au cas où $\alpha=\pi/2$ et $\beta=-\pi/2$ en posant

$$\psi_{\alpha,\beta}(z)=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\pi}[\pi/2+\psi_{-\pi/2,\pi/2}(z)] .$$

Par une homothétie de centre 0, on peut supposer $a<1$. L'extension holomorphe de la fonction $\operatorname{Arctg} x$ convient alors.

LEMME 2.2.3. *Pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver des parallélotopes $P_1, \cdots, P_m$ de $\boldsymbol{R}^n$ qui contiennent K, de façon que*

$$\inf_{1\leq k\leq m} h_{P_k}(x) \leqq h_K(x)+\varepsilon|x|,\ x \in \boldsymbol{R}^n .$$

(Par parallélotope, on entend l'image linéaire d'un ensemble de $\boldsymbol{R}^n$, produit d'intervalles compacts.)

DÉMONSTRATION. Pour tout $\xi \in S^{n-1}$, on désigne par H_ξ l'hyperplan de $\boldsymbol{R}^n$ d'équation $\langle x, \xi\rangle = h_K(\xi)$, et on choisit un parallélotope P_ξ contenant

K et dont l'une des faces est portée par H_ξ. Notons que, comme $H_\xi \cap P_\xi$ est dans la frontière du convexe P_ξ, celui-ci est entièrement contenu dans le demi-espace $\{x \in \boldsymbol{R}^n;\ \langle x, \xi\rangle \leqq h_K(\xi)\}$. En particulier, $h_{P_\xi}(\xi) = h_K(\xi)$.

Choisissons également un voisinage V_ξ de ξ dans S^{n-1} de façon que

$$\xi' \in V_\xi \Longrightarrow \sup\{|\langle t, \xi' - \xi\rangle|;\ t \in P_\xi\} < \varepsilon \,.$$

Par compacité de S^{n-1}, on peut trouver $\xi_1, \cdots, \xi_m$ de S^{n-1} tels que les $V_{\xi_k}(1 \leqq k \leqq m)$ recouvrent S^{n-1}. Montrons que les parallélotopes $P_{\xi_1}, \cdots, P_{\xi_m}$ répondent à la question (on pose $P_k = P_{\xi_k}$).

Soit $x \in \boldsymbol{R}^n$, $x \neq 0$. Pour au moins un k, $x' = x/\|x\| \in V_{\xi_k}$ et $h_{P_k}(x') \leqq h_{P_k}(x' - \xi_k) + h_{P_k}(\xi_k)$. Par construction de V_{ξ_k}, $h_{P_k}(x' - \xi_k) \leqq \varepsilon$; de plus,

$$h_{P_k}(\xi_k) = h_K(\xi_k) \leqq h_K(\xi_k - x') + h_K(x') \,.$$

Comme $h_K \leqq h_{P_k}$, on a finalement montré $h_{P_k}(x) \leqq h_K(x) + 2\varepsilon\|x\|$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2.2.4. *Soit P un parallélotope de $\boldsymbol{R}^n$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\psi_P \in \mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n + i\Omega)$ telle que*

$$h_P(x) \leqq \operatorname{Re} \psi_P(z) \leqq h_P(x) + \varepsilon|x| + C^{te},\ z \in \boldsymbol{R}^n + i\Omega \,.$$

DÉMONSTRATION. 1) On suppose d'abord $n=1$, $P = [\alpha, \beta]$ et $\Omega \subset\ ]-a, a[$. On choisit une fonction $\nu(z) = \psi_{\alpha-\varepsilon/2, \beta-\varepsilon/2}(z)$ donnée par le lemme 2.2.2. Soit $A > 0$ tel que

$$|\nu(z) - (\beta + \varepsilon/2)| \leqq \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad x \geqq A \quad \text{et} \quad |y| \leqq a \,,$$

et

$$|\nu(z) - (\alpha - \varepsilon/2)| \leqq \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad x \leqq -A \quad \text{et} \quad |y| \leqq a \,,$$

et soit $M_1 = \sup\{|\operatorname{Im} \nu(z)|;\ z \in \boldsymbol{R} + i]-a, a[\}$.

Pour $x \geqq A$, on a

$$\alpha x \leqq \operatorname{Re}(z\nu(z)) + aM_1 \leqq \alpha x + \varepsilon|x| + 2aM_1 \quad \text{pour} \quad x \leqq -A \,,$$
$$\beta x \leqq \operatorname{Re}(z\nu(z)) + aM_1 \leqq \beta x + \varepsilon|x| + 2aM_1 \quad \text{pour} \quad x \geqq A \,.$$

Si maintenant on pose $\psi_P(z) = z\nu(z) + M$, où M est une constante convenable, on obtient

$$h_P(x) = \alpha x \leqq \operatorname{Re} \psi_P(z) \leqq \alpha x + \varepsilon|x| + C^{te} \quad \text{pour} \quad x \leqq 0 \,,$$
$$h_P(x) = \beta x \leqq \operatorname{Re} \psi_P(z) \leqq \beta x + \varepsilon|x| + C^{te} \quad \text{pour} \quad x \geqq 0 \,,$$

et ψ_P répond à la question.

2) On suppose ensuite n quelconque, $P=P_1\times\cdots\times P_n$ et $\Omega\subset]-a, a[$. Comme $h_P(x)=\sum_{j=1}^n h_{P_j}(x)$ et $|x|=\sum_{j=1}^n |x_j|$, il suffit de choisir $\psi_P=\sum \psi_{P_j}$, où les ψ_{P_j} sont définis comme ci-dessus.

3) On se place maintenant dans le cas où P est un parallélotope: $P=uP'$, où u est un isomorphisme de $\boldsymbol{R}^n$ et P' un produit d'intervalles compacts. On désigne par u^* l'adjoint de u, et par $\tilde{u}^*$ l'isomorphisme de $\boldsymbol{C}^n$, complexifié de u^*. On prend un $\varepsilon'>0$ assez petit pour que $\varepsilon'\|u^*\|\leqq \varepsilon$, et un $a>0$ assez grand pour que $u^*(\Omega)\subset]-a, a[^n$; on choisit une fonction $\psi_{P'}\in\mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n+i]-a, a[^n)$ qui vérifie

$$h_{P'}(x)\leqq \operatorname{Re}\psi_{P'}(z)\leqq h_{P'}(x)+\varepsilon'|x|+C^{te}$$

pour $z\in\boldsymbol{R}^n+i]-a, a[^n$. On pose $\psi_P=\psi_{P'}\circ\tilde{u}^*$. Grâce à la relation $h_{P'}(u^*\xi)=h_P(\xi)$ pour $\xi\in\boldsymbol{R}^n$, on vérifie que ψ_P répond à la question. Le lemme est démontré.

La proposition 2.2.1 est une conséquence immédiate des lemmes 2.2.3 et 2.2.4. On en déduit le

COROLLAIRE 2.2.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction ψ p.s.h. dans $\boldsymbol{R}^n+i\Omega$ telle que*

$$-h_K(x)-2\varepsilon|x|\leqq\psi(z)\leqq -h_K(x)-\varepsilon|x|+C^{te}\ , \quad z\in\boldsymbol{R}^n+i\Omega\ .$$

2.3. *Un théorème de densité.*

THÉORÈME 2.3.1. *L'espace Q_0 est séquentiellement dense dans $Q(L; K')$.*

Ceci signifie que si $\varphi\in Q(L; K')$, il existe une suite $(\varphi_\nu)\subset Q_0$ qui converge vers φ dans $Q(L; K')$. La démonstration s'inspire du théorème 2.3.5 de [2].

LEMME 2.3.2. *Soient P un compact convexe de $\boldsymbol{R}^n$ et $\alpha\geqq 0$. On a*

$$|h_{P_\alpha}(x+\xi)-h_P(x+\xi')|\leqq\alpha\,|x|+C^{te}(|\xi|+|\xi'|)\ , \quad x, \xi, \xi'\in\boldsymbol{R}^n\ .$$

DÉMONSTRATION. D'après les propriétés de la fonction h_P, on a

$$-\lambda(|\xi'|+|\xi|)\leqq -h_P(\xi'-\xi)\leqq h_P(x+\xi)-h_P(x+\xi')\leqq h_P(\xi-\xi')\leqq\lambda(|\xi|+|\xi'|)$$

pour $\lambda>0$ assez grand. On conclut en remarquant que

$$h_{P_\alpha}(x+\xi)=h_P(x+\xi)+\alpha|x+\xi|\ .$$

LEMME 2.3.3. *Soit L' un convexe de $\boldsymbol{C}^n$, de partie imaginaire bornée. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\psi_\varepsilon\in C^\infty(\boldsymbol{C}^n)$ telle que*

(2.1) ψ_ε *est strictement p.s.h. dans* C^n ,

(2.2) $\psi_\varepsilon<0$ *dans* L' *et* $\psi_\varepsilon>0$ *hors de* L'_ε ,

(2.3) *pour tout* $\lambda>0$ *et tout* $\delta>0$, *la fonction* $z\to\exp(-\delta z^2+\psi_\varepsilon(z))$ *est bornée dans* $R^n+i\lambda B$.

DÉMONSTRATION. Soit d la distance euclidienne dans $C^n\cong R^{2n}$, et U_{2n} la boule unité associée. Pour tout $\alpha>0$, l'ensemble $L'(\alpha)=L'+\alpha U_{2n}$ est convexe et la fonction $g_\alpha(z)=d(z, L'(\alpha))$ est convexe sur C^n.

Soit $\chi\in\mathscr{D}(C^n)$ ($\mathscr{D}$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact) vérifiant: $\chi\geqq 0$, $\operatorname{supp}\chi\subset U_{2n}$ et $\int_{C^n}\chi dV=1$, et qui ne dépend que de $|z_1|, \cdots, |z_n|$. On pose $h_\alpha(z)=\int_{C^n} g_\alpha(z-\alpha\zeta)\chi(\zeta)d\zeta$. On fixe α assez petit pour que $L'(2\alpha)\subset L'_\varepsilon$. Par la proposition 2.6.3 de [3], on sait que h_α est C^∞ et p.s.h. dans C^n, et que $h_\alpha\geqq g_\alpha$. On montre facilement que $h_\alpha(z)\geqq\alpha$ hors de L'_ε, que $h_\alpha=0$ dans L' et que $h_\alpha(z)\leqq g_\alpha(z)+\alpha$. Pour que les propriétés (2.1) et (2.2) soient vérifiées, on modifie légèrement h_α en posant

$$\psi_\varepsilon(z)=h_\alpha(z)-\beta+\gamma\Big(\sum_{j=1}^n y_j^2\Big) \quad (\beta \text{ et } \gamma>0)\ .$$

Soit $M=\sup\{\sum_{j=1}^n y_j^2;\ z=x+iy\in L'_\varepsilon\}$. Il suffit de prendre $\beta<\alpha$ et $\gamma<\beta/M$. Le lemme est démontré.

Soient ω un ouvert de C^n et φ une fonction continue sur ω, à valeurs réelles. On pose, en suivant les notations de [2],

$$L^2(\omega, \varphi)=\Big\{u\in L^2_{\mathrm{loc}}(\omega);\ \int_\omega |u|^2e^{-\varphi}dV<+\infty\Big\}$$

et on définit $H^2(\omega, \varphi)=L^2(\omega, \varphi)\cap\ker\bar\partial$, muni de la topologie induite par $L^2(\omega, \varphi)$.

LEMME 2.3.4. *Soient* L' *un ouvert convexe de* C^n, *de partie imaginaire bornée,* P *un convexe compact de* R^n. *Soient* $\lambda>0$ *et* $\varepsilon>0$, *avec* λ *assez grand pour que* $R^n+i\lambda U_n\supset L'_{2\varepsilon}$ *et* $\lambda B\supset P_{2\varepsilon}$. *Alors* $H^2(R^n+i\lambda U_n, -\lambda|x|)$ *est dense dans* $H^2(L'_{2\varepsilon}, -h_{P_{2\varepsilon}}(x))$ *quand on munit ce dernier de la topologie induite par* $L^2(L', -h_P(x))$.

DÉMONSTRATION. On pose $\Omega=R^n+i\lambda U_n$.

1) On veut construire une fonction $\varphi\in C^\infty(\bar\Omega)$, strictement p.s.h., vérifiant

(2.4) $$-h_{P_{2\varepsilon}}(x)\leqq\varphi(z)\leqq -h_P(x)+C^{te} \quad \text{dans} \quad \Omega\ ,$$

et

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \geqq \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 . \tag{2.5}$$

On construit, au moyen du corollaire 2.2.5, une fonction ψ p.s.h. dans un voisinage assez grand de $\bar{\Omega}$, vérifiant dans ce voisinage,

$$-h_{P_{2\varepsilon}}(x) \leqq \psi(z) \leqq -h_{P_\varepsilon}(x) + C^{te} .$$

On prend χ comme dans le lemme précédent, et on pose, pour $\alpha > 0$

$$\psi_\alpha(z) = \int_{C^n} \psi(z - \alpha\zeta)\chi(\zeta) d\zeta .$$

Si α est assez petit, ψ_α est définie au voisinage de $\bar{\Omega}$; d'après la proposition 2.6.3 de [3], ψ_α est C^∞, p.s.h au voisinage de $\bar{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \psi_\alpha(z) - \psi(z) \leqq \int_{C^n} |\psi(z-\alpha\zeta) - \psi(z)| \chi(\zeta) d\zeta \\ &\leqq \sup \{ |\psi(z-\alpha\zeta) - \psi(z)| ;\ \zeta \in U_{2n} \} \\ &\leqq \varepsilon |x| + C^{te} , \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.3.2.

Si on pose $\varphi(z) = \psi_\alpha(z) + \sum_{j=1}^n y_j^2$, φ répond à la question.

2) Soit $T \in (H^2(L'; -h_P(x)))'$ qui s'annule sur $H^2(\Omega, -\lambda|x|)$ et on veut montrer que $\langle T, v \rangle = 0$ pour toute $v \in H^2(L'_{2\varepsilon}, -h_{P_{2\varepsilon}}(x))$, en utilisant la proposition 2.3.2 de [2], ce qui démontrera le lemme 2.3.4.

Soit $u \in L^2(L', h_P(x))$ qui représente T en ce sens: si $w \in H^2(L', -h_P(x))$, $\langle u, w \rangle = \langle T, w \rangle = \int_{L'} u\bar{w} dV$. En prolongeant u par 0 hors de L', u devient un élément de $L^2(\Omega, h_P(x))$, donc de $L^2(\Omega, -\varphi)$ d'après (2.4).

Soit $\psi = \psi_\varepsilon$ la fonction définie par le lemme 2.3.3. Si $\lambda' > 0$ est donné et si $w \in H^2(\Omega, \varphi + \lambda'\psi^+)$, $\psi^+ = \sup(\psi, 0)$, on a encore $\langle u, w \rangle = 0$. Cela tient au fait que, d'après (2.3), $e^{-\delta z^2} w$ est dans $H^2(\Omega, -\lambda|x|)$ pour tout $\delta > 0$, et que $\langle u, w \rangle = \lim_{\delta \to 0} \langle u, e^{-\delta z^2} w \rangle$.

De la proposition 2.3.2 de [2], on déduit qu'il existe $f = \sum_{j=1}^n f_j d\bar{z}_j \in L^2_{(0,1)}(\Omega, \text{loc})$, nulle hors de L_ε, telle que $u = -\sum_{j=1}^n (\partial f_j / \partial z_j)$ (égalité dans $\mathscr{D}'(\Omega)$) et

$$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} f_j \bar{f}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} e^{\varphi} dV \leqq \int_\Omega |u|^2 e^{\varphi} dV .$$

D'après (2.5), cette dernière inégalité signifie que chaque f_j est dans $L^2(\Omega, -\varphi)$.

3) Il reste à montrer que si $v \in H^2(L'_{2\varepsilon}, -h_{P_{2\varepsilon}}(x))$, on a $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\bar{v}dV = 0$.

On choisit dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ une suite (θ_ν) vérifiant

$$0 \leqq \theta_\nu \leqq 1, \ \sup_{\nu,z,j}\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial z_j}(z)\right| \leqq M, \ \operatorname{supp}\theta_\nu \subset L'_{2\varepsilon}$$

et $\theta_\nu \equiv 1$ sur $L'_\varepsilon \cap \{z;\ \|z\| \leqq \nu\}$.

Soit $\nu \in H^2(L'_{2\varepsilon}, -h_{P_{2\varepsilon}}(x))$; par (2.4), $v \in H^2(L'_{2\varepsilon}, \varphi)$. On remarque que, comme u est nulle hors de L', $\langle u, v\rangle = \lim_{\nu\to\infty}\langle u, \theta_\nu v\rangle$. D'autre part, comme $\theta_\nu v \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\langle u, \theta_\nu v\rangle = \int_\Omega u\overline{\theta_\nu v}dV = -\sum_{j=1}^n\int_\Omega \frac{\partial f_j}{\partial z_j}\overline{\theta_\nu v}dV = \sum_{j=1}^n\int_\Omega \frac{\partial\theta_\nu}{\partial z_j}f_j\bar{v}dV .$$

Mais, pour tout $z \in L'_\varepsilon$, $\lim_{\nu\to\infty}(\partial\theta_\nu/\partial z_j)(z) = 0$, et comme f est nulle hors de L'_ε, on a, pour tout $z \in \Omega$, $\lim_{\nu\to\infty}(\partial\theta_\nu/\partial z_j)f_j\bar{v}(z) = 0$. Enfin, les conditions de croissance imposées à $(\partial\theta_\nu/\partial z_j)$, à f_j et à v permettent, par le théorème de Lebesgue, de montrer que $\langle u, v\rangle = 0$, d'où le lemme.

LEMME 2.3.5. *On a les égalités d'espaces vectoriels topologiques*

$$Q(L;\ K') = \lim_{\varepsilon>0}\operatorname{ind} H^2(L_\varepsilon;\ -h_{K_\varepsilon}(x))$$

et

$$Q_0 = \lim_{\lambda}\operatorname{proj} H^2(\boldsymbol{R}^n + i\lambda U_n;\ -2\lambda|x|) .$$

DÉMONSTRATION. On traite le cas de $Q(L;\ K')$, en remarquant qu'on a une injection continue évidente

$$Q(L;\ K') \hookrightarrow \lim_{\varepsilon>0}\operatorname{ind} H^2(L_\varepsilon;\ -2h_{K_\varepsilon}(x)) .$$

Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon>0$ et tout $\delta>0$, on a une injection continue

$$H^2(L_{\varepsilon+\delta},\ -2h_{K_\varepsilon}(x)) \hookrightarrow H_b(\bar{L}_\varepsilon,\ -h_{K_\varepsilon}(x)) .$$

Comme la fonction $z \to |u(z)e^{\langle a,z\rangle}|^2$ est sous-harmonique dans $L_{\varepsilon+\delta} \subset \boldsymbol{R}^{2n}$, où $u \in H^2(L_{\varepsilon+\delta},\ -2h_{K'_\varepsilon}(x))$, on a la majoration pour $z \in \bar{L}_\varepsilon$

$$|u(z)e^{\langle a,z\rangle}|^2 \leqq \frac{1}{\delta^{2n}\operatorname{vol}(U_{2n})}\int_{z+\delta U_{2n}}|u(\zeta)e^{\langle a,\zeta\rangle}|^2 d\zeta .$$

Comme $h_{K'_\varepsilon}(x) = \sup_{a\in K'_\varepsilon}(\operatorname{Re}\langle a, z\rangle)$, il suffit de prendre la borne supérieure des deux membres pour obtenir l'inégalité

$$\sup\{|u(z)\exp(h_{K'_\varepsilon}(x))|;\, z\in \bar{L}_\varepsilon\}\leqq \frac{1}{\delta^n\sqrt{\mathrm{vol}(U_{2n})}}\left(\int_{L_{\varepsilon+\delta}}|u(\zeta)|^2\exp(2h_{K'_\varepsilon}(\xi))d\zeta\right)^{1/2},$$

qui est le résultat cherché.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3.1. Pour simplifier les écritures, on pose $\|u\|_\varepsilon=\left(\int_{L_\varepsilon}|u|^2\exp(2h_{K'_\varepsilon})dV\right)^{1/2}$ et $\|u\|^\lambda=\left(\int_{R^n+i\lambda U_n}|u|^2e^{2\lambda|x|}dV\right)^{1/2}$. On choisit une suite croissante convenable (λ_ν) de réels posilifs, qui tend vers $+\infty$.

Soit $v\in Q(L;K')$; par le lemme 2.3.5, il existe un ε et un $\alpha>0$ tels que v soit dans $H^2(L_{\varepsilon+\alpha}, -2h_{k'_{\varepsilon+\alpha}}(x))$. Le théorème sera démontré si on prouve que, pour tout $\delta>0$, il existe $v_\delta\in Q_0$ de façon que $\|v-v_\delta\|_\varepsilon\leqq\delta$.

On sait d'après le lemme 2.3.4 qu'il existe v_1 dans $H^2(\boldsymbol{R}^n+i(\lambda_1+\alpha)U_n, -2(\lambda_1+\alpha)|x|)$ tel que $\|v-v_1\|_\varepsilon\leqq\delta/2$. On construit alors par récurrence une suite $(v_\nu)_{\nu\geqq2}$, où $v_\nu\in H^2(\boldsymbol{R}^n+i(\lambda_\nu+\alpha)U_n, -2(\lambda_\nu+\alpha)|x|)$ vérifie $\|v_{\nu-1}-v_\nu\|^{\lambda_{\nu-1}}\leqq 2^{-\nu}\delta$, l'existence d'une telle suite étant assurée par le lemme 2.3.4. On voit que la suite (v_ν) converge dans chacun des $H^2(\boldsymbol{R}^n+i\lambda_\nu v_n, -2\lambda_\nu|x|)$, donc dans Q_0, et sa limite v_δ vérifie $\|v-v_\delta\|\leqq\delta$. Le théorème 2.3.1 est entièrement démontré.

REMARQUE 2.3.6. Si $L=\boldsymbol{R}^n+iK$, la densité de Q_0 dans $Q(\boldsymbol{R}^n+iK;K')$ résulte immédiatement des résultats du § 2.5 de [16]. La démonstration dans ce cas n'utilise que la transformation de Fourier (théorème 1.3.1) et l'existence du multiplicateur $\exp(\delta z^2)$.

2.4. *Notion de porteur.*

Soient $L_0\subset L$ deux convexes de $\boldsymbol{C}^n$ de parties imaginaires bornées, $K'_0\subset K'$ deux convexes compacts de $\boldsymbol{R}^n$. Les injections continues

$$Q_0\hookrightarrow Q(L;K')\hookrightarrow Q(L_0;K'_0)$$

sont denses. Par transposition, on obtient les injections canoniques

$$Q'(L_0;K'_0)\hookrightarrow Q'(L;K')\hookrightarrow Q'_0\,.$$

Dans toute la suite, on identifiera tous les espaces $Q'(L;K')$ à des sous-ensembles de Q'_0. Remarquons, inversement, que Q'_0 est la réunion de tous les $Q'(L;K')$. Ceci nous amène à poser la

DÉFINITION 2.4.1. Une Fourier ultra-hyperfonction $T\in Q'_0$ est portable par L s'il existe K' tel que $T\in Q'(L;K')$. Les éléments de $Q'(L;K')$ sont les $T\in Q'_0$ qui sont portables par L et de type $h_{K'}$.

En particulier, si L_0 est compact, $Q'(L_0)$ coïncide avec l'espace classique $A'(L_0)$ des fonctionnelles analytiques portables par L_0 selon la définition usuelle (cf. par exemple, [3] §4.5, ou [1] §1.1), et $A'(L_0)$ s'identifie à l'ensemble des $T \in Q_0'$ qui sont portables par L_0.

§ 3. Valeurs au bord dans Q_0'.

3.1. *L'application b.*

DEFINITION 3.1.1. Soient ω un ouvert connexe de $\boldsymbol{R}^n$ et K' un compact convexe de $\boldsymbol{R}^n$. On définit l'espace:

$$\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\omega;\ K') = \lim_{\substack{P \Subset \omega \\ \varepsilon > 0}} \text{proj}\, H_b(\boldsymbol{R}^n + iP;\ h_{K'_\varepsilon}(x)) \ .$$

(Pour la signification de $P \Subset \omega$, cf. §1.2). L'espace $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\omega;\ K')$ est du type Fréchet-Schwartz. Dans le cas où $K' = \{0\}$, l'espace $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\omega;\ \{0\})$ coïncide avec l'espace $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n + i\omega)$ défini dans [4]. Dans ([16], §3.1) l'espace $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\omega;\ K')$ est noté $\overleftarrow{\Lambda}(\omega;\ K')$.

DÉFINITION 3.1.2. Soit $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\omega;\ K')$. On définit une forme linéaire continue sur Q_0 en posant, pour $y \in \omega$,

$$\langle b(f),\ \varphi \rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x+iy)\varphi(x+iy)dx$$

(Par le théorème de Cauchy-Poincaré, cette intégrale ne dépend pas de y). On l'appelle valeur au bord de f dans Q_0'.

LEMME 3.1.3. Soit $a \in \partial\omega$; alors $b(f)$ est dans $Q'(\boldsymbol{R}^n + i\{a\};\ K')$.

En effet, la fonctionnelle définie par $\varphi \to \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x+iy_\varphi)\varphi(x+iy_\varphi)dx$, où y_φ est choisi dans ω, suffisamment voisin de a, représente un élément de $Q'(\boldsymbol{R}^n + i\{a\};\ K')$ qui prolonge $b(f)$.

Remarquons qu'on a aussi l'écriture, pour $\varphi \in Q(\boldsymbol{R}^n + i\{a\};\ K')$: $\langle b(f), \varphi \rangle = \lim_{\substack{y \to a \\ y \in \omega}} \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x+iy)\varphi(x+ia)dx$, qui justifie, pour l'application b, la dénomination d' "application de valeur au bord".

3.2. *Un théorème du type "Edge of the wedge".*

THÉORÈME 3.2.1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts connexes de $\boldsymbol{R}^n$, $\Omega = \text{co}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, et $f_j \in \tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\Omega_j;\ K')(j=1, 2)$. On suppose que $b(f_1) = b(f_2)$.*

Alors il existe $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n + i\Omega;\ K')$ qui prolonge f_1 et f_2.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer la propriété suivante:

(3.1) "Pour tout compact P de Ω et tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $f_{P,\varepsilon}\in\mathscr{O}(\boldsymbol{R}^n+i\mathring{P})$, vérifiant

$$\sup\{|f_{P,\varepsilon}(z)|\exp(-h_{K'}(x)-2\varepsilon|x|);\ z\in\boldsymbol{R}^n+i\mathring{P}\}<+\infty$$

et qui coïncide, pour $j=1, 2$, avec f_j sur $\boldsymbol{R}^n+i(\Omega_j\cap\mathring{P})$."

En effet, la fonction f, obtenue par recollement des $f_{P,\varepsilon}$, sera nécessairement dans $\widetilde{\mathscr{O}}(\boldsymbol{R}^n+i\Omega;\ K')$, et répondra à la question. On fixe un compact P de Ω et un $\varepsilon>0$ jusqui à la fin de la démonstration.

Soient $a>0$ et $\omega=]-a, a[^n$; on choisit a assez grand pour que P soit contenu dans ω et que ω rencontre Ω_1 et Ω_2. On prend également deux compacts connexes P_1 et P_2 de Ω_1 et Ω_2 respectivement, qui sont contenus dans ω et tels que $P\subset\mathrm{co}(P_1\cup P_2)$. On pose $\omega_j=\Omega_j\cap\omega$.

Par la proposition 2.2.1, il existe des fonctions $\nu_1, \cdots, \nu_m$ dans $\mathscr{O}(\boldsymbol{R}^n+i\omega)$ vérifiant

$$h_{K'}(x)+\varepsilon|x|\leqq\inf_{1\leqq k\leqq m}\mathrm{Re}\,\nu_k(z)\leqq h_{K'}(x)+2\varepsilon|x|+C^{te}\ ,\quad z\in\boldsymbol{R}^n+i\omega\ .$$

On définit les fonctions $g_{k,j}\in\mathscr{O}(\boldsymbol{R}^n+i\omega_j)$ par $g_{k,j}(z)=f_j(z)\exp(-\nu_k(z))$. Pour tout $\delta>0$, on peut trouver une constante $C(\delta, \varepsilon/2)$ pour laquelle

$$|g_{k,j}(x+iy)|\leqq C(\delta, \varepsilon/2)\exp(h_{K'}(x)+(\varepsilon/2)|x|-\mathrm{Re}\,\nu_k(z))$$

pour $z\in\boldsymbol{R}^n+i\omega_{j,-\delta}$. Si on pose $g_{k,j,y}(x)=g_{k,j}(x+iy)(x\in\boldsymbol{R}^n,\ y\in\omega_j)$, on obtient la majoration:

$$(3.2)\qquad |g_{k,j,y}(x)|\leqq C^{te}\exp\Big(-\frac{\varepsilon|x|}{2}\Big)\quad(x\in\boldsymbol{R}^n\ ,\quad y\in\omega_{j,-\delta})\ .$$

Par la formule intégrale de Cauchy, toutes les dérivées de $g_{k,j,y}$ vérifient une majoration du type (3.2) avec une constante qui ne dépend pas de $y\in\omega_{j,-\delta}$; autrement dit, pour tout $y\in\omega_j$, $g_{k,j,y}$ est dans $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$, et la famille $(g_{k,j,y})_{y\in P_j}$ est bornée dans $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$. On pose, pour $\xi\in\boldsymbol{R}^n$

$$\widehat{g_{k,j,y}}(\xi)=\int_{\boldsymbol{R}^n}g_{k,j,y}(x)\exp(-i\langle x, \xi\rangle)dx\ .$$

La fonction $g_{k,j,y}$ est dans $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ et on a la formule de réciprocité

$$g_{k,j}(z)=(2\pi)^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\widehat{g_{k,j,y}}(\xi)\exp(i\langle x, \xi\rangle)d\xi\quad(z\in\boldsymbol{R}^n+i\omega_j)\ .$$

Par le théorème de Cauchy-Poincaré, l'intégrale

$$h_{k,j}(\xi)=e^{\langle y,\xi\rangle}\widehat{g_{k,j,y}}(\xi)=\int_{R^n} g_{k,j}(z)\exp(-i\langle z,\xi\rangle)dx$$

est indépendante de $y\in\omega_j$. La formule de réciprocité s'écrit

$$g_{k,j}(z)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{-\langle y,\xi\rangle}h_{k,j}(\xi)\exp(i\langle x,\xi\rangle)d\xi \quad (z\in \boldsymbol{R}^n+i\omega_j)\ . \tag{3.3}$$

La démonstration de (3.1) se fait en deux parties.

1) Supposons avoir montré que $h_{k,1}=h_{k,2}$, et notons h_k cette fonction. L'image par la transformation de Fourier de la famille $(g_{k,j,y})_{y\in P_j}$ est un borné de $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$, ce qui prouve l'existence d'une constante M telle que

$$|\widehat{g_{k,j,y}}(\xi)|\leqq M(1+|\xi|^2)^{-n} \quad (\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ y\in P_j)\ ,$$

d'où l'inégalité

$$|h_k(\xi)|\leqq Me^{\langle y,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{-n} \quad (\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ y\in P_1\cup P_2)\ . \tag{3.4}$$

Pour chaque ξ fixé, l'ensemble des y vérifiant (3.4) est un demi-espace fermé Π_ξ, et l'intersection de tous les Π_ξ est un convexe qui contient $P_1\cup P_2$. On en déduit que (3.4) est encore vrai pour tout $y\in P$. Definissons la fonction

$$g_k(x+iy)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp(-\langle y,\xi\rangle)h_k(\xi)\exp(i\langle x,\xi\rangle)d\xi\ .$$

D'après la majoration (3.4), g_k est définie, holomorphe et bornée dans $\boldsymbol{R}^n+i\mathring{P}$. Par (3.3), g_k co¨ncide avec $g_{k,j}$ dans $\boldsymbol{R}^n+i\mathring{P}_j$. On pose $f_{P,\varepsilon}=g_k\exp(\nu_k)$; $f_{P,\varepsilon}$ co¨ncide avec f_j dans $\Omega_j\cap P$. Soit

$$M'=\sup_{1\leqq k\leqq m}\sup\{|g_k(z)|;\ z\in\boldsymbol{R}^n+i\mathring{P}\}\ .$$

On a la majoration, pour $z\in\boldsymbol{R}^n+i\mathring{P}$

$$|f_{P,\varepsilon}(z)|\leqq M'\exp(\operatorname{Re}\nu_k(z)) \quad (k=1,\cdots,m)\ ,$$

d'où

$$|f_{P,\varepsilon}(z)|\leqq M'\inf_{1\leqq k\leqq m}\exp(\operatorname{Re}\nu_k(z))\leqq M'\exp(h_{K'}(x)+2\varepsilon|x|+C^{te})\ ,$$

ce qui prouve (3.1). Il reste à montrer

2) Pour tout $\xi\in\boldsymbol{R}^n$, $h_{k,1}(\xi)=h_{k,2}(\xi)$.

On veut montrer l'égalité des distributions $h_{k,1}$ et $h_{k,2}$. Pour cela, on fixe $\psi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$; le théorème sera entièrement démontré, si on prouve que

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} h_{k,1}(\xi)\psi(\xi)d\xi=\int_{\boldsymbol{R}^n} h_{k,2}(\xi)\psi(\xi)d\xi \ .$$

Pour tout $\rho>0$, on pose

$$\psi_\rho(\zeta)=(2\pi\rho)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}\psi(t)\exp\left(-\frac{1}{\rho}(\zeta-t)^2\right)dt \ .$$

Pour un certain $a'>0$, $\operatorname{supp}\psi\subset[-a', a']^n$, et par un calcul simple, on obtient la majoration

$$|\psi_\rho(\zeta)|\leqq c_\rho \exp\left[\eta^2/\rho-\sum_{j=1}^n\frac{1}{\rho}(|\xi_j|-a')^2\right],$$

qui prouve que $\psi_\rho\in Q_0$, et donc, par le théorème 1.3.1, que $\mathscr{F}\psi_\rho$ est dans Q_0.

Comme ω rencontre Ω_1 et Ω_2, on peut trouver un compact convexe K de ω qui rencontre Ω_1 et Ω_2. Par le lemme 3.1.3, $b(f_j)\in Q'(\boldsymbol{R}^n+iK;\ K')$ $(j=1, 2)$. Or la fonction $e^{-\nu_k}\mathscr{F}\psi_\rho$ est dans $Q(\boldsymbol{R}^n+iK;\ K')$. L'hypothèse $b(f_1)=b(f_2)$ se traduit par l'égalité

$$\langle b(f_1), \exp(-\nu_k(z))\mathscr{F}\psi_\rho(z)\rangle=\langle b(f_2), \exp(-\nu_k(z))\mathscr{F}\psi_\rho(z)\rangle \ .$$

Mais

$$\langle b(f_j), \exp(-\nu_k(z))\mathscr{F}\psi_\rho(z)\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} f_j(x+iy_j)\exp(-\nu_k(x+iy_j))\psi_\rho(\xi)$$
$$\times\exp(-i\langle\xi, x+iy_j\rangle)dxd\xi$$

(avec $y_j\in K\cap\Omega_j$) et comme

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f_j(x+iy_j)\exp(-\nu_k(x+iy_j))\exp(-i\langle\xi, x+iy_j\rangle)dx=h_{k,j}(\xi) \ ,$$

on a finalement

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\psi_\rho(\xi)h_{k,1}(\xi)d\xi=\int_{\boldsymbol{R}^n}\psi_\rho(\xi)h_{k,2}(\xi)d\xi \ .$$

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de montrer que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^n}\psi_\rho(\xi)h_{k,j}(\xi)d\xi=\int_{\boldsymbol{R}^n}\psi(\xi)h_{k,j}(\xi)d\xi \ . \tag{3.5}$$

Au moyen d'un changement de variables, on écrit

$$\psi_\rho(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\psi(\xi-t\sqrt{\rho})\exp(-t^2)dt\ ,$$

d'où

$$|\psi_\rho(\xi)|\leqq\|\psi\|_\infty(2\pi)^{-n/2}\int_{B(\xi/\sqrt{\rho},a'/\sqrt{\rho})}\exp(-t^2)dt\ ,$$

où $B(\xi_0, r)$ est la boule de centre ξ_0 et de rayon r pour la norme produit $x\to|x|$ dans $\boldsymbol{R}^n$. Donc pour tout $\lambda>0$, il existe une constante $c(\lambda)$ qui ne dépend ni de ξ, ni de ρ ($\rho\leqq 1$) telle que

$$|\psi_\rho(\xi)|\leqq c(\lambda)e^{-\lambda|\xi|}\ .$$

Comme on sait que $\lim_{\rho\to 0}\psi_\rho(\xi)=\psi(\xi)$, en prenant $\lambda>0$ assez grand, on peut appliquer le théorème de convergence de Lebesgue pour montrer (3.5), ce qui achève la démonstration du théorème.

Si dans les hypothèses du théorème 3.2.1, on prend $\Omega_1=\Omega_2$ et $f_1=f_2$, on obtient un théorème de prolongement avec croissance dans les domaines tubulaires.

COROLLAIRE 3.2.2. *Soit Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$. L'application de restriction*

$$\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n+i\,\mathrm{co}(\Omega);\ K')\longrightarrow\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n+i\Omega;\ K')$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

4. Transformation de Cauchy.

Dans tout ce paragraphe, K' est un convexe compact de $\boldsymbol{R}^n$, $K=K_1\times\cdots\times K_n$ est un produit d'intervalles compacts, $F=F_1\times\cdots\times F_n$ est un produit d'intervalles fermés, et $L=F+iK$ s'écrit $L_1\times\cdots\times L_n$, où $L_j=F_j+iK_j$.

Si ζ et $z\in\boldsymbol{C}^n$, on pose également

$$\frac{\exp(-(\zeta-z)^2)}{\zeta-z}=\prod_{j=1}^{n}\frac{\exp(-(\zeta_j-z_j)^2)}{\zeta_j-z_j}\ .$$

4.1. *Calcul du noyau de l'application $\bar{b}$.*

Par la lettre r on désignera un nombre positif ou $+\infty$. Rappelons que L_r est l'r-voisinage de L pour r positif si $r=+\infty$, on pose $L_r=\boldsymbol{C}^n$.

DÉFINITION 4.1.1. On pose

$$R(L_r \# L;\ K')=\lim_{\varepsilon,\varepsilon'>0}\operatorname{proj} H_b(\overline{L_{r-\varepsilon}} \# L_\varepsilon;\ h_{K'}(x)+\varepsilon'|x|)\ ,$$

et

$$R(L_r \#_j L;\ K')=\lim_{\varepsilon,\varepsilon'>0}\operatorname{proj} H_b(\overline{L_{r-\varepsilon}} \#_j L_\varepsilon;\ h_{K'}(x)+\varepsilon'|x|)\ ,$$

où, par convention, $r-\varepsilon=+\infty$ si $r=+\infty$.

Ces deux espaces sont du type Fréchet-Schwartz. Si $L=\boldsymbol{R}^n+iK$, on a l'identité

$$R(\boldsymbol{C}^n \# L;\ K')=\tilde{\mathscr{O}}(\boldsymbol{C}^n \# L;\ K')\ .$$

DÉFINITION 4.1.2. Soit $f\in R(L_r \# L;\ K')$. On définit la forme linéaire $\bar{b}(f)$ continue sur $Q(L;\ K')$ en posant, pour $\varepsilon>0$ assez petit,

$$\langle \bar{b}(f),\ \varphi\rangle=(-1)^n\int_{\partial_0 L_\varepsilon} f(z)\varphi(z)dz$$

(Par le théorème de Cauchy, cette intégrale ne dépend pas de ε).

L'application $\bar{b}$ ainsi définie est une application bornée de $R(L_r \# L;\ K')$ dans $Q'(L;\ K')$.

THÉORÈME 4.1.3. *Soit* $f\in R(L_r \# L;\ K')$. *Il y a équivalence entre*

(4.1) *Pour toute* $\varphi\in Q(L;\ K')$, $\displaystyle\int_{\partial_0 L_\varepsilon} f(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta=0,$

et

(4.2) $\displaystyle f=\sum_{j=1}^{n} f_j,$ *où* $f_j\in R(L_r \#_j L;\ K')$.

Autrement dit, $\operatorname{Ker}\bar{b}=\sum_{j=1}^{n} R(L_r \#_j L;\ K')$.

DÉMONSTRATION. Si f vérifie (4.2), il résulte du théorème de Fubini et du théorème de Cauchy que $f\in\operatorname{Ker}\bar{b}$. On suppose maintenant que f vérifie (4.1).

Par la formule intégrale de Cauchy, on a

$$f(z)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\partial_0(L_{r\varepsilon},L_\varepsilon)} f(\zeta)\frac{\exp(-(\zeta-z)^2)}{\zeta-z}d\zeta\ .$$

Cette formule vaut pour tout $z\in L_r \# L$, en supposant qu'on choisit ε assez petit pour que z soit dans $L_{r-\varepsilon} \# \bar{L}_\varepsilon$. (Pour plus de détails, on pourra consulter [8], théorème 3.1, dans le cas d'une variable, le cas de n-variables s'en déduisant aisément).

D'autre part, en raison des orientations, on a

$$\int_{\partial(L_{j,r-\varepsilon}\setminus L_{j,\varepsilon})}=\int_{\partial(L_{j,r-\varepsilon})}-\int_{\partial L_{j,\varepsilon}} .$$

Si φ est intégrable sur $\partial_0(L_{r-\varepsilon}\#L_\varepsilon)=\prod_{j=1}^n\partial(L_{j,r-\varepsilon}\setminus L_{j,\varepsilon})$, on peut écrire, grâce au théorème de Fubini,

$$\int_{\partial_0(L_{r-\varepsilon}\#L_\varepsilon)}\varphi(\zeta)\,d\zeta=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\int_{\partial_{j,r,\varepsilon}}\varphi(\zeta)d\zeta+(-1)^n\int_{\partial L_{1,\varepsilon}\times\cdots\times\partial L_{n,\varepsilon}}\varphi(\zeta)d\zeta ,$$

où

$$\partial_{j,r,\varepsilon}=\Big(\prod_{1\leqq l<j}\partial L_{l,\varepsilon}\Big)\times\partial L_{j,r-\varepsilon}\times\Big(\prod_{j<l\leqq n}\partial(L_{l,r-\varepsilon}\setminus L_{l,\varepsilon})\Big) .$$

On applique cette décomposition à la fonction $f(\zeta)\exp(-(\zeta-z)^2)/(\zeta-z)$, en remarquant que si $z\in L_r\#L$, la fonction: $\zeta\to\exp((\zeta-z)^2)/(\zeta-z)$ est dans $Q(L;K')$. De plus, l'hypothèse (4.1) s'écrit

$$\int_{\partial L_{1,\varepsilon}\times\cdots\times\partial L_{n,\varepsilon}}f(\zeta)\frac{\exp(-(\zeta-z)^2)}{\zeta-z}d\zeta=0 .$$

On obtient donc la décomposition finale pour $z\in L_r\#L$

$$f(z)=\sum_{j=1}^n\frac{(-1)^{j-1}}{(2i\pi)^n}\int_{\partial_{j,r,\varepsilon}}f(\zeta)\frac{\exp(-(\zeta-z)^2)}{\zeta-z}d\zeta .$$

On pose

$$f_j(z)=\frac{(-1)^{j-1}}{(2i\pi)^n}\int_{\partial_{j,r,\varepsilon}}f(\zeta)\frac{\exp(-(\zeta-z)^2)}{\zeta-z}d\zeta$$

pour $z\in L_r\#L$ (Là encore, on suppose ε assez petit pour que z soit dans $L_{r-\varepsilon}\#\bar{L}_\varepsilon$). D'après l'écriture $\partial_{j,r,\varepsilon}$, le domaine naturel de définition de f_j est

$$(C\setminus L_1)\times\cdots\times(C\setminus L_{j-1})\times L_{j,r}\times(L_{j+1,r}\setminus L_{j+1})\times\cdots\times(L_{n,r}\setminus L_n) ;$$

ce domaine contient en particulier $L_r\#_j L$ et, par des arguments classiques, on montre que f_j est holomorphe dans $L_r\#_j L$. Le théorème 4.1.3 sera démontré si on prouve que f_j est dans $R(L_r\#_j L;K')$.

On fixe j $(1\leqq j\leqq n)$, $\varepsilon>0$ et $\varepsilon'>0$. On cherche une constante $M_{\varepsilon,\varepsilon'}\geqq0$ telle que $|f_j(z)|\leqq M_{\varepsilon,\varepsilon'}\exp(h_{K'}(x)+2\varepsilon'|x|)$ pour $z\in\overline{L_{r+2\varepsilon}\#_j L_{2\varepsilon}}$.

On sait qu'il existe une constante $C_{\varepsilon,\varepsilon'}$ telle que

$$|f(\zeta)|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}\exp(h_{K'}(\xi)+\varepsilon'|\xi|)\quad(\zeta\in\overline{L_{r-\varepsilon}\#L_\varepsilon}) ,$$

d'où la majoration

$$|f_j(z)|\leqq\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}C_{\varepsilon,\varepsilon'}\int_{\partial_{j,r,\varepsilon}}\exp[h_{K'}(\xi)+\varepsilon'|\xi|-\mathrm{Re}(\zeta-z)^2]d\zeta\ .$$

Comme η et y varient dans des ensembles bornés, on obtient

$$|f_j(z)|\leqq C^{te}\sup_{\xi\in R^n}\exp[h_{K'}(\xi)+2\varepsilon'|\xi|-(\xi-x)^2]\quad(z\in\overline{L_{r-2\varepsilon}}\,\sharp_j\,L_{2\varepsilon})\ .$$

Il reste donc à prouver l'inégalité

$$\sup_{\xi\in R^n}(h_{K'}(\xi)+2\varepsilon'|\xi|-(\xi-x)^2)\leqq C^{te}+h_{K'}(x)+2\varepsilon'|x|\ . \tag{4.3}$$

Soit $P=\overline{K'_{2\varepsilon'}}$. L'inégalité (4.3) équivaut à la suivante:

$$\sup_{x,\xi\in R^n}(|h_P(\xi)-h_P(x)|-(\xi-x)^2)<+\infty\ ,$$

que l'on peut déduire du lemme 2.3.2. Le théorème 4.1.3 est démontré. On en déduit un résultat du type Phragmén-Lindelöf:

COROLLAIRE 4.1.4. *On pose* $K=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. *Etant donnés des nombres* $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ $(0<\alpha_j<\pi/(b_j-a_j)(\leqq+\infty))$ *et* $f\in R(L_r\,\sharp\,L;K')$. *On suppose que dans un certain* $L_{r'}\,\sharp\,L$ $(0<r'\leqq r)$, f *s'écrit* $\sum_{j=1}^n f_j$, *où* $f_j\in\mathcal{O}(L_{r'}\,\sharp_j\,L)$ *vérifie la majoration:*

(4.4) *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe deux constantes* M_ε *et* A_ε *telles que*

$$|f_j(z)|\leqq M_\varepsilon\exp\left[A_\varepsilon\sum_{k=1}^n\exp(\alpha_k|x_k|)\right]\quad(z\in L_{r'}\,\sharp_j\,L_\varepsilon)\ .$$

Alors $f\in\sum_{j=1}^n R(L_r\,\sharp_j\,L;K')$.

DÉMONSTRATION. Par une translation sur les imaginaires, on peut se ramener au cas où $K=[-a_1,a_1]\times\cdots\times[-a_n,a_n]$ $(a_j\geqq0)$. On veut montrer que f vérifie (4.1). On fixe donc $\varphi\in Q(L;K')$.

On choisit des nombres β_j et un nombre ρ $(0<\rho<r')$ tels que $\alpha_j<\beta_j<\pi/(2a_j)$ et $\beta_j(a_j+\rho)<\pi/2$. Pour $t>0$, on pose

$$h_t(z)=\exp\left[-t\sum_{k=1}^n(\exp(\beta_kz_k)+\exp(-\beta_kz_k))\right].$$

Par le choix des β_k et de ρ, on peut trouver un $\delta>0$ tel que $\cos\beta_ky_k>\delta$ pour $z\in\bar{L}_\rho$, d'où la majoration

$$|h_t(z)|\leqq\exp\left[-t\delta\sum_{k=1}^n(\exp(\beta_kx_k)+\exp(-\beta_kx_k))\right]\quad(z\in\bar{L}_\rho)\ .$$

Comme la fonction $z\to\sum_{k=1}^n(\exp(\beta_kx_k)+\exp(-\beta_kx_k))$ se comporte à l'infini comme la fonction $z \to \sum_{k=1}^{n} \exp(\beta_k |x_k|)$, la fonction $f_j(\zeta)h_t(\zeta)$ est dans $R(L_\rho \#_j L; K')$ pour tout $t>0$.

On déduit du théorème 4.1.3 que

$$\int_{\partial_0 L_\varepsilon} f(\zeta)h_t(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta = 0 \quad (t>0) .$$

Mais la fonction h_t est majorée en module par 1 sur $\bar{L}_\rho$ et converge simplement vers 1 quand t tend vers zéro. On conclut alors par le théorème de convergence de Lebesgue.

4.2. *La transformation de Cauchy.*

Par le théorème 4.1.3, l'ensemble $\sum_{j=1}^{n} R(C^n \#_j L; K')$ est un sous-espace fermé de $R(C^n \# L; K')$. On note $H_L^n(C^n, R; K')$ l'espace quotient

$$R(C^n \# L; K') \Big/ \sum_{j=1}^{n} R(C^n \#_j L; K') .$$

Comme quotient d'un espace Fréchet-Schwartz par un sous-espace fermé, $H_L^n(C^n, R; K')$ est encore du type Fréchet-Schwartz. On note encore $\bar{b}$ l'application de $H_L^n(C^n, R; K')$ dans $Q'(L; K')$, déduite de la précédente par factorisation, ce qui donne le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} R(C^n \# L; K') \arrow[rr, "\bar{b}"] \arrow[dr] & & Q'(L; K') . \\ & H_L^n(C^n, R; K') \arrow[ur, "\bar{b}"'] & \end{tikzcd}$$

LEMME 4.2.1. *Soit $T \in Q'(L; K')$. La fonction*

$$z \to \check{T}(z) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n < T_\zeta, \frac{\exp(-(z-\zeta)^2)}{z-\zeta} >$$

est dans $R(C^n \# L; K')$.

DÉMONSTRATION. Si $z \in L_\rho \# L_{2\varepsilon}$ $(\rho > 2\varepsilon)$, on a, d'après la proposition 2.1.1, la représentation

$$\check{T}(z) = \int_{\bar{L}_\varepsilon} \frac{\exp(-(z-\zeta)^2)}{z-\zeta} \exp(h_{K'}(\xi) + \varepsilon'|\xi|)d\mu(\zeta) ,$$

où μ est une mesure bornée sur $\bar{L}_\varepsilon$.

On en déduit la majoration

$$|\check{T}(z)| \leqq C^{te} \sup_{\xi \in R^n} \exp[-(x-\xi)^2 + h_{K'}(\xi) + \varepsilon'|\xi|] ,$$

qui devient, d'après (4.3),

$$|\check{T}(z)|\leqq C'' \exp(h_{K'}(x)+\varepsilon'|x|) \quad (z\in L_\rho \sharp L_{2\varepsilon}),$$

d'où le lemme.

DÉFINITION 4.2.2. On appelle transformation de Cauchy de la fonctionnelle $T\in Q'(L; K')$, la classe de la fonction $\check{T}$ dans $H^n_L(C^n, R; K')$.

THÉORÈME 4.2.3. *La transformation de Cauchy*

$$Q'(L; K') \xrightarrow{C} H^n_L(C^n, R; K')$$

est un isomorphisme topologique, inverse de l'application $\bar{b}$.

DÉMONSTRATION. On sait déjà par le théorème 4.1.3. que $\bar{b}$ est injective. Il reste à montrer que si $T\in Q'(L; K')$, alors $\bar{b}(\check{T})=T$. Or si φ est dans $Q(L; K')$, on a

$$\begin{aligned}\langle \bar{b}(\check{T}), \varphi\rangle &= (-1)^n \int_{\partial_0 L_\varepsilon} \varphi(z) < T_\zeta, \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \frac{\exp(-(z-\zeta)^2)}{z-\zeta} > dz \\ &= \left\langle T_\zeta, \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 L_\varepsilon} \varphi(z) \frac{\exp(-(z-\zeta)^2)}{z-\zeta} dz \right\rangle\end{aligned}$$

et ceci, d'après la formule intégrale de Cauchy, est égal à $\langle T, \varphi\rangle$, d'où le résultat.

4.3. *L'espace* $\tilde{H}^n_L(C^n, R; K')$.

LEMME 4.3.1. *Si* $K'_1\subset K'_2$, *l'application naturelle*

$$H^n_L(C^n, R; K'_1) \xrightarrow{\mathscr{I}} H^n_L(C^n, R; K'_2)$$

est continue et injective.

DÉMONSTRATION. Si $f\in R(C^n \sharp L; K'_1)$ a une image nulle par $\mathscr{I}$, alors f est dans $\sum_{j=1}^n R(C^n \sharp_j L; K'_2)$, et vérifie (4.4). Par le corollaire 4.1.4, f est dans $\sum_{j=1}^n R(C^n \sharp_j L; K'_1)$, d'où le lemme.

Utilisant les applications $\mathscr{I}$ du lemme 4.3.1, on définit l'espace

$$\tilde{H}^n_L(C^n, R; K') = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \varepsilon'>0}} \text{proj}\, H^n_L(C^n, R; \bar{K}'_{\varepsilon'}) .$$

Un élément $[g]$ de $\tilde{H}^n_L(C^n, R; K')$ est la donnée d'une famille $(g_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ de fonctions vérifiant

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad & g_{\varepsilon'} \in R(\boldsymbol{C}^n \# L;\ \overline{K'_{\varepsilon'}}) \quad \text{et} \\
& \text{si} \quad 0<\delta<\delta',\ g_{\delta'}-g_{\delta} \in \sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j L;\ \bar{K}'_{\delta'})\ .
\end{aligned}
$$

Il existe une dualité naturelle entre $\tilde{H}_L^n(\boldsymbol{C}^n, R;\ K')$ et $Q(L;\ K')$: soit $[g] \in \tilde{H}_L^n(\boldsymbol{C}^n, R;\ K')$; si $\varphi \in Q(L;\ K')$ il existe un $\varepsilon>0$ et un $\varepsilon'>0$ tels que $\varphi \in H_b(\bar{L}_\varepsilon;\ -h_{K'}(x)-\varepsilon'|x|)$. Alors d'après le théorème 4.1.3 et la condition (4.5), l'intégrale

$$
\langle \tilde{b}([g]),\ \varphi\rangle = (-1)^n \int_{\partial_0 L_\varepsilon} g_\delta(z)\varphi(z)dz
$$

ne dépend pas de δ $(0<\delta<\varepsilon')$. On définit ainsi une application linéaire bornée de $\tilde{H}_L^n(\boldsymbol{C}^n, R;\ K')$ dans $Q'(L;\ K')$, notée $\tilde{b}$.

Considérons le diagramme

$$
(4.6)\qquad
\begin{array}{ccc}
H_L^n(\boldsymbol{C}^n, R;\ K') & \xrightarrow{\ \mathscr{I}\ } & \tilde{H}_L^n(\boldsymbol{C}^n, R;\ K')\ . \\
 & {\scriptstyle b}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \tilde{b}} & \\
 & Q'(L;\ K') &
\end{array}
$$

Le résultat suivant est encore une conséquence du théorème 4.1.3.

Proposition 4.3.2. *Le diagramme* (4.6) *est commutatif et formé d'isomorphismes topologiques.*

Ceci signifie en particulier que, si $(g_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ vérifie (4.5), alors il existe une fonction $f \in R(\boldsymbol{C}^n \# L;\ K')$ telle que, pour tout ε', la fonction $g_{\varepsilon'}-f$ soit dans $\sum_{j=1}^n R(\boldsymbol{C}^n \# L;\ \bar{K}'_{\varepsilon'})$, et cette fonction est unique modulo $\sum_{j=1}^n R(\boldsymbol{C}^n \#_j L;\ K')$. On sait construire f au moyen de la transformation de Cauchy.

4.4. *Cas où $L=\boldsymbol{R}^n$: comparaison avec les hyperfonctions.*

Soient $\mathscr{R}$ le faisceau des Fourier-hyperfonctions (cf. [4]) et $\mathscr{B}$ le faisceau des hyperfonctions (cf. [14]):

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{R}(\boldsymbol{D}^n) = H_{\boldsymbol{D}^n}^n(\tilde{\boldsymbol{C}}^n,\ \tilde{\mathscr{O}}) \quad (\text{où } \tilde{\boldsymbol{C}}^n = \boldsymbol{D}^n + i\boldsymbol{R}^n)\ , \\
&\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n) = H_{\boldsymbol{R}^n}^n(\boldsymbol{C}^n,\ \mathscr{O})\ .
\end{aligned}
$$

Au moyen de l'isomorphisme de Leray, on construit (cf. [14], ch. IV, §2) une application b' de valeur au bord

$$
\mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \xrightarrow{\ b'\ } \mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n)\ ,
$$

qui est surjective et de noyau $\sum_{j=1}^{n} \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)$ ([14], théorème 4.2.1).

En utilisant ([4], §2, remarque 1 et théorème 2.1.4), on peut reprendre cette construction pour définir une application de valeur au bord, notée encore b'

$$\tilde{\mathscr{O}}(\boldsymbol{D}^n + i\boldsymbol{I}^n) \xrightarrow{b'} \mathscr{R}(\boldsymbol{D}^n)$$

qui est surjective et de noyau $\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathscr{O}}((\boldsymbol{D}^n + i\boldsymbol{I}^n) \#_j \boldsymbol{D}^n)$.

Si on prend $r=1$ et $r=+\infty$, et si on raisonne comme dans le théorème 4.2.3, on voit que l'application naturelle

$$R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big) \longrightarrow R((\boldsymbol{R}^n + i\boldsymbol{I}^n) \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R((\boldsymbol{R}^n + i\boldsymbol{I}^n) \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big)$$

(où $R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n)$ signifie $R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n; \{0\})$) est un isomorphisme. Comme $R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) = \tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\boldsymbol{C}}^n \# \boldsymbol{D}^n)$, on obtient canoniquement un isomorphisme

$$R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big) \xrightarrow{b'} \mathscr{R}(\boldsymbol{D}^n) .$$

On considère alors le diagramme

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big) & \xrightarrow{\mathscr{I}_0} & \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big) \\ \sim \big\downarrow b' & & \wr \big\downarrow b' \\ \mathscr{R}(\boldsymbol{D}^n) & \xrightarrow{\rho} & \mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n) \end{array}$$

où $\mathscr{I}_0$ est l'application naturelle et ρ l'application de restriction du faisceau $\mathscr{R}$.

LEMME 4.4.1. *Le diagramme* (4.7) *est commutatif.*

La démonstration de ce lemme n'est en fait qu'une vérification, qui s'effectue en réécrivant la construction de l'application b'.

THÉORÈME 4.4.2. *L'application naturelle*

$$R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n; K') \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n; K')\Big) \xrightarrow{\mathscr{I}_{K'}} \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big)$$

est surjective et non injective.

DÉMONSTRATION. L'application ρ est surjective, puisque le faisceau $\mathscr{R}$ est flasque ([4], corollaire 3.2.3). D'autre part, il est connu que ρ n'est pas injective (on pourra trouver un exemple d'un élément non trivial du noyau de ρ dans [11]). On en déduit le théorème dans le cas où $K'=\{0\}$.

Au moyen de l'isomorphisme

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} &e^{\xi_0}: Q(L;\ \xi_0+K') \longrightarrow Q(L;\ K') \\ &\text{défini par} \quad \varphi \longrightarrow \exp(\langle \xi_0, z\rangle)\varphi(z) , \end{aligned}$$

on se ramène au cas où K' contient 0.

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big) \arrow[rr, "\mathscr{F}_{K',0}"] \arrow[dr, "\mathscr{F}_0"'] & & R(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n;\ K') \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} R(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n;\ K')\Big) \arrow[dl, "\mathscr{F}_{K'}"] \\ & \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n) \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{n} \mathscr{O}(\boldsymbol{C}^n \#_j \boldsymbol{R}^n)\Big) & \end{tikzcd}$$

prouve que $\mathscr{F}_{K'}$ est surjective. Mais comme $\mathscr{F}_{K',0}$ est injective d'après le lemme 4.3.1, on voit que $\mathscr{F}_{K'}$ ne peut être injective, d'où le théorème.

§ 5. La transformation de Fourier-Borel.

5.1. *Transformation $\mathscr{F}_b$ et valeurs au bord.*

Soient K et S deux convexes compacts de $\boldsymbol{R}^n$, Γ un cône ouvert propre; Γ^* son cône dual. On écrira $Q(L)$ pour $Q(L;\ \{0\})$.

DEFINITION 5.1.1. Si ω est un ouvert convexe de $\boldsymbol{R}^n$, on pose

$$\operatorname{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\omega;\ K+iS) = \lim_{\varepsilon, \varepsilon'>0} \operatorname{proj} H_b(\boldsymbol{R}^n+i\overline{\omega_{-\varepsilon'}};\ h_{K_\varepsilon}(x)+h_{S_\varepsilon}(y)) .$$

L'espace $\operatorname{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\omega;\ K+iS)$ est du type Fréchet-Schwartz, et on a l'injection continue

$$\operatorname{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\omega;\ K+iS) \hookrightarrow \widetilde{\mathscr{O}}(\boldsymbol{R}^n+i\omega;\ K) .$$

L'application b de valeur au bord définie au §3 est donc continue sur $\operatorname{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\omega;\ K+iS)$ à valeurs dans Q_0'. Si $\omega=\Gamma$, par le lemme 3.1.3, b est en fait à valeurs dans $Q'(\boldsymbol{R}^n;\ K)$.

LEMME 5.1.2. *Etant donnés ε et $\varepsilon'>0$, on a la majoration*

$$\begin{aligned} \sup\{|\exp(-i\langle z, \zeta\rangle)|\exp(\varepsilon'|\xi|);\ \xi\in\Gamma^*+S_\varepsilon,\ \eta\in K_\varepsilon\} \\ \leqq C^{te}\exp[h_{K_\varepsilon}(x)+h_{S_\varepsilon}(y)] \quad (z\in\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_{-\varepsilon'}) . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Si $\xi'\in\Gamma^*$, $y\in\Gamma_{-\varepsilon'}$ et $|t|<\varepsilon'$ $(t\in\boldsymbol{R}^n)$, on a $y+t\in\Gamma$ et $\langle\xi', y\rangle = \langle\xi', y+t\rangle - \langle\xi', t\rangle$, d'où $\langle\xi', y\rangle \leqq -\varepsilon'|\xi'|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\sup\{\langle\xi, y\rangle+\langle\eta, x\rangle+\varepsilon'|\xi|;\ \xi\in\Gamma^*+S_\varepsilon,\ \eta\in K_\varepsilon\}\\ &\quad\leqq\sup_{\xi'\in\Gamma^*}(\langle\xi', y\rangle+\varepsilon'|\xi'|)+\sup_{\xi''\in S_\varepsilon}(\langle\xi'', y\rangle+\varepsilon'|\xi''|)+\sup_{\eta\in K_\varepsilon}\langle\eta, x\rangle\\ &\quad\leqq h_{S_\varepsilon}(y)+C^{te}+h_{K_\varepsilon}(x)\ ,\end{aligned}$$

d'où le lemme.

DÉFINITION 5.1.3. Soit $T\in Q'(\Gamma^*+S+iK)$. Pour tout $z\in \boldsymbol{R}^n+i\Gamma$, on pose

$$\tilde{T}(z)=\langle T_\zeta, e^{-i\langle\zeta,z\rangle}\rangle\ .$$

Par le lemme 5.1.2, la fonction $\tilde{T}$ est dans $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS)$, et l'application $T\rightarrow\tilde{T}$ est la transformation de Fourier-Borel, notée $\mathscr{F}_b$.

THÉORÈME 5.1.4. *La transformation de Fourier-Borel*

$$\mathscr{F}_b\colon Q'(\Gamma^*+S+iK)\longrightarrow \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS)$$

est un isomorphisme topologique.

La transformation de Fourier-Borel des fonctionnelles analytiques portables par des convexes non bornés a été étudiée par de Roever dans [12], dans un cadre plus général que celui des espaces Q. Le théorème d'Ehrenpreis-Martineau y est démontré en deux parties: d'une part le théorème 3.3 (surjectivité de $\mathscr{F}_b$) et d'autre part le théorème 3.5 (injectivité de $\mathscr{F}_b$). Ce dernier théorème y est donné avec une démonstration très longue et difficile; dans le cas des espaces Q, on peut déduire l'injectivité de $\mathscr{F}_b$ du théorème 2.3.1 et calculer les valeurs de $\mathscr{F}_b^{-1}(g)$ sur un sousespace dense, c'est-à-dire, pour $\varphi\in Q(\boldsymbol{R}^k+iK)$, en termes de transformation de Fourier et de valeurs au bord (cf. (5.2)).

Soit le diagramme (où on pose $L=\Gamma^*+S+iK$)

$$\begin{tikzcd} Q'(L) \arrow[r, "\mathscr{F}_b"] \arrow[d] & \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS) \arrow[d, "b"] \\ Q'(\boldsymbol{R}^n+iK) \arrow[r, "{}^t\mathscr{F}"] & Q'(\boldsymbol{R}^n;\ K)\ . \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

LEMME 5.1.5. *Le diagramme* (5.1) *est commutatif.*

DÉMONSTRATION. Soit $T\in Q'(L)$. Si $\varphi\in Q(\boldsymbol{R}^n;\ K)$, on a

$$\begin{aligned}\langle{}^t\mathscr{F}T, \varphi\rangle&=\langle T, \mathscr{F}\varphi\rangle\\ &=\left\langle T_\zeta, \int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x+iy)e^{-i\langle\zeta,z\rangle}dx\right\rangle\quad(\text{avec } |y| \text{ assez petit})\end{aligned}$$

$$=\int_{R^n}\varphi(x+iy)\langle T_\zeta, e^{-i\langle\zeta,z\rangle}\rangle dx \quad (\text{avec } y\in\Gamma,\ |y| \text{ assez petit})$$

et ceci, d'après le lemme 3.1.3, est égal à $\langle b(\tilde{T}), \varphi\rangle$, d'où le lemme.

L'injectivité de $\mathscr{F}_b$ découle immédiatement du lemme 5.1.5. De plus, si $g\in \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS)$, et si $\varphi\in Q(\boldsymbol{R}^n+iK)$, on a

$$\langle \mathscr{F}_b^{-1}g,\ \varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}g(x+iy)dx\int_{R^n}\varphi(\xi+i\eta)e^{i\langle\zeta,z\rangle}d\zeta \tag{5.2}$$

(avec $y\in\Gamma$, $|y|$ assez petit).

On déduit aussi du lemme 5.1.5 une sorte de "surjectivité" de l'application b:

THÉORÈME 5.1.6. *Soit $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de cônes ouverts propres de $\boldsymbol{R}^n$ tels que la réunion des Γ_α^* soit dense dans $\boldsymbol{R}^n$. On suppose que S admet 0 comme point intérieur. Alors, pour toute $u\in Q'(\boldsymbol{R}^n, K)$, il existe des fonctions $f_\alpha\in \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\alpha;\ K+iS)$ telles que la famille $(b(f_\alpha))_{\alpha\in A}$ soit sommable dans $Q'(\boldsymbol{R}^n;\ K)$ et de somme u.*

DÉMONSTRATION. Soit U un voisinage de 0 contenu dans S. Par l'hypothèse faite sur les Γ_α^*, la famille des $V_\alpha=U+\Gamma_\alpha^*$ forme un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{R}^n$. Soit $(\theta_\alpha)_{\alpha\in A}$ une partition continue de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour tout $z\in \boldsymbol{C}^n$, on pose $\psi_\alpha(z)=\theta_\alpha(x)$. On définit l'espace de Banach $C_b(\boldsymbol{R}^n+i\bar{K}_\varepsilon;\ -\varepsilon'|x|)$ comme étant l'ensemble des fonctions continues sur $\boldsymbol{R}^n+i\bar{K}_\varepsilon$ qui vérifient

$$\sup\{|\varphi(z)|e^{\varepsilon'|x|};\ z\in \boldsymbol{R}^n+i\bar{K}_\varepsilon\}<+\infty\ ,$$

et muni de la norme correspondante. On pose

$$C_Q(\boldsymbol{R}^n+iK)=\lim_{\varepsilon,\varepsilon'>0}\operatorname{ind} C_b(\boldsymbol{R}^n+i\bar{K}_\varepsilon;\ -\varepsilon'|x|)\ .$$

Soit $T=(2\pi)^{-n}\,{}^t\mathscr{F}u$, qui est un élément de $Q'(\boldsymbol{R}^n+iK)$. Comme $Q(\boldsymbol{R}^n+iK)$ est un sous-espace vectoriel topologique de $C_Q(\boldsymbol{R}^n+iK)$, on peut trouver un prolongement $\bar{T}$ de T à $C_Q(\boldsymbol{R}^n+iK)$ qui est continu. On définit alors l'élément $\psi_\alpha\bar{T}$ de $C_Q'(\boldsymbol{R}^n+iK)$ en posant

$$\langle\psi_\alpha\bar{T},\ \varphi\rangle=\langle\bar{T},\ \psi_\alpha\varphi\rangle\ .$$

On définit enfin $T_\alpha\in Q'(\boldsymbol{R}^n+iK)$ comme étant la restriction de $\psi_\alpha\bar{T}$ à $Q'(\boldsymbol{R}^n+iK)$. On vérifie alors que

1) la famille $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ est sommable dans $Q'(\boldsymbol{R}^n+iK)$, et de somme T;
2) T_α est portable par Γ^*+S+iK, de type nul (cf. définition 2.4.1).

Enfin si on pose $f_\alpha=\tilde{T}_\alpha$, on vérifie par le lemme 5.1.5 que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ répond à la question, d'où le théorème.

5.2. *La transformation de Laplace.*

On prend maintenant $\Gamma=]0, +\infty[^n$, $K=\prod_{j=1}^n K_j$ et $S=\prod_{j=1}^n S_j$; le cône dual s'écrit $\Gamma^*=]-\infty, 0]^n$. On pose $L=\Gamma^*+S+iK=L_1\times\cdots\times L_n$, où $L_j=]-\infty, 0]+S_j+iK_j$. On utilisera également la variable $w=u+iv\in \boldsymbol{C}^n$.

On veut définir la transformation $\mathscr{L}$ de Laplace, de façon à obtenir le diagramme commutatif

(5.3)
$$\begin{tikzcd} Q'(\Gamma^*+S+iK)=Q'(L) \arrow[rr, "\mathscr{F}_b"] & & \operatorname{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS) \arrow[dl, "\mathscr{L}"] \\ & \tilde{H}_L^n(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{R}) \arrow[ul, "\tilde{b}"] & \end{tikzcd}$$

Pour chaque $\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_n)\in\{1, i, -1\}^n$, on pose

$$W_\theta=\prod_{j=1}^n W_{\theta_j}\subset \boldsymbol{C}^n ,$$

où

$$W_{\theta_j}=\{w_j\in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Im}\theta_j w_j>h_{K_j}(\operatorname{Re}\theta_j)+h_{S_j}(\operatorname{Im}\theta_j)\} .$$

De même, on pose $W_\theta^\varepsilon=\prod_{j=1}^n W_{\theta_j}^\varepsilon$, où

$$W_{\theta_j}^\varepsilon=\{w_j\in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Im}\theta_j w_j>h_{K_j}(\operatorname{Re}\theta_j)+h_{S_j}(\operatorname{Im}\theta_j)+\varepsilon\} .$$

On a la propriété:

$$W_\theta=\bigcup_{\varepsilon>0} W_\theta^\varepsilon \quad \text{et} \quad \bigcup_{\theta\in\{1,i,-1\}^n} W_\theta=\boldsymbol{C}^n \,\sharp\, L . \tag{5.4}$$

Pour tout $\varepsilon'>0$ et chaque $\theta\in\{1, i, -1\}^n$, on pose

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\varepsilon'}(w;\theta) &= (2\pi)^{-n}\int_{i\underline{\varepsilon}'+\Gamma_\theta} g(\zeta)e^{i\langle w,\zeta\rangle}d\zeta \\ &= \frac{\theta_1\times\cdots\times\theta_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty g\Big(i\underline{\varepsilon}'+\sum_{j=1}^n t_j\theta_j e_j\Big)\exp\big(i\langle w,\ i\underline{\varepsilon}'+\textstyle\sum t_j\theta_j e_j\rangle\big) \\ &\qquad\times dt_1\cdots dt_n , \end{aligned} \tag{5.5}$$

où on a utilisé les notations suivantes:

— e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\boldsymbol{C}^n$: $e_j=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$

—— Γ_θ est le cône $\left\{\sum_{j=1}^{n} t_j\theta_j e_j;\ t_j\geqq 0\right\}\subset \boldsymbol{R}^n+i\bar{\Gamma}$

—— $\underline{\varepsilon}'=(\varepsilon', \cdots, \varepsilon')\in \boldsymbol{R}^n$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la transformation de Laplace grâce au résultat suivat:

THÉORÈME 5.2.1. *Soit* $g\in \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS)$.

(i) *Si* $w\in W_\theta$, *l'intégrale* (5.5) *converge absolument, et on a la majoration*:

Pour tout $\varepsilon>0$, *il existe une constante* $C_{\varepsilon,\varepsilon'}$ *telle que*

$$|\hat{g}_{\varepsilon'}(w;\ \theta)|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}\exp\left(-\varepsilon'\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\quad (w\in W_\theta^\varepsilon)\ . \tag{5.6}$$

(ii) *Si* $w\in W_\theta\cap W_{\theta'}$, $\hat{g}_{\varepsilon'}(w;\ \theta)=\hat{g}_{\varepsilon'}(w;\ \theta')$, *et la fonction* $\hat{g}_{\varepsilon'}(w)$ *obtenue par recollement des fonctions* $\hat{g}_{\varepsilon'}(w;\ \theta)$ *est dans* $R(\boldsymbol{C}^n \# L;\ \varepsilon' B)$.

(iii) *La famille de fonctions* $(\hat{g}_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ *vérifie* (4.5) *et définit donc un élément de* $\tilde{H}^n_L(\boldsymbol{C}^n, R)$, *noté* $\mathscr{L}g$.

(iv) $\mathscr{F}_b\circ\tilde{b}(\mathscr{L}g)=g$.

DÉFINITION 5.2.2. L'application $\mathscr{L}\colon \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma;\ K+iS)\to \tilde{H}^n_L(\boldsymbol{C}^n;\ R)$ définie en (iii) est la transformation de Laplace.

COROLLAIRE 5.2.3. *Le diagramme* (5.3) *est commutatif et formé d'isomorphismes topologiques.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.2.1. On ne développera pas certains points de la démonstration qui sont une extension immédiate des résultats du §5 de [8].

On obtient (i) par une simple majoration. Si $w\in W_\theta\cap W_{\theta'}$, on montre que $\hat{g}_{\varepsilon'}(w,\ \theta)=\hat{g}_{\varepsilon'}(w,\ \theta')$ par une application répétée du lemme 5.2 de [8]. Par (5.4) et (5.6), on en déduit que $\hat{g}_{\varepsilon'}$ est dans $R(\boldsymbol{C}^n \# L;\ \varepsilon' B)$.

Le partie essentielle de la démonstration est résumée dans le résultat suivant:

LEMME 5.2.4. *Soient* ε *et* $\varepsilon'>0$ *fixés. Si* $z\in \boldsymbol{R}^n+i\Gamma_{-\varepsilon'}$, *on a*

$$(-1)^n\int_{\partial_0 L_\varepsilon}\hat{g}_{\varepsilon'}(w)e^{-i\langle w,z\rangle}dw=g(z)\ .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.2.4. On définit ∂_{θ_j} comme étant la demi-droite ou le segment orienté de $\partial \mathrm{L}_{j,\varepsilon}$ contenu dans W_{θ_j}. Etant donné un entier k $(1\leqq k\leqq n)$, on fixe $z_1, \cdots z_k$ dans $\boldsymbol{R}+i]\varepsilon', +\infty[$ et $\zeta'=$

$(\zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_n)$ dans $(\boldsymbol{R}+i[\varepsilon', +\infty[)^{n-k}$.

On veut montrer la formule

$$g(z_1, \cdots, z_k, \zeta') = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \sum_{1\leq j\leq k} \sum_{\theta_j \in \{1, i, -1\}} \int_{i\varepsilon'+\theta_1 \boldsymbol{R}^+} \cdots \int_{i\varepsilon'+\theta_k \boldsymbol{R}^+} g(\zeta_1, \cdots, \zeta_k, \zeta') \tag{5.7}$$
$$\times \left(\int_{\partial\theta_1 \times \cdots \times \partial\theta_k} \exp\left(i \sum_{j=1}^k w_j(\zeta_j - z_j)\right) dw_1 \cdots dw_k \right) d\zeta_1 \cdots d\zeta_k \,.$$

Pour démontrer la formule (5.7) dans le cas où $k=1$, ou pour passer du "stade k" au "stade $k+1$" dans la formule (5.7), il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 5.2 de [8]; ceci prouve (5.7) par récurrence, et si on prend $k=n$, on obtient

$$g(z) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \sum_{\theta \in \{1, i, -1\}^n} \int_{i\varepsilon'+\Gamma_\theta} g(\zeta) \left(\int_{\partial\theta_1 \times \cdots \times \partial\theta_n} e^{i\langle w, \zeta - z\rangle} dw \right) d\zeta$$
$$= (-1)^n \sum_{\theta \in \{1-i, -1\}^n} \int_{\partial\theta_1 \times \cdots \times \partial\theta_n} \hat{g}_{\varepsilon'}(w, \theta) e^{-i\langle w, z\rangle} dw \,.$$

Pour conclure le lemme 5.2.4, il suffit de remarquer que

$$\sum_\theta \int_{\partial\theta_1 \times \cdots \times \partial\theta_n} = \int_{\partial_0 L_\varepsilon} \,.$$

On revient à la démonstration du théorème 5.2.1. Soient $0 < \delta < \delta' < \varepsilon'$. On veut montrer que $\hat{g}_{\delta'} - \hat{g}_\delta \in \sum_{j=1}^n R(C^n \sharp_j L; \varepsilon' B)$. Il suffit, d'après le théorème 4.1.3 de montrer la relation

$$\int_{\partial_0 L_\varepsilon} \hat{g}_{\delta'}(w) \varphi(w) dw = \int_{\partial_0 L_\varepsilon} \hat{g}_\delta(w) \varphi(w) dw \tag{5.8}$$

pour toutes les fonctions φ d'un sous-ensemble dense de $Q(L; \varepsilon' B)$. Par le lemme 5.2.4, on sait que la relation (5.8) est vraie si φ est de la forme $\varphi(w) = e^{-i\langle w, z\rangle}$ où $z \in \boldsymbol{R}^n + i\Gamma_{-\varepsilon'}$. Or la densité des fonctions exponentielles ci-dessus résulte de la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} Q'(L; \varepsilon' B) & \xrightarrow{\mathscr{F}_b} & \mathrm{Exp}(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_{-\varepsilon'}; K + iS) \,. \\ \downarrow & & \downarrow b \\ Q'_0 & \xrightarrow{{}^t\mathscr{F}} & Q'_0 \end{array}$$

On a donc prouvé (iii) (une extension du lemme 5.5 de [8] aurait amené une démonstration directe et élémentaire, mais très lourde, de (iii)). Comme (iv) est une conséquence immédiate du lemme 5.2.4, le théorème 5.2.1 est démontré. Le corollaire 5.2.3 résulte de (iv) et de l'injectivité de $\mathscr{F}_b$.

§ 6. Transformation d'Avanissian-Gay.

6.1. *Notations.*

Soient $a=(a_1, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $K=K_1 \times \cdots \times K_n$ où les K_j sont des intervalles compacts de $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant $|K_j|<2\pi$ ($|K_j|$ désigne la longueur de K_j), et $k'=(k'_1, \cdots, k'_n)$ avec $0 \leqq k'_j<1$.

On pose: $L=L_1 \times \cdots \times L_n$, où $L_j=]-\infty, a_j]$; $\Pi^+=\{z \in \boldsymbol{C}^n;\ \mathrm{Re}\, z_j>0\}$ et $k'+\Pi^+=\{z \in \boldsymbol{C}^n;\ \mathrm{Re}\, z_j>k'_j\}$; $\exp(-L)=\exp(-L_1) \times \cdots \times \exp(-L_n)$, où $\exp(-L_j)=\{\exp(-w_j);\ w_j \in L_j\} \subset \boldsymbol{C}$;

$$Q(L;\ -k')=Q(L;\ \{-k'\})=\lim_{\varepsilon', \varepsilon>0} \operatorname{ind} H_b(\bar{L}_\varepsilon;\ -\sum_{j=1}^n (k'_j+\varepsilon')|x_j|)\ .$$

Le but de ce paragraphe est d'étudier le comportement de certaines fonctions holomorphes f connaissant les valeurs $f(\nu)$, où $\nu \in \boldsymbol{N}^{*n}(\boldsymbol{N}^*=\boldsymbol{N}\backslash\{0\})$. Pour cela, on modifie les notations concernant la transformation de Fourier-Borel.

Si $T \in Q'(L;\ -k')$, on pose

$$\mathscr{F}_b(T)(\zeta)=\tilde{T}(\zeta)=\langle T_w, \exp(\langle w, \zeta\rangle)\rangle$$

et

$$\operatorname{Exp}(k'+\Pi^+;\ L)=\lim_{\varepsilon, \varepsilon'>0} \operatorname{proj} H_b(k'+\underline{\varepsilon}'+\Pi^+;\ h_{-K}(y)+\langle a, x\rangle+\varepsilon|z|)\ .$$

On a l'isomorphisme $\mathscr{F}_b$: $Q'(L;\ -k') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Exp}(k'+\Pi^+;\ L)$; ceci est connu si $k'=0$, d'après les résultats du § 5. On passe au cas où k' est quelconque au moyen du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Q'(L) & \xrightarrow{\mathscr{F}_b} & \operatorname{Exp}(\Pi^+;\ L) \\ \sigma \downarrow \wr & & \tau \downarrow \wr \\ Q'(L;\ -k') & \xrightarrow{\mathscr{F}_b} & \operatorname{Exp}(k'+\Pi^+;\ L)\ , \end{array}$$

où les applications σ et τ sont définies comme suit:

$$\langle \sigma T, \varphi\rangle=\langle T_w, \exp(-\langle k', w\rangle)\varphi(w)\rangle$$

et

$$\tau f(z)=f(z-k')\ .$$

Enfin on pose

$$\Phi(z, w)=\prod_{j=1}^n \frac{z_j \exp(w_j)}{1-z_j \exp(w_j)}\ .$$

(Cette modification du noyau de la transformation G par rapport à celui donné en [1] et en [10] n'a pas d'autre but que de remplacer les développements en série entière au voisinage de l'infini par des développements au voisinage de zéro.)

6.2. *La transformation G.*

Cette partie est une extension à n variables des résultats de [10]. Le passage de une à plusieurs variables ne présentant pas de difficultés particulières, on ne donnera pas la démonstration des énoncés qui suivent, mais simplement la référence des résultats correspondants de [1] et de [10].

LEMME 6.2.1. *Si $z \in C^n \# \exp(-L)$, la fonction $w \to \Phi(z, w)$ est dans $Q(L; -k')$.*

LEMME 6.2.2. *Soient ε et $\varepsilon' > 0$ donnés, avec $\varepsilon < 2\pi - |K_j|$ $(j=1, \cdots, n)$. Il existe une constante $C(\varepsilon, \varepsilon')$ telle que*

$$|\Phi(z, w)| \exp(-\langle k', u\rangle + \varepsilon' |u|) \leqq C(\varepsilon, \varepsilon') |z_1|^{k'_1+\varepsilon'} \times \cdots \times |z_n|^{k'_n+\varepsilon'}$$

où $w = u + iv \in L_{\varepsilon/2}$ et $z \in C^n \# \exp(-L_\varepsilon)$. (cf. [10], proposition 3)

DÉFINITION 6.2.3. On désigne par $\mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$ l'ensemble des fonctions g holomorphes dans $C^n \# \exp(-L)$ satisfaisant la condition

(6.1) Pour tous ε et $\varepsilon' > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon, \varepsilon')$ telle que

$$|g(z)| \leqq C(\varepsilon, \varepsilon') |z_1|^{k'_1+\varepsilon'} \times \cdots \times |z_n|^{k'_n+\varepsilon'} .$$

On déduit canoniquement des inégalités (6.1) une famille de seminormes. Muni de la topologie vectorielle associée à cette famille de seminormes, l'espace $\mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$ est du type Fréchet-Schwartz. Remarquons que $C^n \# \exp(-L)$ contient $]-\infty, 0]^n$ et que si $g \in \mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$, $g(z_1, \cdots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \cdots, z_n) = 0$. Par conséquent, d'après la majoration (6.1), le seul polynôme appartenant à $\mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$ est le polynôme nul.

On définit maintenant la transformation d'Avanissian-Gay au moyen du lemme 6.2.1.

DÉFINITION 6.2.4. Si $T \in Q'(L; -k')$, on pose, pour $z \in C^n \# \exp(-L)$, $G_T(z) = G(T)(z) = \langle T_w, \Phi(z, w)\rangle$.

Par le lemme 6.2.2, la fonction G_T est dans $\mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$, et on désigne par G la transformation $T \to G_T$ de $Q'(L; -k')$ dans $\mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$.

THÉORÈME 6.2.5. *La transformation G: $Q'(L; -k') \to \mathscr{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$*

est un isomorphisme topologique. L'application inverse est donnée par la formule:

$$(6.2)\qquad \langle T, \varphi\rangle=(2i\pi)^{-n}\int_{\partial_0 L_\varepsilon}\varphi(z)G_T(\exp(-z_1), \cdots, \exp(-z_n))dz_1\cdots dz_n$$

pour $\varphi\in H_b(\bar{L}_\varepsilon; \langle k', x\rangle-\varepsilon'|x|)$. (cf. [10], théorèmes 4 et 6, et [1], théorèmes 1.4.1 et 1.5.1)

6.3. *La transformation* $G\circ\mathscr{F}_b^{-1}$.

L'application $\Lambda=G\circ\mathscr{F}_b^{-1}$ a pour effet de transformer une fonction $f\in\mathrm{Exp}(k'+\Pi^+; L)$ en une série de Taylor $\sum_{\nu\in N^{*n}}f(\nu)z^\nu$ qui se prolonge en une fonction $g\in\mathscr{O}_0(C^n\#\exp(-L); k')$.

En effet, on a le développement en série

$$\Phi(z, w)=\sum_{\nu\in N^{*n}}z^\nu\exp(\langle w, \nu\rangle)\ ,$$

la convergence ayant lieu dans $Q(L; -k')$, uniformément par rapport à z, lorsque z reste dans un compact quelconque du polydisque $\Delta_a=\{z\in C^n; |z_j|<\exp(-a_j)\}$.

Si on pose $\mu=\mathscr{F}_b^{-1}(f)$, on a

$$G_\mu(z)=\sum_{\nu\in N^{*n}}\langle\mu_w, \exp(\langle w, \nu\rangle)\rangle=\sum_{\nu\in N^{*n}}\tilde{\mu}(\nu)z^\nu=\Lambda f(z)=g(z)$$

pour tout $z\in\Delta_a$, ce qui assure le prolongement de la série de Taylor, avec les conditions de croissance annoncées.

Inversement, si la série $\sum_{\nu\in N^{*n}}\alpha_\nu z^\nu$, de domaine de convergence non vide, admet un prolongement $g\in\mathscr{O}_0(C^n\#\exp(-L); k')$, la fonction $f=\Lambda^{-1}g$ vérifie $f(\nu)=\alpha_\nu$, $\nu\in N^{*n}$. Une telle fonction f est unique dans $\mathrm{Exp}(k'+\Pi^+; K)$ et, d'après (6.2), est donnée par la formule

$$(6.3)\qquad f(\zeta)=(2i\pi)^{-n}\int_{\partial_0 L_\varepsilon}g(\exp(-w_1), \cdots, \exp(-w_n))\exp(\langle w, \zeta\rangle)dw\ .$$

On a donc montré le

THÉORÈME 6.3.1. *Soit* $\sum_{\nu\in N^{*n}}\alpha_\nu z^\nu$ *une série entière à domaine de convergence non vide. Il y a équivalence entre*:

(i) *il existe* $f\in\mathrm{Exp}(k'+\Pi^+; L)$ *telle que* $f(\nu)=\alpha_\nu$ $(\nu\in N^{*n})$;

(ii) *la série* $\sum_{\nu\in N^{*n}}\alpha_\nu z^\nu$ *admet un prolongement* $g\in\mathscr{O}_0(C^n\#\exp(-L); k')$.

Si de plus (ii) *est vérifié, on sait calculer* f *en fonction de* g *au moyen de la formule* (6.3).

Dans le cas $n=1$, la partie (i)$\Rightarrow$(ii) est le théorème de Leroy-Lindelöf (cf. [5]).

COROLLAIRE 6.3.2. *Soit* $f \in \mathrm{Exp}(k'+\Pi^+; L)$. *On suppose que* $f(\nu)=0$ *pour tous les* $\nu \in N^{*n}$, *sauf peut être un nombre fini d'entre eux. Alors* $f\equiv 0$.

DÉMONSTRATION. L'hypothèse signifie que Λf est un polynôme. On a remarqué qu'aucun polynôme non nul n'est dans $\mathcal{O}_0(C^n \# \exp(-L); k')$. Donc $\Lambda f=0$, et par injectivité de Λ, $f=0$.

6.4. *Prolongement des fonctions arithmétiques.*

Pour un compact F de C, on désigne par $\gamma(F)$ le diamètre transfini de F. On trouvera dans [15] des exemples de calculs ou de majorations de $\gamma(F)$ permettant de préciser et d'illustrer l'énoncé suivant:

THEOREME 6.4.1. *Soit* $f \in \mathrm{Exp}(k'+\pi^+; L)$. *On suppose que* f *est arithmétique* (*i.e.*, $f(N^{*n})\subset Z$) *et que, pour chaque* j, $\gamma(\exp(L_j))<1$. *Alors la fonction* $f(z)$ *est une somme finie de fonctions entières de la forme* $P(z)c_1^{z_1}\cdots c_n^{z_n}$, *où* P *est un polynôme, et* c_j *un entier algébrique situé, ainsi que tous ses conjugués, dans* $\exp(L_j)$.

DÉMONSTRATION. Soient $\mu=\mathscr{F}_b^{-1}(f)\in Q'(L; -k')$ et $g=G_\mu=\Lambda f$. La fonction $z\to g(1/z_1, \cdots, 1/z_n)$ est holomorphe dans $C^n \# \exp(L)$, nulle à l'infini, et admet à l'infini le développement à coefficients entiers $\sum_{\nu\in N^{*n}} f(\nu)z^{-\nu}$. Par un résultat de Martineau-Seinov (cf [1], p. 366) la fonction $g(1/z_1, \cdots, 1/z_n)$ est de la forme $A(z)/(B_1(z_1)\cdots B_n(z_n))$ où A et B_j sont des polynômes à coefficients entiers.

On peut donc écrire $g(z)=P(z)/(Q_1(z_1)\cdots Q_n(z_n))$, où P et Q_j sont des polynômes. Les zéros des polynômes Q_j sont en nombre fini et, à cause du domaine de définition de g, on peut supposer, après une éventuelle simplification de la fraction, que ces zéros sont dans $\exp(-L_j)$. On peut donc trouver un compact convexe $L_0=L_{0,1}\times\cdots\times L_{0,n}$ contenu dans L, tel que g soit holomorphe dans $C^n \# \exp(-L_0)$.

Soient p_j le degré de P par rapport à la variable z_j et q_j le degré de Q_j. La majoration (6.1) est vérifiée par $g(z)$ pour $z\in C^n \# \exp(-L_\varepsilon)$, donc pour $z\in\,]-\infty, 0]^n$, comme cela a déjà été remarqué. Ceci prouve que, pour chaque j, on a $p_j\leqq q_j$.

La fonction g est donc bornée dans chaque $C^n \# \exp(-L_{0,\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$, et la fonction $w\to g(\exp(-w_1), \cdots, \exp(-w_n))$ est bornée dans $L_{/2\varepsilon}\, L_{0,\varepsilon}$. Par (6.2) on a

$$\langle\mu, \varphi\rangle=(2i\pi)^{-n}\int_{\partial_0 L_\varepsilon}\varphi(w)g(\exp(-w_1), \cdots, \exp(-w_n))dw \quad (\varphi\in Q(L; -k'))$$

et cette égalité devient par le théorème de Cauchy

$$\langle\mu, \varphi\rangle=(2i\pi)^{-n}\int_{\partial_0 L_{0,\varepsilon}}\varphi(w)g(\exp(-w_1), \cdots, \exp(-w_n))dw .$$

Ceci prouve que μ est portable par L_0 au sens de la définition 2.4.1; μ est donc une fonctionnelle analytique protable par L_0 au sens usuel, et sa transformée de Fourier-Borel au sens de Martineau co¨ncide avec $\tilde{\mu}$.

Si maintenant on fait le même raisannement pour la fonction $f_1(z)=f(z+\underline{1})=f(z_1+1, \cdots, z_n+1)$ qui est dans $\mathrm{Exp}(k'-\underline{1}+\Pi^+; L)$, on montre l'égalité $f_1=\mathscr{F}_b(\mu_1)$, où μ_1 est une fonctionnelle analytique portable par un compact L_0 de L. La fonction f_1 est un élément de $\mathscr{E}(L_0)$ (notation 3.2.2 de [1]). Le théorème 3.2.3 de [1] permet alors de conclure.

Bibliographie

[1] V. Avanissian et R. Gay, Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, **103** (1973), 341-384.

[2] L. Hörmander, L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta. Math., **113** (1965), 89-152.

[3] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[4] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math., **17** (1970), 467-517.

[5] M. S. Mandelbrojt, Les singularités des fonctions analytiques représentées par une série de Taylor, Mémor. Sci. Math., Fasc **54** (1932), Paris.

[6] A. Martineau, Oeuvres Complètes, Editions du CNRS., Paris, 1977.

[7] M. Morimoto, On the Fourier ultra-hyperfunctions I, Sūrikaiseki-kenkyūjo Kōkyūroku, **192** (1973), 10-34.

[8] M. Morimoto, Analytic functionals with non compact carriers, Tokyo J. Math., **1** (1978), 72-103.

[9] M. Morimoto, An extension of e^x to $[-\infty, \infty]$, Proc. Japan Acad., **56** (1980), 450-454.

[10] M. Morimoto and K. Yoshino, A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math. J., **7** (1978), 259-270.

[11] M. Morimoto and K. Yoshino, Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity, Proc. Japan Acad., **56** (1980), 357-361.

[12] J. W. de Roever, Complex Fourier Transformation and Analytic Functionals with Unbounded Carriers, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[13] J. Sebastiaõ e Silva, Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel, Math. Ann., **136** (1958), 58-96.

[14] P. Schapira, Théorie des Hyperfonctions, Lecture Notes in Math., **126** Springer, 1970.

[15] K. YOSHINO, Analytic continuation of arithmetic holomorphic functions on a half plane, Tokyo J. Math., **2** (1979), 121–128.

[16] V. V. ZHARINOV, Laplace transformation of Fourier hyperfunctions and related classes of analytic functionals, Teoret. Mat. Fiz., **33** (1977), 291–309 (in Russian); English Translation, Theoret. and Math. Phys., **33** (1978), 1027–1039.

[17] V. V. ZHARINOV, Laplace transformation of Fourier hyperfunctions and related classes of analytic functionals II, Teoret. Mat. Fiz., **37** (1978), 12–29 (in Russian); English Translation, Theoret. and Math. Phys., **37** (1979), 843–855.

[18] V. V. ZHARINOV, Compact families of locally convex topological vector spaces, Fréchet-Schwartz and dual Fréchet-Schwartz spaces, Uspekli Mat. Nauk, **34**: 4 (1979), 97–131 (in Russian); English Translation, Russian Math. Surveys, vol **34** n° 4 (1980), 105–143.

Adresse:
UER DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351 COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE, FRANCE
AND
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
SOPHIA UNIVERSITÉ
KIOI-CHO, CHIYODA-KU, TOKYO 102