TOKYO J. MATH.
VOL. 5, No. 2, 1982

Développements Asymptotiques des Solutions Principales d'un Systeme Différentiel Linéaire du Type Hypergéométrique

Masuo HUKUHARA

Collège de Tsuda
(Présentée par M. Mori)

Introduction

Nous traiterons dans cet article le système différentiel linéaire

$$(x-\Lambda)\cdot dy/dx=Ay\ , \tag{0.1}$$

où

$$\Lambda=\operatorname{diag}[\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n]\ ,$$

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{bmatrix},$$

les λ_k et les $a_{jk}(j,\ k=1,\ \cdots,\ n)$ étant des constantes. C'est ce que K. Okubo a appelé *équation du type hypergéométrique*. Les λ_k sont des points singuliers réguliers de l'équation (0.1). Nous les supposons distincts les uns des autres. Nous supposons de plus que les éléments diagonaux a_{kk} de A sont différents des entiers.

K. Okubo a traité en même temps l'équation

$$(x-\Lambda)\cdot dz/dx=(A+\rho)z\ , \tag{0.1_ρ}$$

qui est la transformée d'Euler de l'équation (0.1).

Désignons par e_k le $k^{\text{ième}}$ vecteur unité (i.e. le vecteur dont les composants sont nuls sauf le $k^{\text{ième}}$ qui est égal à 1). L'équation $(0.1)_\rho$ admet une solution $y=\varphi_k(x,\ \rho)$, qui se développe en une série de puissances avec le premier coefficient $c_{k0}(\rho)=e_k$:

Reçu 19 Janvier 1982

$$(0.2)_\rho \qquad \varphi_k(x, \rho)=(x-\lambda_k)^{a_{kk}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(x-\lambda_k)^{\nu}c_{k\nu}(\rho)\ .$$

Cette série est convergente à l'intérieur d'un cercle ne contenant aucun des points singuliers $\lambda_j(\neq\lambda_k)$. Nous l'appellerons *solution principale* en λ_k.

Désignons par $\Phi(x, \rho)$ la matrice formée des n solutions principales;

$$(0.3) \qquad \Phi(x, \rho)=[\varphi_1(x, \rho), \cdots, \varphi_n(x, \rho)]\ .$$

Les solutions $\varphi_k(x, 0)$ et la matrice $\Phi(x, 0)$ seront désignées par $\varphi_k(x)$ et $\Phi(x)$, et les valeurs propres de la matrice A par $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

K. Okubo [1, 2] a établi la formule

$$(0.4) \qquad \det\Phi(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{a_{kk}}\frac{\Gamma(a_{kk}+1)}{\Gamma(\alpha_k+1)}$$

sous l'hypothèse qu'il appelle "pentagonal condition". Celle-ci est équivalente à dire que les cercles de convergence des n séries $(0.2)_\rho$ ont une partie commune non vide. Cette condition exige que le nombre des points singuliers ne surpasse pas 5.

Sa démonstration de la formule (0.4) s'appuie sur ce que la série $(0.2)_\rho$ représente asymptotiquement la solution $\varphi_k(x, \rho)$ à l'intérieur du cercle de convergence lorsque $\mathrm{Re}\,\rho\to+\infty$. Nous montrerons dans la suite que le développement asymptotique est valable dans une partie compacte quelconque de l'ensemble

$$(0.5) \qquad D_k=\left\{x;\ \left|\arg\frac{x-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}\right|<\frac{\pi}{2} \quad (j\neq k)\right\}\ .$$

Celui-ci est plus large que le cercle de convergence de la série $(1.2)_\rho$. Si les n points λ_k se trouvent sur une circonférence d'un cercle, il contient le centre du cercle, de sorte que

$$(0.6) \qquad D=\cap\{D_k;\ k=1, \cdots, n\}$$

n'est pas vide. Alors le raisonnement d'Okubo permet d'établir la formule (0.4). Cette conclusion subsiste aussi dans le cas où les n points λ_k se trouvent sur une droite. D'après l'analyticité des solutions principales par rapport à x et aux λ_k, la formule (0.4) reste valable sans aucune condition restrictive.

§ 1. Les coefficients des développements des solutions principales.

Pour éviter la complication des notations, nous traiterons exclusivement la solution $\varphi_1(x, \rho)$ et supprimerons l'indice 1, de sorte que nous écrirons a, $c_\nu(\rho)$ au lieu de a_{11}, $c_{1\nu}(\rho)$.

En portant la série

$$z=(x-\lambda_1)^{a+\rho}\sum_{\nu=0}^{\infty}(x-\lambda_1)^\nu c_\nu(\rho) \tag{1.1}$$

dans l'équation $(0.1)_\rho$, on obtient

$$(a+\rho+\nu+1)(\lambda_1-A)c_{\nu+1}(\rho)=(A-a-\nu)c_\nu(\rho)\ . \tag{1.2}$$

Suivant la technique d'Okubo, nous posons

$$c_\nu(\rho)=d_\nu/(a+\rho+1)_\nu\ , \tag{1.3}$$

où la notation $(w)_\nu$ signifie

$$(w)_\nu=w(w+1)\cdots(w+\nu-1)\ .$$

Nous aurons alors pour déterminer les d_ν la formule de récurrence indépendante de ρ:

$$(\lambda_1-A)d_\nu=(A-a-\nu+1)d_{\nu-1}\ . \tag{1.4}$$

Si l'on pose $d_{-1}=0$, $d_0=e_1$, cette relation est vérifiée pour $\nu=0$. Nous désignons par $d_{j\nu}$ le $j^{\text{ième}}$ composant du vecteur d_ν. Si $d_{\nu-1}$ est connu, la relation (1.4) détermine les valeurs $d_{j\nu}(j=2, \cdots, n)$. Puis la relation (1.4), où ν est remplacée par $\nu+1$, donne la valeur $d_{1\nu}$ à l'aide des valeurs déjà calculées $d_{j\nu}(j=2, \cdots, n)$.

Par conséquent, les quantités d_ν se déterminent de proche en proche d'une manière unique et sont indépendantes de ρ. D'après la théorie classique, la série formelle ainsi calculée (1.1) converge à l'intérieur d'un cercle de centre λ_1 ne contenant aucun des points λ_j $(j=2, \cdots, n)$ et représente la solution principale $\varphi_1(x, \rho)$ de l'équation (0.1).

§2. Transformation préliminaire.

Posons

$$P_N(x, \rho)=(x-\lambda_1)^{a+\rho}\sum_{\nu=0}^{N}(x-\lambda_1)^\nu c_\nu(\rho) \tag{2.1}$$

et puis

$$z=u+P_N(x, \rho)\ . \tag{2.2}$$

L'équation en u s'écrit

(2.3) $$(x-A)u'=(A+\rho)u+f_N(x, \rho) .$$

On a

$$f_N(x, \rho)=(A+\rho)P_N(x, \rho)-(x-A)P'_N(x, \rho) ,$$

$P'_N(x, \rho)$ désignant la dérivée de $P_N(x, \rho)$ par rapport à x. Puisqu'on a les relations (1.2), on voit sans peine que l'on a

(2.4) $$f_N(x, \rho)=\frac{(x-\lambda_1)^{a+\rho+N}}{(a+\rho+1)_N}(\lambda_1-A)d_{N+1} .$$

Désignons par $\|u\|$ la norme maximum du vecteur u et par $\|A\|$ la norme de la matrice A:

(2.5) $$\|A\|=\max\{\|Au\|; \|u\|\leqq 1\} .$$

§ 3. Application d'un théorème d'existence de points fixes.

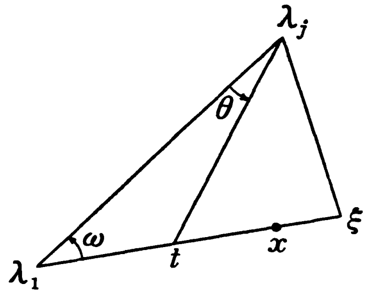
L'ensemble D_k défini par (0.5) est un domaine convexe. Soit ξ un point quelconque de D_1 et puis prenons un point quelconque x sur le segment de droite $\overline{\lambda_1, \xi}$ joignant λ_1 et ξ. Le point

(3.1) $$t=\lambda_1+s(x-\lambda_1)$$

décrit le segment de droite $\overline{\lambda_1, x}$ lorsque la variable réelle s varie de 0 à 1. On voit immédiatement que

(3.2) $$\left|\frac{t-\lambda_1}{t-\lambda_j}\right|=\frac{\sin\theta}{\sin\omega}$$

est une fonction croissante de $s\in[0, 1]$. Car l'angle $\theta=\arg(t-\lambda_j)/(\lambda_1-\lambda_j)$ est une fonction croissante de s, tandis que l'angle $\omega=\arg(\lambda_j-\lambda_1)/(t-\lambda_j)$ reste constant.



Soit $\mathscr{G}$ la famille des fonctions à valeurs vectorielles $g(x, \rho)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $g(x, \rho)$ est une fonction continue de (x, ρ) pour

$$x \in \overline{\lambda_1, \xi}\,, \quad \rho' > \max\{-1, -a'\}\,, \quad |\mathrm{Im}\,\rho| < \beta\,, \tag{3.3}$$

et holomorphe par rapport à ρ, où $a' = \mathrm{Re}\,a$, $\rho' = \mathrm{Re}\,\rho$ et β est un nombre positif quelconque;

(ii) On a

$$\|g(x, \rho)\| \leqq M(\rho) |(x-\lambda_1)^{a+\rho+N}| \tag{3.4}$$

pour (3.3), $M(\rho)$ désignant une certaine fonction continue de ρ pour

$$\rho' > \max\{-1, -a'\}\,, \quad |\mathrm{Im}\,\rho| < \beta\,. \tag{3.5}$$

Posons

$$\tilde{g}(x, \rho) = (x-\Lambda)^{\rho} \int_0^x (t-\Lambda)^{-\rho-1}\{Ag(t, \rho) + f_N(t, \rho)\}dt\,. \tag{3.6}$$

Nous appliquons un théorème d'existence de points fixes à la transformation T qui applique $g \in \mathscr{G}$ à la fonction $\tilde{g}$ définie tout à l'heure.

La fonction $\tilde{g}(x, \rho)$ est continue par rapport à (x, ρ) et holomorphe par rapport à ρ. La continuité de la transformation T et l'égale continuité de l'image $\tilde{\mathscr{G}} = T\mathscr{G}$ de $\mathscr{G}$ par T sont évidentes. Il nous reste à évaluer $\|\tilde{g}(x, \rho)\|$.

En remarquant que l'expression (3.2) est une fonction croissante de $s \in [0, 1]$, on a

$$\left|\left(\frac{t-\lambda_1}{t-\lambda_j}\right)^{\rho+1}\right| \leqq e^{\pi\beta}\left|\left(\frac{x-\lambda_1}{x-\lambda_j}\right)^{\rho+1}\right|\,. \tag{3.7}$$

On a de plus

$$|(t-\lambda_1)^{a}| = s^{a'}|(x-\lambda_1)^{a}|\,. \tag{3.8}$$

Le $j^{\text{ième}}$ composant du vecteur

$$(t-\Lambda)^{-\rho-1}\{Ag(t, \rho) + f_N(t, \rho)\}$$

ne surpasse pas en module

$$e^{\pi\beta}\left|\left(\frac{x-\lambda_1}{x-\lambda_j}\right)^{\rho+1}\right| |(x-\lambda_1)^{a+N-1}| s^{a'+N-1}\left\{\|A\| M(\rho) + \frac{\|(\lambda_1-\lambda_j)d_{N+1}\|}{|(a+\rho+1)_N|}\right\}\,,$$

en tenant compte de (3.7), (3.8). Par suite le $j^{\text{ième}}$ composant du vecteur $\tilde{g}(x, \rho)$ ne surpasse pas en module

$$e^{\pi\beta}\left|\frac{x-\lambda_1}{x-\lambda_j}\right| \frac{|(x-\lambda_1)^{a+\rho+N}|}{a'+N}\left\{\|A\| M(\rho) + \frac{\|(\lambda_1-\lambda_j)d_{N+1}\|}{|(a+\rho+1)_N|}\right\}\,. \tag{3.9}$$

Donc, pour que $\tilde{g}$ appartienne à $\mathscr{G}$, il suffit que cette valeur soit au plus égale au second membre de (3.4) pour $j=1, 2, \cdots, n$.

Soit E_1 une partie compacte de D_1. On peut prendre N assez grand de manière que $e^{-\pi\beta}(a'+N)/\|A\|$ soit plus grand que

$$H_1=\max\left\{\left|\frac{\xi-\lambda_1}{\xi-\lambda_j}\right|;\ \xi\in E_1,\ j=2, \cdots, n\right\}. \tag{3.10}$$

Puis on définit $M(\rho)$ par l'égalité

$$\left(1-e^{\pi\beta}\frac{H_1\|A\|}{a'+N}\right)M(\rho)=e^{\pi\beta}\frac{H_1\|\lambda_1-A\|\ \|d_{N+1}\|}{(a'+N)|(a+\rho+1)_N|}. \tag{3.11}$$

Il est facile de voir que l'équation (2.3) n'admet qu'une solution telle que

$$u=O((x-\lambda_1)^{a+\rho+N}) \quad (x\longrightarrow\lambda_1).$$

On a donc

$$\|\varphi_1(x, \rho)-P_N(x, \rho)\|\leqq M(\rho)|(x-\lambda_1)^{a+\rho+N}| \tag{3.12}$$

pour

$$x\in E_1, \quad \operatorname{Re}\rho>\max\{-1, -a'\}, \quad |\operatorname{Im}\rho|<\beta, \tag{3.13}$$

et $\varphi_1(x, \rho)$ est holomorphe par rapport à ρ.

§ 4. Conclusions.

Le raisonnement précédent s'applique naturellement aux autres solutions $\varphi_k(x, \rho)$ $(k>1)$. Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 1. *Soit $P_{kN}(x, \rho)$ la somme des $N+1$ premiers termes du développement* $(0.2)_\rho$. *Si E_k est une partie compacte du domaine D_k, on a*

$$\|\varphi_k(x, \rho)-P_{kN}(x, \rho)\|\leqq M_k(\rho)|(x-\lambda_k)^{a_{kk}+\rho+N}| \tag{4.1}$$

pour

$$x\in E_k, \quad \operatorname{Re}\rho>\max\{-1, a'_{kk}\}, \quad |\operatorname{Im}\rho|<\beta_k, \tag{4.2}$$

où $a'_{kk}=\operatorname{Re}a_{kk}$ et β_k *est un nombre positif quelconque. Quant à* $M_k(\rho)$ *on a*

$$M_k(\rho)=O(\rho^{-N}) \tag{4.3}$$

pour $|\mathrm{Im}\,\rho|<\beta$, $\mathrm{Re}\,\rho\to+\infty$ *uniformément par rapport à* $x\in E_k$.

On peut supposer β_k aussi grand que l'on veut. E_k étant une partie compacte quelconque de D_k, on peut énoncer le

THÉORÈME 2. *La solution* $\varphi_k(x, \rho)$ *est une fonction holomorphe de* x *pour*

$$x\in D_k\ ,\quad \mathrm{Re}\,\rho>\max\{-1,\ -a'_{kk}\}\ . \tag{4.4}$$

On vérifie sans peine la relation

$$\Phi'(x, \rho)=\Phi(x, \rho-1)(\mathscr{A}+\rho) \tag{4.5}$$

avec

$$\mathscr{A}=\mathrm{diag}[a_{11}, \cdots, a_{nn}]\ .$$

On a par suite

$$\Phi(x, \rho-1)=(x-\Lambda)^{-1}(A+\rho)\Phi(x, \rho)(\mathscr{A}+\rho)^{-1}\ . \tag{4.6}$$

Donnons à x une valeur quelconque mais fixe dans D. $\Phi(x, \rho)$ est alors holomorphe dans le domaine

$$\mathrm{Re}\,\rho>\max\{-1,\ -a'_{11}, \cdots, a'_{nn}\}\ . \tag{4.7}$$

Le second membre de l'égalité (4.6) est aussi holomorphe dans le même domaine. L'égalité montre ensuite que $\Phi(x, \rho)$ est une fonction méromorphe de ρ dans le domaine

$$\mathrm{Re}\,\rho+1>\max\{-1,\ -a'_{11}, \cdots,\ -a'_{nn}\}\ ,$$

n'admettant que des poles simples $-a_{kk}-1$ qui se trouvent dans ce domaine.

D'une manière générale, si $\Phi(x, \rho)$ est méromorphe dans le domaine

$$\mathrm{Re}\,\rho+m>\max\{-1,\ -a'_{11}, \cdots, a'_{nn}\}$$

et n'admet que des poles simples

$$-a_{kk}-\nu\quad (k=1, \cdots, n;\ \nu=1, \cdots, m)\ ,$$

l'égalité (4.6) montre ensuite que $\Phi(x, \rho)$ est méromorphe dans le domaine

$$\mathrm{Re}\,\rho+m+1>\max\{-1,\ -a'_{11}, \cdots,\ -a'_{nn}\}$$

et n'admet que des poles simples

$$-a_{kk}-\nu \quad (k=1, \cdots, n;\ \nu=1, \cdots, m+1)\ .$$

Par conséquent, on a le

THÉORÈME 3. *Si la partie commune D définie par* (0.5) *et* (0.6) *n'est pas vide, les solutions $\varphi_k(x, \rho)$ sont pour $x \in D$ des fonctions méromorphes de ρ n'admettant que des poles simples $-a_{kk}-m(k=1, \cdots, n;\ m=0, 1, 2, \cdots)$.*

§ 5. Déterminant du système des solutions principales.

Expliquons brièvement comment on peut déduire du théorème 1 la formule (0.4).

Désignons par $W(x, \rho)$ le déterminant de la matrice $\Phi(x, \rho)$:

$$W(x, \rho)=\det \Phi(x, \rho)\ . \tag{5.1}$$

L'égalité (4.6) entraîne

$$W(x, \rho)=W(x, \rho-1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(x-\lambda_k)(a_{kk}+\rho)}{\alpha_k+\rho}\ .$$

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ étant les valeurs propres de la matrice A. Si donc m est un entier positif,

$$\begin{aligned} W(x, m) &= W(x, 0)\prod_{k=1}^{n}\frac{(x-\lambda_k)^m(a_{kk}+1)_m}{(\alpha_k+1)_m} \\ &= W(x, 0)\prod_{k=1}^{n}\left\{(x-\lambda_k)^m\frac{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(a_{kk}+m+1)}{\Gamma(a_{kk}+1)\Gamma(\alpha_k+m+1)}\right\}\ . \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling et la relation de Fuchs:

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}\ ,$$

on voit sans peine que l'on a

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(a_{kk}+m+1)}{\Gamma(\alpha_k+m+1)}\longrightarrow 1 \quad (m\to\infty)\ .$$

D'après le théorème 1, si D n'est pas vide, on a

$$\varphi_k(x, m)(x-\lambda_k)^{-a_{kk}-m}\longrightarrow e_k \quad (m\longrightarrow\infty)$$

pour $x \in D$. On a par suite

$$W(x, m)=(1+o(1))\prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{a_{kk}+m} \quad (m\longrightarrow\infty)\ .$$

Les relations obtenues ci-dessus entraînent donc la formule (0.4).

Soient $\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n$ des points situés sur une circonférence d'un cercle. L'ensemble D défini par (0.6) contient 0 à son intérieur pour $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \cdots, \lambda_n = \bar{\lambda}_n$. Par suite, il n'est pas vide non plus pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ assez voisins de $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ respectivement. La formule (0.4) est donc valable pour ces valeurs λ_k et $x \in D$.

Or les solutions principales sont des fonctions holomorphes en $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ à moins que quelques-unes de ces $n+1$ points ne coïncident. Par suite, la formule (0.4) reste vraie dans le domaine d'existence des solutions principales. On arrive ainsi au

THÉORÈME 4. *La formule* (0.4) *est valable dans le domaine des variables* $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *pourvu que les valeurs* $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *soient distinctes les unes des autres.*

Références

[1] K. OKUBO, Connection problems for systems of linear differential equations, Japan-US Sem. Ordinary Differential and Functional Equations, 1971, Springer.

[2] K. OKUBO, On the group of Fuchsian equations, Progress Report for Grant-in-Aid for Scientific Research from the Ministry of Education, Science and Culture, 1981.

Adresse Actuelle:
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
COLLÈGE DE TSUDA
KODAIRA, TOKYO 187