TOKYO J. MATH.
VOL. 5, NO. 2, 1982

Théorèmes de Dualité du Type Serre et du Type Poincaré-Lefschetz sur la Frontière Fortement Pseudoconvexe

Tosiaki KORI

Université de Waséda

Introduction

Dans cette article, comme dans la précédente [11], nous envisageons l'analyse cohomologique des valeurs au bord des formes holomorphes ou, plus généralement, d'un faisceau cohérent sur la frontière d'un ouvert fortement pseudoconvexe. Nous avons fait dans [11] une recherche sur la cohomologie de De Rham à la frontière, nous développerons ici une contrepartie du théorème de dualité de Serre, et puis, du théorème de dualité de Poincaré-Lefschetz, à la frontière.

Il est longtemps que M. Serre a présenté son théorème de dualité; sur une variété compacte ou de Stein il existe une dualité entre la cohomologie d'un faisceau cohérent $H^q(M, F)$ et l'Ext à support compact $\mathrm{Ext}_c^{n-q}(M; F, \Omega^n)$, ainsi que la cohomologie à support compact $H_c^q(M, F)$ est en dualité avec l'Ext groupe $\mathrm{Ext}^{n-q}(M; F, \Omega^n)$, où n est la dimension de la variété M et Ω^p est le faisceau des p-formes holomorphes sur M. On obtient les mêmes théorèmes sur un domaine fortement pseudoconvexe D dans une variété, parceque là on a le théorème de finitude ou des séparations, [1, 2, 14, 15, 17]. On a les homomorphismes canoniques; $H_c^q(D, F)\to H^q(D, F)$ et $\mathrm{Ext}_c^{n-q}(D; F, \Omega^n)\to \mathrm{Ext}^{n-q}(D; F, \Omega^n)$. Alors, il est naturel de demander comment la dualité entre les cylindres de ces homomorphismes. On peut imaginer que chacun des cylindres des applications ci-dessus serait une quantité cohomologique ne dépendant que la frontière B de D. Or il existe des suites spectraux;

$$E_1^{p,q}=H^q(D, \Omega^p)\Longrightarrow H^{\cdot}(D, C)\ ,$$

$$_cE_1^{p,q}=H_c^q(D, \Omega^p)\Longrightarrow H_c^{\cdot}(D, C)\ .$$

Le cylindre de l'application $_cE_1^{p,q}\to E_1^{p,q}$ va donner comme l'aboutissement

Reçu 14 Mai, 1981

le cylindre de l'application $H_c^{\cdot}(D, C) \to H^{\cdot}(D, C)$, que l'on trouve égal à $H^{\cdot}(B, C)$. On est donc suggéré que le cylindre de l'application $H_c^q(D, \Omega^p) \to H^q(D, \Omega^p)$ est la cohomologie du faisceau des p-formes "*holomorphes sur le bord B*", dont l'hypercohomologie se réduit à $H^{\cdot}(B, C)$. D'après l'argument heuristique ci-dessus nous sommes convaincus de la nécessité d'introduire le faisceau de valeurs au bord d'un faisceau cohérent. Sur la frontière fortement pseudoconvexe c'est la première cohomologie locale au bord $\underline{H}_B^1 F$ que nous voulons introduire comme le faisceau de valeurs au bord d'un faisceau cohérent. Quant à les cylindres des applications que l'on a voulu chercher, ce sont respectivement $H^q(B, \underline{H}_B^1 F)$ et $\mathrm{Ext}^{n-q-1}(B; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$, voir le paragraphe 3.3.

On montrera les deux théorèmes de dualités suivantes dans la section 3.

THÉORÈME 3.2.1. *Soit F un faisceau cohérent dans un voisinage de B tel que* codh $F \geqq 3$. *Pour tout* $p \leqq$ codh $F-2$, *le groupe* $H^p(B, \underline{H}_B^1 F)$ *est muni d'une structure d'espace* **FS**, *ainsi le groupe* $\mathrm{Ext}^{n-p-1}(B; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$ *d'une structure d'espace* **DFS**. *Le dual topologique de* $H^p(B, \underline{H}_B^1 F)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ext}^{n-p-1}(B; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$.

THÉORÈME 3.2.2. *Soit F un faisceau cohérent sur un voisinage de B tel que* $k=$ codh $F=\dim F \geqq 2$. *Pour tout* $r \geqq 1$, *il existe sur* $H^r(B, \underline{H}_B^1 F)$ *une structure d'espace* **DFS** *et sur* $\mathrm{Ext}^{n-r-1}(B; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$ *une structure d'espace* **FS** *telles que le dual de* $H^r(B, \underline{H}_B^1 F)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ext}^{n-r-1}(B; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$.

Comme un corollaire on a l'isomorphisme $(H^q(B, \underline{H}_B^1 \Omega^p))' \cong H^{n-1-q}(B, \underline{H}_B^1 \Omega^{n-p})$, pour tous p et q, où l'accent signifie le dual topologique.

Il existe une suite spectrale de l'hypercohomologie du complexe $\underline{H}_B^1 \Omega^{\cdot}$, dont le terme initial est $H^q(B, \underline{H}_B^1 \Omega^p)$. On a montré [11] d'autre part le lemme de Poincaré au bord:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \underline{H}_B^1 \Omega^0 \longrightarrow \underline{H}_B^1 \Omega^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{H}_B^1 \Omega^n \longrightarrow 0 .$$

Il en résulte que $H^{\cdot}(B, H_B^1 \Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(B, C)$. On va étudier aussi un complexe de précofaisceaux qui est dual au celui ci-dessus et dont l'hyperhomologie donne l'homologie de B:

$$H_{\cdot}(\mathscr{U}, {}^b\omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(B, C), \quad \text{où} \quad {}^b\omega_{\cdot} = \mathscr{H}_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^{n-\cdot}) .$$

On verra alors que l'isomorphisme dual dit plus haut donne comme l'aboutissement l'isomorphisme dual;

$$H^i(B, C) \cong H_i(B, C) \quad \text{pour tout } i .$$

Nous envisageons dans la section 4 des diverses relations dualistes entre l'homologie et la cohomologie de l'accouplement $(\bar{D}, B)$, par example, le théorème de dualité de Poincaré-Lefschetz; $H_i(\bar{D}, C)\cong H^{2n-i}(\bar{D}, B; C)$ pour tout i, et $H_i(B, C)\cong H^{2n-1-i}(B, C)$ pour $i\leqq n-2$ ou $i\geqq n+1$. Ce qui est intéressant c'est qu'on les montre usant les théorèmes de dualités. Je remercie vivement Monsieur l'examinateur qui a bien voulu sousligner certaines erreurs, en particulier, dans la démonstration de la Proposition 2.1.7(i).

§1. Cohomologie et $\mathrm{Ext}^{\cdot}$ à support (Rappels).

1.1. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace annelé. Soient F et G des $\mathscr{A}$-Modules. On désigne par $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(U; F, G)$, pour toute partie U de X, le i-ème foncteur dérivé du foncteur $G\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(U; F, G)$. On a des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(U; F, G)\longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(V; F, G)\ , \qquad V\subset U\ ,$$

et le système des $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(U; F, G)$ pour U ouvert, donne un préfaisceau sur X, qu'on note $\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(F, G)$. Le faisceau associé est aussi le i-ème foncteur dérivé du foncteur $G\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F, G)$, on le note $\mathit{ext}^i_{\mathscr{A}}(F, G)$. Celui-ci est un $\mathscr{A}$-Module.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe une suite spectrale aboutissante au groupe gradué $\mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A}}(X; F, G)$, et dont le terme initial est

$$E_1^{p,q}=C^p(\mathscr{U}, \mathrm{ext}^q_{\mathscr{A}}(F, G))\ ,$$

où on a désigné $C^{\cdot}(\mathscr{U}, L)$, pour un préfaisceau L, le complexe des cochaînes alternés de $\mathscr{U}$ à valeur dans L.

On suppose dans la suite que X est un espace séparé et localement compact. Soient F et G deux $\mathscr{A}$-Modules. On désigne par $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A},c}(U; F, G)$, pour un ouvert U, le i-ème foncteur dérivé du foncteur de groupe des $\mathscr{A}$-homomorphismes à support compact dans U; $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A},c}(U; F, G)$. Les $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A},c}(U; F, G)$ pour U ouvert variable sont reliés par les flèches d'agrandissement évidentes et définissent un précofaisceau sur X, que l'on note $\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A},c}(F, G)$. Pour un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X et pour un précofaisceau M, on désigne par $C_{\cdot}(\mathscr{U}, M)$ le complexe des chaînes alternés de $\mathscr{U}$ à valeur dans M.

Il existe une suite spectrale aboutissante à $\mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A},c}(X; F, G)$, et dont le terme initial est donné par

$${}_cE_1^{p,q}=C_{-p}(\mathscr{U}, \mathrm{ext}^q_{\mathscr{A},c}(F, G))\ .$$

Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace annelé, où A est une Algèbre commutative avec unité, qui est localement compact et séparé. Soient F, G et H des $\mathscr{A}$-Modules. On a le produit de composition des foncteurs $\mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A}}$ et $\mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A},c}$;

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A}}(U; F, G)\otimes \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{A},c}(U; G, H) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{A},c}(U; F, H)\,,$$

ce qui entraîne l'accouplement

$$\mathrm{ext}^p_{\mathscr{A}}(F, G)\otimes \mathrm{ext}^q_{\mathscr{A},c}(G, H) \longrightarrow \mathrm{ext}^{p+q}_{\mathscr{A},c}(F, H)\,.$$

Il existe alors un accouplement des suites spectraux $E\otimes_c E \to_c E$ qui s'accorde avec le produit de composition des aboutissements

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A}}(X; F, G)\otimes \mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A},c}(X; G, H) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathscr{A},c}(X; F, H)$$

tel que l'accouplement entre les termes initiaux

$$C^{p_1}(\mathscr{U}; \mathrm{ext}^{q_1}_{\mathscr{A}}(F, G))\otimes C_{-p_2}(\mathscr{U}; \mathrm{ext}^{q_2}_{\mathscr{A},c}(G, H))$$
$$\longrightarrow C_{-p_1-p_2}(\mathscr{U}; \mathrm{ext}^{q_1+q_2}_{\mathscr{A},c}(F, H))$$

est le produit des chaînes et cochaînes, [17].

On pose, pour un $\mathscr{A}$-Module F,

$$\mathscr{H}^q(F) = \mathrm{ext}^q_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}, F)\,,$$

c'est le préfaisceau

$$V \longrightarrow H^q(V, F)\,.$$

De même le précofaisceau

$$\mathscr{H}^q_c(F) = \mathrm{ext}^q_{\mathscr{A},c}(\mathscr{A}, F)$$

est celui défini par

$$V \longrightarrow H^q_c(V, F)\,.$$

Pour un complexe différentiel $(C^{\cdot}, \delta)$, on désigne par $h^p(C^{\cdot})$ sa p-ème cohomologie;

$$h^p(C^{\cdot}) = \frac{\ker \delta\colon C^p \to C^{p+1}}{\delta C^{p-1}}\,.$$

1.2. Soient X un espace topologique et Z une partie localement fermée. Soit $j\colon Z \to X$ l'inclusion naturelle. L'image directe par j d'un faisceau G sur Z est notée $j_* G$. L'image directe propre (ou prolongement par zéro), notée $j_!G$, est définie par

$\Gamma(U, j_!G)$=sous groupe de $\Gamma(U\cap Z, G)$ formé des sections à support fermé dans U.

Si Z est ouvert on a une suite exacte bien conue;

$$0 \longrightarrow j_!(F|Z) \longrightarrow F \longrightarrow i_*(F|X-Z) \longrightarrow 0 ,$$

pour tout faisceau abélien F sur X, où $i\colon X-Z \to X$ est l'inclusion.

Soient Φ une famille de supports de X et Z une partie localement fermée. $\Phi|Z$ désigne la famille de supports de Z formée des $A \in \Phi$ qui sont contenus dans Z, tandis que $\Phi\cap Z$ désigne la famille de supports de Z formée des parties $A\cap Z$ avec $A\in\Phi$. On a $\Phi|Z=\Phi\cap Z$ si Z est fermée. Si Φ est paracompactifiante alors $\Phi|Z$ est aussi paracompactifiante.

Quel que soit une famille de supports Φ, on a

$$\Gamma_{\Phi|Z}(Z, G)=\Gamma_\Phi(X, j_!G)$$

pour tout faisceau abélien G sur Z, où $j\colon Z\to X$ est l'inclusion. D'autre part on peut vérifier aussitôt la formule

$$\Gamma_{\Phi\cap Z}(Z, G)=\Gamma_\Phi(X, j_*G) .$$

Soit F un faisceau abélien sur X. L'homomorphisme canonique

$$H^p_{\Phi|Z}(Z, F) \longrightarrow H^p_\Phi(X, j_!(F|Z))$$

est un isomorphisme dans chacun des deux cas suivants:

1. Z est fermé,
2. Φ est paracompactifiante et Z est ouvert. [7].

Pour une famille de supports Φ de X, il existe une suite spectrale aboutissante à $H^\cdot_{\Phi\cap Z}(Z, F|Z)$ dont le terme initial est

$$E_2^{p,q}=H^p_\Phi(X, R^qj_*(F|Z)) .$$

En particulier, si $F|Z$ est j_*-acyclique on a

$$H^n_{\Phi\cap Z}(Z, F|Z)=H^n_\Phi(X, j_*(F|Z)) .$$

On suppose maintenant que Φ est paracompactifiante et Z ouvert ou que Z est fermé. Alors la suite suivante est exacte;

$$\begin{aligned} &\longrightarrow H^p_{\Phi|Z}(X, F) \longrightarrow H^p_\Phi(X, F) \\ &\qquad \longrightarrow H^p_{\Phi\cap(X-Z)}(X-Z, F|X-Z) \longrightarrow H^{p+1}_{\Phi|Z}(X, F) \end{aligned}$$

[1, 6].

Soit U un ouvert de X. On dénote désormais $\varphi=\varphi(U)$ (resp. $c=c(U)$) l'ensemble de toutes les parties fermées (resp. compactes) de U.

Il est montré dans [7] que, si Φ est une famille paracompactifiante, on a

$$H^p_\Phi(X, F)=\varinjlim H^p_{c(U)}(U, F) ,$$

la limite inductive étant prise suivant l'ordonné filtrant des ouverts U dont l'adhérence est dans Φ.

1.3. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace annelé localement compact et séparé. Soient D un ouvert relativement compact dans X et B la frontière de D.

$$i\colon B\longrightarrow X , \qquad j\colon D\longrightarrow X$$

dénotent des injections canoniques. L'espace annelé $(D, \mathscr{A}|D)$ est noté par abréviation $(D, \mathscr{A})$. Ainsi que $(B, \mathscr{A})$. On voit aussitôt l'exactitude de la suite pour tout $\mathscr{A}$-Module F:

$$(1.3.1) \qquad 0\longrightarrow j_!(F|D)\longrightarrow j_*(F|D)\longrightarrow i_*(j_*(F|D)|B)\longrightarrow 0 .$$

Utilisant cette suite exacte on a montré dans [12] la proposition suivante.

PROPOSITION 1.3.2. *Soient F un $\mathscr{A}$-Module de présentation finie et G un $\mathscr{A}$-Module tel que $G|D$ soit j_*-acyclique; $R^q j_*(G|D)=0$ pour $q\geqq 1$. On a alors la suite exacte suivante*:

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A},\varphi(X)|D}(D; F, G)\longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A}}(D; F, G)\longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A}}(B; j_*(F|D)|B, j_*(G|D)|B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathscr{A},\varphi(X)|D}(D; F, G)\longrightarrow .$$

PROPOSITION 1.3.3 (Corollaire 1.2.5 dans [12]). *Soit G un $\mathscr{A}$-Module tel que $G|D$ soit j_*-acyclique. On a alors*

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A}}(B; j_*(\mathscr{A}|D), j_*(G|D))\cong H^p(B, j_*(G|D)) .$$

§2. Dualité locale des cohomologies locales au bord de faisceaux cohérents.

2.1. Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace analytique réduit de dimension $n\geqq 2$, $\mathscr{O}$ étant le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X. Soient D un ouvert relativement compact dans X et B sa frontière. Nous supposerons que;

B est fortement pseudoconvexe, [2].

On désigne par $i\colon B\to X$ et $j\colon D\to X$ des inclusions naturelles.

On désigne par $\underline{H}_B^p$ le p-ème foncteur dérivé du foncteur $\underline{\Gamma}_B$; $\underline{\Gamma}_B F$ pour un faisceau abélien F sur X est le faisceau défini par

$$V \longrightarrow \Gamma_{V\cap B}(V, F|V) .$$

On sait d'après Andreotti-Grauert [2] les énoncés suivants.

Soit $\xi \in B$. Il existe alors un voisinage de Stein V' du point ξ tel que pour tout voisinage de Stein V de ξ, $V \subset V'$, qui soit de Runge dans V', et tout faisceau cohérent F sur V, on ait;

(2.1.1) $$H^p(V\cap D, F)=0 \quad \textit{pour} \quad p \geqq 1 ,$$

(2.1.2) $$H_c^p(V\cap D, F)=0 \quad \textit{pour} \quad p \leqq \mathrm{prof}_\xi F-1 ,$$

(2.1.3) $$H^p(V-\bar{D}, F)=0 \quad \textit{pour} \quad 1 \leqq p \leqq \mathrm{prof}_\xi F-2 ,$$

et

$$\Gamma(V, F) \xrightarrow{\cong} \Gamma(V-\bar{D}, F) \quad \textit{si} \quad \mathrm{prof}_\xi F \geqq 2 .$$

On appellera *bon voisinage* un tel voisinage V qui satisfait aux propriétés ci-dessus.

On sait d'autre part, d'après un théorème de Malgrange étendu par Siu pour des espaces analytiques, que

(2.1.4) $$H_c^p(V\cap D, F)=0 \quad \textit{pour} \quad p \geqq \dim_\xi F+1 ,$$

et

$$H^p(V-\bar{D}, F)=0 \quad \textit{pour} \quad p \geqq \dim_\xi F .$$

Il en résulte que; pour tout faisceau cohérent F dans un bon voisinage de $\xi \in B$,

(2.1.5) $$R^p j_*(F|D)=0 , \quad \textit{pour} \quad p \geqq 1 ,$$

$$\underline{H}_B^p F=0 , \quad p \neq 1 , \quad p<\mathrm{prof}_\xi F \quad \textit{ou} \quad p>\dim_\xi F ,$$

et

$$i_*(j_*(F|D)|B) \cong \underline{H}_B^1 F \quad \textit{si} \quad \mathrm{prof}_\xi F \geqq 2 .$$

Voir [11, Proposition 2.1.5] pour la vérification.

PROPOSITION 2.1.6. *Soient F_i, $i=1, 2, 3$, des faisceaux cohérents tels que* prof $F_i \geqq 2$ *pour tout i. Si la suite $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ est exacte alors la suite*

$$0 \longrightarrow \underline{H}_B^1 F_1 \longrightarrow \underline{H}_B^1 F_2 \longrightarrow \underline{H}_B^1 F_3 \longrightarrow 0$$

est aussi exacte.

En effet, $R^p j_*(F|D)$ étant nulle pour tout faisceau cohérent et tout $p \geqq 1$, le foncteur $j_*(\cdot|D)$ transforme une suite exacte de faisceaux cohérents en une suite exacte. D'où la proposition si l'on note le fait que

$$i_*(j_*(F|D)|B) \cong \underline{H}^1_B F \quad \text{si} \quad \text{prof}\, F \geqq 2\,.$$

L'évanouissement des cohomologies suivantes est une clef de voûte dans notre théorie.

PROPOSITION 2.1.7. *Soit V un bon voisinage de $\xi \in B$.*

(i) $H^p(V, j_!(F|D)) = H^p_{\varphi(V)|D\cap V}(D\cap V, F) = 0$, *pour* $p \leqq \text{prof}_\xi F - 1$ *ou* $p \geqq \dim_\xi F + 1$.

(ii) $H^p_c(V, j_*(F|D)) = H^p_{c(V)\cap D\cap V}(D\cap V, F) = 0$, *pour* $p \neq 0$.

DÉMONSTRATION. (i) Soit ρ une fonction fortement plurisousharmonique dans un voisinage N de B telle que $D\cap N = \{\rho < 0\}$. On pose

$$W_\varepsilon = \{x \in V;\, \rho(x) < -\varepsilon\}\,, \qquad \varepsilon > 0\,.$$

D'après (2.1.2) et (2.1.4), $H^p_c(W_\varepsilon, F) = 0$ pour $p < \text{prof}_\xi F$ ou $p > \dim_\xi F$. $\varphi(V)|D\cap V$, où $\varphi(V)$ est l'ensemble des parties fermées dans V, étant paracompactifiante, on a

$$\begin{aligned} H^p(V, j_!(F|D)) &= H^p_{\varphi(V)|D\cap V}(D\cap V, F) \\ &= \varinjlim H^p_c(U, F) \end{aligned}$$

où la limite est prise suivant l'ordonné filtrant croissant des ouverts U dans V tels que $\bar{U} \in \varphi(V)|D\cap V$. Si l'on désigne le système inductif $(H^p_c(U, F), g_{U'U}, U \subset U')$, alors l'application $g_{U'U}$ n'est autre que l'extension par 0 hors de support. Soient U un tel ouvert et $\alpha \in H^p_c(U, F)$. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $U \cap W_\varepsilon \supset \text{Supp}\, \alpha$. On peut trouver un $\alpha' \in H^p_c(W_\varepsilon, F)$ tel que $\alpha|U\cap W_\varepsilon = \alpha'|U\cap W_\varepsilon$. On choisit un $U' \subset \bar{U}' \in \varphi(V)|D\cap V$ de tel façon que $U' \supset U \cup W_\varepsilon$ et on a $g_{U'U}(\alpha) = g_{U'W_\varepsilon}(\alpha')$. Cela étant ainsi l'application canonique

$$H^p_c(U, F) \longrightarrow \varinjlim H^p_c(U, F)$$

se factorise par $\varinjlim_\varepsilon H^p_c(W_\varepsilon, F)$. Celle-ci s'annule pour $p < \text{prof}_\xi F$ ou $p > \dim_\xi F$. Il en résulte que

$$\varinjlim H^p_c(U, F) = 0 \quad \text{pour} \quad p < \text{prof}_\xi F \quad \text{ou} \quad p > \dim_\xi F\,.$$

(ii) Soit U un ouvert de Stein dans C^m, $m \geqq 2$, et soit φ une fonction fortement pseudoconvexe sur U. On pose $W=\{z \in U; \varphi(z)>\varphi(\xi_0)\}$, $\xi_0 \in U$. D'après [14] on sait que l'espace $H^p(W, \Omega^m)$ est séparé pour $p \leqq m-1$, ainsi que l'espace $H_c^p(W, \mathcal{O})$ pour $p \geqq 2$, donc que le dual fort d'espace $H^p(W, \Omega^m)$ est isomorphe à $H_c^{m-p}(W, \mathcal{O})$ pour $p \leqq m-2$. D'autre part $H^p(W, \Omega^m)$ est isomorphe au $H^p(U, \Omega^m)$ pour $p \leqq m-2$, (2.1.3). Donc il y a des isomorphismes $H_c^p(W, \mathcal{O}) \rightarrow H_c^p(U, \mathcal{O})$ pour $p \geqq 2$.

Soient maintenant V' un bon voisinage du point $\xi \in B$, et F un faisceau cohérent avec $\operatorname{prof}_\xi F \geqq 2$. En vertu des isomorphismes ci-dessus et du "lemme des cinq", usant la résolution de F par des faisceaux libres, on peut montrer que l'homomorphisme $H_c^p(V'-\bar{D}, F) \rightarrow H_c^p(V', F)$ est bijectif pour $p \geqq 2$. (L'argument ci-dessus est le même que celui dans [2] pour démontrer les Théorèmes 5 et 10 là-bas.) Soit V un bon voisinage. $c(V)|V-D$ étant paracompactifiante, on a, pour tout $p \geqq 2$,

$$\begin{aligned} H^p_{c(V)|V-D}(V, F) &= \varinjlim H_c^p(V'-\bar{D}, F) \\ &\cong \varinjlim H_c^p(V', F) = H_c^p(V, F) , \end{aligned}$$

la limite étant prise suivant l'ordonné filtrant croissant des bons voisinages $V' \subset V$. De la suite exacte

$$\begin{aligned} &\longrightarrow H^p_{c(V)|V-D}(V, F) \longrightarrow H_c^p(V, F) \longrightarrow H^p_{c(V)\cap D}(V \cap D, F) \\ &\qquad \longrightarrow H^{p+1}_{c(V)|V-D}(V, F) \longrightarrow H_c^{p+1}(V, F) \longrightarrow , \end{aligned}$$

on déduit que

$$H_c^p(V, j_*(F|D)) = H^p_{c(V)\cap D}(V \cap D, F) = 0 , \quad \text{pour} \quad p \geqq 1 .$$

2.2. D'après (1.3.1) et (2.1.5) on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!(F|D) \longrightarrow j_*(F|D) \longrightarrow \underline{H}_B^1 F \longrightarrow 0 \tag{2.2.1}$$

pour tout faisceau cohérent F tel que prof $F \geqq 2$. Il en résulte la longue suite exacte de cohomologies:

$$\begin{aligned} &\longrightarrow H^p(V, j_!(F|D)) \longrightarrow H^p(V, j_*(F|D)) \longrightarrow H^p(V, \underline{H}_B^1 F) \\ &\qquad \longrightarrow H^{p+1}(V, j_!(F|D)) \longrightarrow . \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $R^q j_*(F|D)=0$ pour $q \geqq 1$, on a

$$H^p(V, j_*(F|D)) = H^p(V \cap D, F) = 0 , \quad \text{pour} \quad p \geqq 1 .$$

D'où et de la Proposition 2.1.7(i) on conclut que

$$H^p(V \cap B, \underline{H}_B^1 F) = 0 , \quad \text{pour} \quad 0 < p < \operatorname{prof}_\xi F - 1 \quad \text{ou} \quad p \geqq \dim_\xi F ,$$

et que $\Gamma(V\cap D, F)\cong\Gamma(V\cap B, \underline{H}^1_B F)$. On a montré la

PROPOSITION 2.2.2. *Soit V un bon voisinage de $\xi\in B$. Soit F un faisceau cohérent sur V tel que* $\operatorname{prof} F\geqq 2$. *On a*;

$$\Gamma(V\cap B, \underline{H}^1_B F)\cong\Gamma(V\cap D, F)$$
$$H^p(V\cap B, \underline{H}^1_B F)=0\,, \quad pour \quad 0<p<\operatorname{prof}_\xi F-1 \quad ou \quad p\geqq\dim_\xi F\,.$$

PROPOSITION 2.2.3. *V étant le même que ci-dessus. Soit F un faisceau cohérent sur V tel que* $\operatorname{prof} F\geqq 2$ *sur V. Alors on a*

$$H^p_{c'}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)=0\,, \quad pour \quad 0<p<\operatorname{prof} F-1 \quad ou \quad p\geqq\dim F\,,$$

où $c'=c(V)|B\cap V$ est l'ensemble des parties compactes dans $B\cap V$.

DÉMONSTRATION. De la suite exacte (2.2.1) découle la longue suite exacte de cohomologies à support compact dans V:

$$\longrightarrow H^p_c(V, j_!(F|D))\longrightarrow H^p_c(V, j_*(F|D))\longrightarrow H^p_c(V, \underline{H}^1_B F)\longrightarrow .$$

On a d'ailleurs

$$H^p_c(V, j_!(F|D))=H^p_c(V\cap D, F)=0\,, \quad \text{pour} \quad p<\operatorname{prof} F \quad \text{ou} \quad p>\dim F\,,$$

(2.1.2). D'où et d'après la Proposition 2.1.7 (ii) on entraine que

$$H^p_{c'}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)=0\,, \quad \text{pour} \quad 0<p<\operatorname{prof} F-1 \quad \text{ou} \quad p\geqq\dim F\,.$$

COROLLAIRE 2.2.4. *Soit F un faisceau de Cohen-Macaulay sur un bon voisinage V. Soit $k=$*$\operatorname{prof} F=\dim F\geqq 2$ *sur V. On a alors*;

(i) $H^p(V\cap B, \underline{H}^1_B F)=0$, *pour* $p\neq 0,\ k-1$,
$\Gamma(V\cap B, \underline{H}^1_B F)\cong\Gamma(V\cap D, F)$,
$H^{k-1}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)\cong H^k_{\varphi(V)|D}(V\cap D, F)$,

(ii) $H^p_{c'}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)=0$, pour $p\neq 0,\ k-1$,
$H^0_{c'}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)\cong H^0_{c(V)\cap D}(V\cap D, F)$,
$H^{k-1}_{c'}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)\cong H^k_c(V\cap D, F)$.

2.3. Soit F un faisceau cohérent sur un ouvert de Stein V de X. L'espace $\Gamma(V, F)$ est muni de façon naturelle d'une structure d'espace ***FS*** [3]. Si V est formé des points lisses et F est le faisceau de germes des fonctions holomorphes $\mathcal{O}$, cette topologie sur $\Gamma(V, \mathcal{O})$ coincide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact dans V. Dans ce cas il existe sur $H^n_c(V, \Omega^n)$ une unique structure d'espace ***DFS*** et le dual d'espace ***FS*** $\Gamma(V, \mathcal{O})$ est $H^n_c(V, \Omega^n)$, où Ω^p est le faisceau de p-

formes holomorphes, (Dualité de Serre). En général le dual de $\Gamma(V, F)$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}_c^n(V; F, \Omega^n)$, celui-ci est muni canoniquement d'une structure d'espace ***DFS***, (Dualité de Malgrange-Suominen).

On suppose désormais que $n = \dim X \geqq 3$.

Soit maintenant D un ouvert relativement compact dans X dont la frontière B est fortement pseudoconvexe. On suppose que;

B est une sous-variété différentiable de codimension 1 *dans la partie régulière de X.*

Il existe donc un voisinage N de B qui est une variété complexe de dimension $n = \dim X$. Soit $V \subset N$ un bon voisinage d'un point sur B. On muni l'espace $\Gamma(V \cap B, \underline{H}_B^1 F)$ d'une structure d'espace ***FS*** par l'isomorphisme

$$\Gamma(V \cap D, F) \xrightarrow{\cong} \Gamma(V \cap B, \underline{H}_B^1 F) .$$

De la même manière, pour tout faisceau libre de $\mathcal{O}$-Module F, l'isomorphisme

$$H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 F) \xrightarrow{\cong} H_c^n(V \cap D, F)$$

fournit une structure d'espace ***DFS*** à $H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 F)$. La dualité de Serre ci-dessus donne la nouvelle dualité:

$$(\Gamma(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^p))' \cong H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^{n-p}) .$$

PROPOSITION 2.3.1. *Soit F un faisceau cohérent sur un bon voisinage V tel que* $\operatorname{prof} F = k$, *constante* $\geqq 3$, *sur V. Alors*

$$\mathrm{Ext}_{c'}^p(B \cap V; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n) = 0 , \quad pour \quad n-k+1 \leqq p \leqq n-2 , \quad ou \quad p \geqq n ,$$

et $\mathrm{Ext}_{c'}^{n-1}(B \cap V; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$ *est muni d'une structure d'espace **DFS** canonique de telle sorte qu'il soit dual au* $\Gamma(B \cap V, \underline{H}_B^1 F)$.

La démonstration se fait par récurrence sur k en vertu des Propositions 1.3.3, 2.1.6 et Corollaire 2.2.4 et de la dualité pour le cas où $F = \mathcal{O}$. On montre en chemin l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{c'}^{n-1}(B \cap V; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n) \cong \mathrm{Ext}_c^n(D \cap V; F, \Omega^n) ,$$

qui nous permet de munir d'une structure d'espace ***DFS*** au groupe à gauche.

Nous allons chercher la deuxième relation de dualité locale.

LEMME 2.3.2. *V, F et k étant les mêmes que dans la Proposition* 2.3.1. *On a*

$$\mathrm{Ext}^p(V\cap B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)\cong \mathrm{Ext}^p(V\cap D; F, \Omega^n)$$

pour $p\leqq n-2$.

DÉMONSTRATION. D'abord on va montrer que

$$\mathrm{Ext}^p_{\varphi(V)|D}(V\cap D; F, \Omega^n)=0\ , \quad \text{pour} \quad p\leqq n-1\ . \tag{2.3.3}$$

En effet, ceci est vraie pour $F=\mathcal{O}$ d'après la Proposition 2.1.7, ensuite pour tout F en question par récurrence sur k. Or, d'après la Proposition 1.3.2 et (2.1.5), la suite suivante est exacte:

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\varphi(V)|D}(V\cap D; F, \Omega^n)\longrightarrow \mathrm{Ext}^p(V\cap D, F, \Omega^n)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^p(V\cap B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)\longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+1}_{\varphi(V)|D}(V\cap D; F, \Omega^n)\longrightarrow\ .$$

Il en résulte que

$$\mathrm{Ext}^p(V\cap D; F, \Omega^n)\cong \mathrm{Ext}^p(V\cap B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)\ ,$$

pour tout $p\leqq n-2$.

PROPOSITION 2.3.4. *Soit F un faisceau de Cohen-Macaulay sur un bon voisinage V dont le profondeur est une constante $k\geqq 2$. Alors,*

$$\mathrm{Ext}^p(V\cap B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)=0\ , \quad \textit{pour} \quad p<n-1\ , \quad p\neq n-k\ ,$$

et

$\mathrm{Ext}^{n-k}(V\cap B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)$ *est muni d'une structure d'espace FS canonique, et cet espace est le dual de* $H^{k-1}_{c'}(V\cap B, \underline{H}^1_B F)$.

DÉMONSTRATION. D'après le deuxième théorème de dualité [3, 14], on sait qu'il existe une structure d'espace ***FS*** sur $\mathrm{Ext}^p(V\cap D; F, \Omega^n)$ et celle d'espace ***DFS*** sur $H^p_c(V\cap D, F)$ de telle sorte que le dual de $H^p_c(V\cap D, F)$ soit $\mathrm{Ext}^{n-p}(V\cap D; F, \Omega^n)$, où on a compté sur le fait que $V\cap D$ est de Stein. Puisque

$$H^p_c(V\cap D, F)=0\ , \quad \text{pour} \quad p\neq k\ ,$$

on a, pour $q\neq n-k$,

$$\mathrm{Ext}^q(V\cap D, F, \Omega^n)=0\ .$$

D'après le lemme,

$$\mathrm{Ext}^p(V\cap B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)=0\ , \quad \text{pour} \quad p<n-1\ , \quad p\neq n-k\ .$$

On sait d'ailleurs

$$H_{c'}^{k-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)\cong H_c^k(V\cap D,\ F)\ ,\quad \text{Corollaire 2.2.4}\ .$$

Donc le groupe $H_{c'}^{k-1}(V\cap B, \underline{H}_B^1F)$ est muni d'une structure d'espace *DFS*, par laquelle le dual devient isomorphe à

$$\mathrm{Ext}^{n-k}(V\cap D;\ F,\ \Omega^n)\cong \mathrm{Ext}^{n-k}(V\cap B;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)\ .$$

2.4. On étude ici la suite spectrale de Leray (théorie locale-globale) à cohomologie (resp. homologie) de faisceau $\underline{H}_B^1F$ d'un recouvrement du bord B.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement d'un voisinage N de B par des bons voisinages V_i; $\mathscr{U}=\{V_i\}$, $N=\bigcup_i V_i$. Soit F un faisceau cohérent sur N. On pose

$$\operatorname{codh} F=\inf_{x\in N}\operatorname{prof}_x F\ ,\qquad \dim F=\sup_{x\in N}\dim_x F\ .$$

Il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q}=H^p(\mathscr{U}\cap B,\ \mathscr{H}^q(\underline{H}_B^1F))\Longrightarrow H^{\cdot}(B,\ \underline{H}_B^1F)\ .$$

On a d'après 2.2.2,

$$E_2^{p,q}=0\quad \text{pour}\quad 0<q<\operatorname{codh} F-1\ .$$

$$E_2^{p,0}=H^p(\mathscr{U}\cap D,\ F)=H^p(N\cap D,\ F)\ ,$$

où la deuxième égalité découle du théorème de Leray pour le recouvrement $\mathscr{U}\cap D$, $\mathscr{U}\cap D$ étant F-acyclique d'après (2.1.1). Il en résulte

(2.4.1) $$H^p(B,\ \underline{H}_B^1F)\cong H^p(\mathscr{U}\cap B,\ \underline{H}_B^1F)\cong H^p(N\cap D,\ F)\ ,$$

pour $p\leqq \operatorname{codh} F-2$.

Soit F un faisceau cohérent sur N tel que

$$k=\operatorname{codh} F=\dim F\geqq 2\ .$$

Dans ce cas on aura de plus les propriétés suivantes. On a;

$$E_2^{p,q}=0\quad \text{pour}\quad q\neq 0\ ,\quad k-1\ ,$$

$$E_2^{p,0}=H^p(N\cap D,\ F)=0\quad \text{pour}\quad p\geqq k\ ,\quad \text{(Malgrange-Siu)}\ ,$$

et

$$E_2^{p,k-1}=H^p(\mathscr{U},\ \mathscr{H}^k(j_!F))=H^{p+k}_{\varphi(N)|D\cap N}(D\cap N,\ F)=0\ ,\quad \text{pour}\quad p\geqq 1\ .$$

Faisant un calcul d'aboutissement de la suite spectrale on a;

(2.4.2) $$H^p(B,\ \underline{H}_B^1F)=0\quad \textit{pour}\quad p\geqq k\ ,$$

et la suite

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(\mathscr{U} \cap B, \underline{H}^1_B F) \longrightarrow H^{k-1}(B, \underline{H}^1_B F) \longrightarrow H^0(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}^1_B F)) \longrightarrow 0$$

est exacte.

PROPOSITION 2.4.3. *Soit F un faisceau cohérent sur N tel que $k=$* codh $F = \dim F \geqq 2$. *On a;*

$$H^r(B, \underline{H}^1_B F) \cong H_{k-r-1}(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}^{k-1}_{c'}(\underline{H}^1_B F)) \cong H_{k-r-1}(\mathscr{U} \cap D, \mathscr{H}^k_c(F)) \cong H^{r+1}_c(N \cap D, F)$$

pour $r \geqq 1$.

En effet, utilisant la suite spectrale

$$_cE_2^{p,q} = H_{-p}(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}^q_{c'}(\underline{H}^1_B F)) \Longrightarrow H^{\cdot}(B, \underline{H}^1_B F) ,$$

on peut montrer la proposition d'après le Corollaire 2.2.4. La deuxième assertion est montrée par la même manière.

COROLLAIRE 2.4.4 [12].

$$H^p(N \cap D, F) \cong H^{p+1}_c(N \cap D, F) \quad \textit{pour} \quad 1 \leqq p \leqq k-2 .$$

On va étendre les résultats aux groupes $\mathrm{Ext}^{\cdot}$ et $\mathrm{Ext}^{\cdot}_c$.

PROPOSITION 2.4.5. *Soit F un faisceau cohérent sur N. On a alors*

$$\mathrm{Ext}^r(B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n) \cong H_{n-r-1}(\mathscr{U} \cap B, \mathrm{ext}^{n-1}_{c'}(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n)) ,$$

pour $r \geqq n -$ codh $F+1$, *si* codh $F \geqq 3$.

Ceci résulte de la Proposition 2.3.1 par un calcul de la suite spectrale. On démontre dela même manière la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4.6. *Soit F un faisceau cohérent sur N tel que $k=$* codh $F = \dim F \geqq 2$. *On a;*

$$\mathrm{Ext}^r(B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n) \cong H^{k+r-n}(\mathscr{U} \cap B, \mathrm{ext}^{n-k}(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n)) ,$$

pour $r < n-1$, en particulier,

$$\mathrm{Ext}^r(B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n) = 0 \quad \textit{pour} \quad r < n-k .$$

§3. Dualitè de cohomologies locales au bord des faisceaux cohérents.

Soit D un ouvert relativement compact dans un espace analytique réduit de dimension $n \geqq 3$ dont la frontière B est fortement pseudoconvexe. On suppose qu'

il existe une sous-variété ouverte N de X dans laquelle B est une sous-variété différentiable de codimension 1.

3.1. Trace. On désigne par Ω^p le faisceau de germes des p-formes holomorphes; $\Omega^0 = \mathcal{O}$. Le lemme de Poincaré est valable sur N;

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow \Omega^0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n \longrightarrow 0$$

est exacte.

On a montré dans [11] un analogue sur le bord B du lemme de Poincaré, c'est à dire que la suite

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{C}_B \longrightarrow \underline{H}^1_B\Omega^0 \longrightarrow \underline{H}^1_B\Omega^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{H}^1_B\Omega^n \longrightarrow 0 \tag{3.1.1}$$

est exacte, où $\boldsymbol{C}_B$ est le faisceau de constante sur B prolongé par zéro hors de B.

On a la suite spectrale d'hypercohomologie:

$$E_1^{p,q} = H^q(B, \underline{H}^1_B\Omega^p) \Longrightarrow \boldsymbol{H}^\cdot(B, \underline{H}^1_B\Omega^\cdot) .$$

Grace à (3.1.1),

$$\boldsymbol{H}^i(B, \underline{H}^1_B\Omega^\cdot) \cong H^i(B, \boldsymbol{C}) .$$

On a d'autre part

$$E_1^{p,q} = 0 , \quad \text{pour} \quad p \geqq n+1 \quad \text{ou} \quad q \geqq n .$$

D'où découle la relation;

$$E_2^{n,n-1} = h^n H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^\cdot) \cong H^{2n-1}(B, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C} .$$

On a obtenu la suite exacte

$$H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^{n-1}) \longrightarrow H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^n) \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow 0 . \tag{3.1.2}$$

L'application linéaire

$$T\colon H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^n) \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

est appelée *trace*.

PROPOSITION 3.1.3. *Soit V un bon voisinage contractible d'un point de B. Les deux suites suivantes sont exactes;*

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H^0_{c'}(V \cap B, \underline{H}^1_B\Omega^0) \longrightarrow H^0_{c'}(V \cap B, \underline{H}^1_B\Omega^1) \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow H^0_{c'}(V \cap B, \underline{H}^1_B\Omega^n) \longrightarrow 0 , \end{gathered}$$

$$0 \longrightarrow H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^0) \longrightarrow H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^n) \longrightarrow C \longrightarrow 0 .$$

DÉMONSTRATION. On vérifie aussitôt

$$h^p H_c^n(V \cap D, \Omega^\cdot) = C \quad \text{si} \quad p = n , \quad \text{et} = 0 \quad \text{si} \quad p \neq n ,$$

si l'on considère la suite spectrale dégénérée

$$E_1^{p,n} = H_c^n(V \cap D, \Omega^p) \Longrightarrow H_c^{p+n}(V \cap D, C) \begin{cases} = 0 , & p \neq n , \\ = C , & p = n . \end{cases}$$

D'où et de la relation

$$H_{c'}^{n-1}(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^p) \cong H_c^n(V \cap D, \Omega^p) ,$$

on déduit la deuxième suite exacte. Pour obtenir la première suite, on verra la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = H_{c'}^q(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^p) \Longrightarrow H_{c'}^\cdot(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) .$$

Grace à (3.1.1) on a

$$H_{c'}^i(V \cap B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) = H_{c'}^i(V \cap B, C) = \begin{cases} 0 , & i \neq 2n-1 , \\ C , & i = 2n-1 . \end{cases}$$

Puisque $E_1^{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$, $n-1$, on aura $E_2^{i,0} \cong E_2^{i-n,n-1}$ pour $i \leqq n$, ce qui implique

$$h^i H_{c'}^0(B \cap V, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \cong h^{i-n} H_{c'}^{n-1}(B \cap V, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) = 0 ,$$

pour $i \leqq n$.

COROLLAIRE. *Les suites suivantes des précofaisceaux sont exactes sur* N:

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}_{c'}^0(\underline{H}_B^0 \Omega^0) \longrightarrow \mathscr{H}_{c'}^0(\underline{H}_B^0 \Omega^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{H}_{c'}^0(\underline{H}_B^0 \Omega^n) \longrightarrow 0 ,$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}_{c'}^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^0) \longrightarrow \mathscr{H}_{c'}^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{H}_{c'}^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^n) \longrightarrow C \longrightarrow 0 .$$

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement de B par des bons voisinages. Il existe une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = C_{-p}(\mathscr{U}, \mathscr{H}_{c'}^q(\underline{H}_B^1 \Omega^n)) \Longrightarrow H^\cdot(B, \underline{H}_B^1 \Omega^n) .$$

D'après le corollaire ci-dessus on a l'application linéaire

$$T_1^{0,n-1}\colon C_0(\mathscr{U},\ \mathscr{H}_{c'}^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^n))\longrightarrow \boldsymbol{C}\ ,$$

qui est définie comme la somme des

$$H_{c'}^{n-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)\longrightarrow \boldsymbol{C}\ ,\quad V\in\mathscr{U}\ .$$

Pour $q\neq n-1$, on définit

$$T_1^{0,q}\colon C_0(\mathscr{U},\ \mathscr{H}_{c'}^{q}(\underline{H}_B^1\Omega^n))\longrightarrow \boldsymbol{C}$$

comme l'application nulle: $T_1^{0,q}=0$, ce qui s'accorde avec le fait que

$$\mathscr{H}_{c'}^{q}(\underline{H}_B^1\Omega^n)=0 \quad \text{pour} \quad q\neq 0\ ,\quad n-1\ ,$$

et, lorsque $q=0$, avec l'exactitude de la première suite du corollaire. On regarde $\boldsymbol{C}$ comme une suite spectrale dégénérée dont le seul terme non-nul est

$$E_r^{0,n-1}=\boldsymbol{C}\ ,\quad r\geqq 1\ ,$$

on étend puis les applications $T_1^{0,q}$ à un homomorphisme de suites spectraux dont l'homomorphisme du premier terme est $T_1^{0,q}$. L'homomorphisme d'aboutissements est la trace expliquée plus haut:

$$T\colon H^{n-1}(B,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)\longrightarrow \boldsymbol{C}\ .$$

Rappelons-nous de montrer l'isomorphisme

$$H^{n-1}(B,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)\cong H_0(\mathscr{U}\cap B,\ \mathscr{H}_{c'}^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^n))\ ,\quad (2.4)\ .$$

Désormais nous entendrons la trace par l'homomorphisme de suites spectraux introduit ci-dessus;

$$T_2^{p,q}\colon E_2^{p,q}=H_{-p}(\mathscr{U}\cap B,\ \mathscr{H}_{c'}^{q}(\underline{H}_B^1\Omega^n))\longrightarrow \boldsymbol{C}\ .$$

3.2. Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement fini de B par des bons voisinages. Soit F un faisceau cohérent sur $N=\cup\{V;\ V\in\mathscr{U}\}$. L'ensemble des sections de $\underline{H}_B^1F$ sur chaque nerf étant muni d'une structure d'espace $\boldsymbol{FS}$, l'espace $C^p(\mathscr{U}\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$ des p-èmes cochaînes en est aussi muni. De même l'espace $\hat{C}^p(\mathscr{U}\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$ des cochaînes alternées, comme un sous-espace fermé du précédent, est aussi un espace $\boldsymbol{FS}$. Si $V'\subset V$ sont des bons voisinages, l'application de réstriction $\Gamma(V,\ F)\to\Gamma(V',\ F)$ est continue, donc l'application cobord

$$\delta^p\colon C^p(\mathscr{U},\ F)\longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{U},\ F)$$

l'est aussi. Il en résulte, grace à la relation $\Gamma(V\cap B, \underline{H}^1_B F)\cong\Gamma(V\cap D, F)$, que l'application cobord

$$\delta^p\colon C^p(\mathscr{U}\cap B, \underline{H}^1_B F)\longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{U}\cap B, \underline{H}^1_B F)$$

est continue.

Dans notre article précédente nous avons montré le théorème de finitude pour la cohomologie $H^p(\mathscr{U}\cap B, \underline{H}^1_B F)$;

THÉORÈME. [12]

$$\dim H^p(\mathscr{U}\cap B, \underline{H}^1_B F)<\infty\ , \quad \textit{pour tout} \quad p\geqq 1\ ,$$

donc

$$\dim H^p(B, \underline{H}^1_B F)<\infty \quad \textit{pour} \quad 1\leqq p\leqq \operatorname{codh} F-2\ .$$

Par une même considération, on met le chaîne

$$C_{-p}(\mathscr{U}\cap B, \operatorname{ext}^{n-1}_c(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n))$$

d'une structure d'espace DFS. L'application bord

$$\theta_{-p}\colon C_{-p}(\mathscr{U}\cap B, \operatorname{ext}^{n-1}_c(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n))\longrightarrow C_{-p-1}(\mathscr{U}\cap B, \operatorname{ext}^{n-1}_c(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n))$$

est continue. θ_{-p} est l'application dual de δ^p par rapport au produit de cochaînes et chaînes.

Nous allons commencer à montrer que le dual de $H^p(B, \underline{H}^1_B F)$ pour $p<\operatorname{codh} F-2$ est isomorphe à $\operatorname{Ext}^{n-p-1}(B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)$.

Il existe un accouplement des suites spectrales $\boldsymbol{E}\otimes_c\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, où

$$E_1^{p,q}=C^p(\mathscr{U}\cap B, \mathscr{H}^q(\underline{H}^1_B F))\Longrightarrow H^\cdot(B, \underline{H}^1_B F)\ ,$$

$${}_cE_1^{p,q}=C_{-p}(\mathscr{U}\cap B, \operatorname{ext}^q_c(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n))\Longrightarrow \operatorname{Ext}^\cdot(B, \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n)\ ,$$

et

$$F^{p,q}=C_{-p}(\mathscr{U}\cap B, \mathscr{H}^q_c(\underline{H}^1_B\Omega^n))\Longrightarrow H^\cdot(B, \underline{H}^1_B\Omega^n)\ .$$

Cet accouplement pour les premiers termes initiaux est le produit de cochaînes et chaînes;

$$C^p(\mathscr{U}\cap B, \mathscr{H}^r(\underline{H}^1_B F))\times C_q(\mathscr{U}\cap B, \operatorname{ext}^s_c(\underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B\Omega^n))$$
$$\longrightarrow C_{q-p}(\mathscr{U}\cap B, \mathscr{H}^{r+s}_c(\underline{H}^1_B\Omega^n))\ .$$

La trace $T\colon \boldsymbol{F}\to\boldsymbol{C}$ a comme le terme initial l'application linèaire

$$T_1^{u,v}\colon C_{-u}(\mathscr{U}\cap B, \mathscr{H}^v_c(\underline{H}^1_B\Omega^n))\longrightarrow \boldsymbol{C}\ ,$$

entre eux le seul pour $v=n-1$ n'est pas banal et celui-ci est continue.

La trace précédée par l'accouplement ci-dessus fournit un accouplement $\boldsymbol{E}\otimes_c\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{C}$. Nous en obtenons une forme bilinèaire;

$$C^p(\mathscr{U}\cap B,\ \mathscr{H}^q(\underline{H}^1_BF))\times C_{-p}(\mathscr{U}\cap B,\ \mathrm{ext}_c^{n-q-1}(\underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n))\longrightarrow \boldsymbol{C}\,.$$

On voit d'après la Proposition 2.3.1 que cette forme bilinèaire définit un isomorphisme de ${}_cE_1^{-p,n-1}=C_p(\mathscr{U}\cap B,\ \mathrm{ext}_c^{n-1}(\underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n))$ sur le dual topologique de $E_1^{p,0}=C^p(\mathscr{U}\cap B,\ \underline{H}^1_BF)$.

En vertu du théorème de finitude et le lemme bien connu de Serre-Schwartz on a l'isomorphisme de ${}_cE_2^{-p,n-1}=H_p(\mathscr{U}\cap B,\ \mathrm{ext}_c^{n-1}(\underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n))$ sur le dual de $H^p(\mathscr{U}\cap B,\ \underline{H}^1_BF)$. D'après (2.4.1) et la Proposition 2.4.5, on a le théorème de dualité suivant.

THÉORÈME 3.2.1. *Soit F un faisceau cohérent dans un voisinage de B tel que* $\mathrm{codh}\,F\geqq 3$. *Pour tout $p\leqq\mathrm{codh}\,F-2$, le groupe $H^p(B,\ \underline{H}^1_BF)$ est muni d'une structure d'espace **FS**, ainsi le groupe* $\mathrm{Ext}^{n-p-1}(B;\ \underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n)$ *d'une structure d'espace **DFS**. Le dual fort de $H^p(B,\ \underline{H}^1_BF)$ est isomorphe à* $\mathrm{Ext}^{n-p-1}(B;\ \underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n)$.

COROLLAIRE. *Pour tout p, $H_p(\mathscr{U}\cap B,\ \mathrm{ext}_c^{n-1}(\underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n))$ est isomorphe au dual de $H^p(\mathscr{U}\cap B,\ \underline{H}^1_BF)$.*

Nous donnerons puis le deuxième théorème de dualité.

THÉORÈME 3.2.2. *Soit F un faisceau cohérent sur un voisinage de B tel que $k=\mathrm{codh}\,F=\dim F\geqq 2$. Pour tout $r\geqq 1$, il existe sur $H^r(B,\ \underline{H}^1_BF)$ une structure d'espace **DFS**, et sur* $\mathrm{Ext}^{n-r-1}(B;\ \underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n)$ *une structure d'espace **FS** telles que le dual de $H^r(B,\ \underline{H}^1_BF)$ est isomorphe à* $\mathrm{Ext}^{n-r-1}(B;\ \underline{H}^1_BF,\ \underline{H}^1_B\Omega^n)$.

Pour montrer le théorème on prépare d'abord un lemme.

LEMME. *$H_p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathscr{H}_c^k(F))$ et $H^p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathrm{ext}^{n-k}(F,\ \Omega^n))$ sont munis des structures d'espaces **DFS** et **FS** respectivement, et le dual fort de l'espace $H_p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathscr{H}_c^k(F))$ est isomorphe au $H^p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathrm{ext}^{n-k}(F,\ \Omega^n))$.*

En effet, d'après la dualité de Serre-Suominen, il y a un isomorphisme de l'espace ***FS*** $C^p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathrm{ext}^{n-k}(F,\ \Omega^n))$ sur le dual de l'espace ***DFS*** $C_p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathscr{H}_c^k(F))$. On montrera que la dimension de $H^p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathrm{ext}^{n-k}(F,\ \Omega^n))$ est finie pour $p\geqq 1$. Alors l'espace $H_p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathscr{H}_c^k(F))$ est séparé pour $p\geqq 0$, donc il est ***DFS***. Ainsi la dualité ci-dessus entre les chaînes et cochaînes entraîne la dualité entre leurs homologies et cohomologies; l'espace ***FS*** $H^p(\mathscr{U}\cap D,\ \mathrm{ext}^{n-k}(F,\ \Omega^n))$ est isomorphe au dual de l'espace *DFS* $H_p(\mathscr{U} \cap D, \mathscr{H}_c^k(F))$. A propos de la finitude, on a vu dans [12] que

$$\dim H^p(N \cap D, F) < \infty ,$$

pour tout faisceau cohérent F et tout $p \geqq 1$, celle-ci a été obtenue comme un lemme pour montrer notre théorème de finitude énoncé plus haut. Par récurence sur la dimension homologique on a la finitude:

$$\dim \mathrm{Ext}^{n-k+p}(N \cap D; F, \Omega^n) < \infty ,$$

pour $p \geqq 1$. D'autre part $\mathrm{ext}^i(F, \Omega^n)$ s'annulant pour $i \neq n-k$, on a l'isomorphisme

$$H^p(\mathscr{U} \cap D, \mathrm{ext}^{n-k}(F, \Omega^n)) \cong \mathrm{Ext}^{n-k+p}(N \cap D; F, \Omega^n) .$$

D'où résulte la finitude de l'homologie à gauche.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2.2. Pour un faisceau cohérent F de $k = \mathrm{codh}\, F \geqq 2$, on a les isomorphismes

$$C_p(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_{c'}^{k-1}(\underline{H}_B^1 F)) \cong C_p(\mathscr{U} \cap D, \mathscr{H}_c^k(F)) ,$$

et

$$C^p(\mathscr{U} \cap B, \mathrm{ext}^{n-k}(\underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)) \cong C^p(\mathscr{U} \cap D, \mathrm{ext}^{n-k}(F, \Omega^n)) .$$

Ces isomorphismes fournissent aux chaîne et cochaîne aux côtés gauches les structures d'espaces *DFS* et *FS* respectivement.

Considérons maintenant l'accouplement

$$\begin{aligned} &C_p(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_c^q(\underline{H}_B^1 F)) \otimes C^p(\mathscr{U} \cap B, \mathrm{ext}^{n-q-1}(\underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)) \\ &\longrightarrow C_0(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^n)) \xrightarrow[T_1^{0,n-1}]{} C . \end{aligned}$$

Pour $q = k-1$, il y a un isomorphisme de $C^p(\mathscr{U} \cap B, \mathrm{ext}^{n-k}(\underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n))$ sur le dual de $C_p(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_c^{k-1}(\underline{H}_B^1 F))$. D'après le lemme et les isomorphismes en haut on voit que l'homomorphisme de bord

$$\theta_{p+1}\colon C_{p+1}(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_c^{k-1}(\underline{H}_B^1 F)) \longrightarrow C_p(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_c^{k-1}(\underline{H}_B^1 F))$$

est à l'image fermée. On obtient ainsi l'isomorphisme de

$$H^p(\mathscr{U} \cap B, \mathrm{ext}^{n-k}(\underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n))$$

sur le dual de $H_p(\mathscr{U} \cap B, \mathscr{H}_c^{k-1}(\underline{H}_B^1 F))$. D'où et d'après les Propositions 2.4.3 et 2.4.6 on a le théorème.

COROLLAIRE 3.2.3. *Le dual d'espace* $H^q(B, \underline{H}_B^1 \Omega^p)$ (*comme un espace*

***FS** ou **DFS**) est isomorphe à* $H^{n-q-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^{n-p})$ *pour tous* p *et* q.

3.3. Dans ce paragraphe on suppose que X soit une *variété complexe* de dimension $n \geqq 3$. $D \subset X$ et $B = \partial D$ soient les mêmes qu'avant. Le premier et le deuxième théorèmes de dualités s'expliquent comme suit.

Pour tout faisceau cohérent F sur X et pour tout p,

(i) *il existe une structure d'espace **QFS** (le quotient de **FS**) sur* $H^p(D, F)$ *et celle d'espace **QDFS** (le quotient de **DFS**) sur* $\mathrm{Ext}_c^{n-p}(D; F, \Omega^n)$ *telles que la trace;* $H_c^n(D, \Omega^n) \to \boldsymbol{C}$, *induit entre eux un accouplement qui fait du séparé associé de* $\mathrm{Ext}_c^{n-p};(D; F, \Omega^n)$ *le dual fort du séparé associé de* $H^p(D, F)$. $H^p(D, F)$ *est séparé si et seulement si* $\mathrm{Ext}_c^{n-p+1}(D; F, \Omega^n)$ *est séparé,*

(ii) *il existe une structure d'espace **QDFS** sur* $H_c^p(D, F)$ *et celle d'espace **QFS** sur* $\mathrm{Ext}^{n-p}(D; F, \Omega^n)$ *telles que la trace induit un accouplement entre ces espaces qui fait du séparé associé de* $\mathrm{Ext}^{n-p}(D; F, \Omega^n)$ *le dual fort du séparé associé de* $H_c^p(D, F)$. *La séparation de* $H_c^p(D, F)$ *est équivalente à celle de* $\mathrm{Ext}^{n-p+1}(D; F, \Omega^n)$.

Dans notre cas, le domaine D étant fortement pseudoconvexe, les espaces $H^p(D, F)$ sont séparés pour tout p et les espaces $H_c^p(D, F)$ sont séparés pour $p \leqq \mathrm{codh}\, F$. On a donc les isomorphismes;

$$(H^p(D, F))' \cong \mathrm{Ext}_c^{n-p}(D; F, \Omega^n)\,, \quad \text{pour tout } p\,,$$

et

$$(H_c^p(D, F))' \cong \mathrm{Ext}^{n-p}(D; F, \Omega^n) \quad \text{pour} \quad p \leqq \mathrm{codh}\, F\,.$$

De ces dualités avec nos dualités précédentes et des Propositions 1.3.2, 2.4.6 et (2.4.2), on déduit la relation entre $H^p(D, F)$, $H_c^p(D, F)$, $H^p(B, \underline{H}^1_B F)$ et ces duaux:

THÉORÈME 3.3.1. *Soit* F *un faisceau cohérent sur* X *tel que* $k = \mathrm{codh}\, F = \dim F \geqq 3$. *On a les deux suites exactes suivantes dont chaque terme dans la deuxième est le dual topologique du terme correspondant dans la première*:

i)
$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Gamma(D, F) \longrightarrow \Gamma(B, \underline{H}^1_B F) \longrightarrow H_c^1(D, F) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow H_c^{k-1}(D, F) \longrightarrow H^{k-1}(D, F) \longrightarrow H^{k-1}(B, \underline{H}^1_B F) \\ &\longrightarrow H_c^k(D, F) \longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} 0 &\longleftarrow \mathrm{Ext}_c^n(D; F, \Omega^n) \longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n) \\ &\longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(D; F, \Omega^n) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-k+1}(D; F, \Omega^n) \\ &\longleftarrow \mathrm{Ext}_c^{n-k+1}(D; F, \Omega^n) \longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-k}(B; \underline{H}^1_B F, \underline{H}^1_B \Omega^n) \\ &\longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-k}(D; F, \Omega^n) \longleftarrow 0\,. \end{aligned}$$

Nous posons;

$$\chi(p)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim H^i(D, \Omega^p) ,$$

$$\chi_c(p)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim H_c^i(D, \Omega^p) ,$$

$$\chi_b(p)=\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i \dim H^i(B, \underline{H}_B^1\Omega^p) .$$

D'après le théorème de dualité et du Corollaire 3.2.3, on voit que,

$$\chi_c(p)=(-1)^n\chi(n-p) ,$$

$$\chi_b(p)=(-1)^{n-1}\chi_b(n-p) .$$

De la longue suite exacte ci-dessus, on a

$$\chi_c(p)+\chi_b(p)=\chi(p) .$$

D'où la relation suivante.

PROPOSITION 3.3.2.

$$\chi(p)+(-1)^{n-1}\chi(n-p)=\chi_b(p) .$$

S. S-T. Yau a donné une condition où la gauche s'annule. Il sera intéressant de chercher le lien de notre théorie avec les résultats donnés dans [19]. En faisant on pourrais espérer le théorème de Riemann-Roch sur des variétés fortement pseudoconvexes. On a les relations suivantes.

PROPOSITION 3.3.3.

$$\chi_b(p)=(-1)^{n-1}\chi_b(n-p) ,$$

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\chi_b(p)=0 .$$

§4. Dualité de Poincaré-Lefschetz et de Hodge.

Soient X une variété complexe de dimension $n\geqq 3$ et D un ouvert relativement compact et fortement pseudoconvexe dans X, soit B la frontière de D. $\Omega^{\cdot}$ est le complexe de faisceaux des formes holomorphes sur X.

Pour un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ d'une partie E, et pour tout complexe de préfaisceaux $K^{\cdot}$ sur E, on désigne par $\boldsymbol{H}^{\cdot}(\mathscr{U}, K^{\cdot})$ l'hypercohomologie de recouvrement $\mathscr{U}$ à coefficients dans $K^{\cdot}$ ([9], p. 63). Lorsque $K^{\cdot}$ est un complexe de faisceaux, il existe une suite spectrale aboutissante à l'hypercohomologie $\boldsymbol{H}^{\cdot}(E, K^{\cdot})$;

(4.0.1) $$E_2^{p,q}=\boldsymbol{H}^{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{H}^q(K^{\cdot}))\Longrightarrow \boldsymbol{H}^{\cdot}(E, K^{\cdot}) ,$$

où $\mathscr{H}^q(K^{\cdot})$ désigne le complexe de préfaisceaux $V\to H^q(V, K^{\cdot})$.

Soit maintenant $L_{\cdot}$ un complexe de précofaisceaux. L'hyperhomologie du recouvrement $\mathscr{U}$ à coefficients dans $L_{\cdot}$ est l'homologie du bicomplexe $C_{\cdot}(\mathscr{U}, L_{\cdot})$, dont le composant d'indices (i, j) est $C_i(\mathscr{U}, L_j)$, groupe des i-chaînes alternées du nerf de $\mathscr{U}$ à valeurs dans L_j. Nous la noterons $\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, L_{\cdot})$.

4.1. Soit $\mathscr{U}=\{V_i\}$ un recouvrement de $\bar{D}$ par des ouverts de Stein tel que V_i soit un bon voisinage si $V_i\cap B\neq\varnothing$. On pose

$$\mathscr{U}'=\{V_i;\ V_i\cap B\neq\varnothing\} .$$

On a vu dans la section 2 que; pour tout faisceau localement libre F,

(i) $\mathscr{H}^q(j_*(F|D))=0$ pour $q>0$ sur tout nerf de $\mathscr{U}$,

(ii) $\mathscr{H}^q(j_!(F|D))=0$ pour $q>0$ sur tout nerf de $\mathscr{U}$ qui est contenu dans D,

(iii) $\mathscr{H}^q(j_!(F|D))=0$ pour $q\neq n$ sur tout nerf de $\mathscr{U}'$,

(iv) $\mathscr{H}^q(\underline{H}_B^1F)=0$ pour $q\neq 0$, $n-1$, sur tout nerf de $\mathscr{U}'$.

LEMME 4.1.1. *Les suites suivantes des complexes des préfaisceaux sur les nerfs de $\mathscr{U}'$ sont exactes*:

$$0\longrightarrow\mathscr{H}^n(j_!\Omega^0)\longrightarrow\mathscr{H}^n(j_!\Omega^1)\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathscr{H}^n(j_!\Omega^n)\longrightarrow 0 ,$$

$$0\longrightarrow\mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^0)\longrightarrow\mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^1)\longrightarrow\cdots \longrightarrow\mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^n)\longrightarrow 0 .$$

L'exactitude de la deuxième suite découle, par un argument de la suite spectrale, de la suite exacte (3.1.1) et de (iv) ci-dessus (Lemme 2.3.2 dans [12]). D'où l'exactitude de la première suite si l'on note, d'après le Corollaire 2.2.4, que $\mathscr{H}^n(j_!\Omega^p)\cong\mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^p)$ sur les nerfs de $\mathscr{U}'$.

PROPOSITION 4.1.2.

$$\boldsymbol{H}^{\cdot}(\mathscr{U}, j_*\Omega^{\cdot})\cong\boldsymbol{H}^{\cdot}(X, j_*\Omega^{\cdot})\cong\boldsymbol{H}^{\cdot}(D, \Omega^{\cdot}) \cong\boldsymbol{H}^{\cdot}(\bar{D}, \boldsymbol{C}) .$$

En effet, on a, d'après (4.0.1) et (i) ci-dessus,

$$H^{\cdot}(\mathscr{U}, j_*\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(X, j_*\Omega^{\cdot}) .$$

Puisque $R^q j_*(\Omega^{\cdot}|D)=0$ pour $q>0$, on a $H^q(X, j_*(\Omega^p|D)) \cong H^q(D, \Omega^p)$, par suite,

$$H^{\cdot}(X, j_*\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(D, \Omega^{\cdot}) .$$

D'après le lemme de Poincaré la dernière est isomorphe à $H^{\cdot}(D, C) \cong H^{\cdot}(\bar{D}, C)$.

PROPOSITION 4.1.3.

$$\begin{aligned} H^{\cdot}(\mathscr{U}, j_!\Omega^{\cdot}) &\cong H^{\cdot}(X, j_!\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}_c(D, \Omega^{\cdot}) \\ &\cong H^{\cdot}(\bar{D}, B; C) . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après les enoncés (ii) et (iii) ci-dessus et le fait que $\mathscr{H}^n(j_!\Omega^{\cdot})$ est quasi-isomorphe au complexe 0, on a

$$H^{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{H}^q(j_!\Omega^{\cdot}))=0 \quad \text{pour tout} \quad q>0 .$$

Il en résulte que

$$H^{\cdot}(\mathscr{U}, j_!\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(X, j_!\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}_c(D, \Omega^{\cdot}) .$$

On a d'autre part, pour tout faisceau localement libre F,

$$\begin{aligned} \Gamma(U_{i_0\cdots i_p}, j_!(F|D)) &\cong \Gamma_{\varphi(U_{i_0\cdots i_p})|U_{i_0\cdots i_p}\cap D}(U_{i_0\cdots i_p}\cap D, F) \\ &= \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad U_{i_0\cdots i_p}\cap B \neq \varnothing , \\ \Gamma(U_{i_0\cdots i_p}, F) \quad \text{si} \quad U_{i_0\cdots i_p} \subset D , \end{cases} \end{aligned}$$

donc on a

$$C^p(\mathscr{U}, j_!(F|D)) \cong C^p(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; F) ,$$

où $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; F)$ est le p-ème cochaîne relative de $(\mathscr{U}, \mathscr{U}')$. Le foncteur $j_!(.|D)$ étant exact, il en découle l'isomorphisme:

$$H^{\cdot}(\mathscr{U}, j_!\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; \Omega^{\cdot}) .$$

En vertu du lemme de Poincaré, celle-ci est isomorphe à

$$H^{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; C) \cong H^{\cdot}(\bar{D}, B; C) .$$

PROPOSITION 4.1.4.

$$H^{\cdot}(\mathscr{U}, \underline{H}^1_B\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(B, \underline{H}^1_B\Omega^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(B, C) .$$

D'abord on rappelle que le support de $\underline{H}_B^1 F$ est B. D'après (iv) ci-dessus et le fait que le complexe $\mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot)$ est quasi-isomorphe à 0, appliquant la suite spectrale (4.0.1), on a l'isomorphisme:

$$\boldsymbol{H}^\cdot(\mathscr{U}, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \cong \boldsymbol{H}^\cdot(B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) .$$

On a, d'après (2.1.1), l'isomorphisme:

$$\boldsymbol{H}^\cdot(B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \cong \boldsymbol{H}^\cdot(B, \boldsymbol{C}) .$$

Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!(\Omega^\cdot|D) \longrightarrow j_*(\Omega^\cdot|D) \longrightarrow \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot \longrightarrow 0 .$$

On en déduit la suite d'hypercohomologie:

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \boldsymbol{H}^{i-1}(B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \longrightarrow \boldsymbol{H}_c^i(D, \Omega^\cdot) \\ &\qquad \longrightarrow \boldsymbol{H}^i(D, \Omega^\cdot) \longrightarrow \boldsymbol{H}^i(B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \longrightarrow . \end{aligned}$$

D'où et d'après les Propositions ci-dessus on obtient la suite exacte de cohomologie de la couple $(\bar{D}, B)$:

$$\begin{aligned} &\longrightarrow H^{i-1}(B, \boldsymbol{C}) \longrightarrow H^i(\bar{D}, B; \boldsymbol{C}) \longrightarrow H^i(\bar{D}, \boldsymbol{C}) \\ &\qquad \longrightarrow H^i(B, \boldsymbol{C}) \longrightarrow . \end{aligned}$$

4.2. On passe maintenant au calcul des homologies. On a vu dans 2.1 et 2.2 que; pour tout faisceau localement libre F,

(v) $\mathscr{H}_c^q(j_*(F|D)) = 0$ pour $q \neq n$ sur tout nerf de $\mathscr{U}$ qui est contenu dans D, et
$\mathscr{H}_c^q(j_*(F|D)) = 0$ pour $q \neq 0$ sur tout nerf de $\mathscr{U}'$,

(vi) $\mathscr{H}_c^q(j_!(F|D)) = 0$ pour $q \neq n$ sur tout nerf de $\mathscr{U}$,

(vii) $\mathscr{H}_{c'}^q(\underline{H}_B^1 F) = 0$ pour $q \neq 0$, $n-1$, sur tout nerf de $\mathscr{U}'$, et
$\mathscr{H}_{c'}^0(\underline{H}_B^1 F) \cong \mathscr{H}_c^0(j_*(F|D))$, $\mathscr{H}_{c'}^{n-1}(\underline{H}_B^1 F) \cong \mathscr{H}_c^n(j_!(F|D))$.

On a vu aussi dans le Corollaire de la Proposition 3.1.3 que le complexe $\mathscr{H}_{c'}^0(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot)$ est quasi-isomorphe au complexe 0. De la relation (vii) ci-dessus on voit aussitôt que $\mathscr{H}_c^0(j_* \Omega^\cdot)$ est quasi-isomorphe à 0. Il en découle la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.1.

$$\boldsymbol{H}_\cdot(\mathscr{U}, \mathscr{H}_c^q(j_* \Omega^\cdot)) = 0 \quad \textit{pour} \quad q \neq n ,$$

$$\boldsymbol{H}_\cdot(\mathscr{U}, \mathscr{H}_c^q(j_! \Omega^\cdot)) = 0 \quad \textit{pour} \quad q \neq n ,$$

$$\boldsymbol{H}_\cdot(\mathscr{U}, \mathscr{H}_c^q(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot)) = 0 \quad \textit{pour} \quad q \neq n-1 .$$

Nous posons;

$$^{c}\omega_{\cdot} = \mathscr{H}_{c}^{n}(j_{*}(\Omega^{n-\cdot}|D)) ,$$

$$\omega_{\cdot} = \mathscr{H}_{c}^{n}(j_{!}(\Omega^{n-\cdot}|D)) ,$$

$$^{b}\omega_{\cdot} = \mathscr{H}_{c}^{n-1}(\underline{H}_{B}^{1}\Omega^{n-\cdot}) .$$

Chacun est un complexe de précofaisceaux dont l'opération de dérivation est de degré -1;

$$0 \longrightarrow \omega_{n} \longrightarrow \omega_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \omega_{0} \longrightarrow 0 ,$$

respectivement pour $^{c}\omega_{\cdot}$ et $^{b}\omega_{\cdot}$. On peut vérifier d'après la Proposition 2.4.3 que $^{b}\omega_{p}$ est actuellement un cofaisceau, ainsi que ω_{p} et $^{c}\omega_{p}$.

PROPOSITION 4.2.2.

$$\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, \omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(\bar{D}, C) ,$$

$$\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, {}^{c}\omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(\bar{D}, B; C) ,$$

$$\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, {}^{b}\omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(B, C) .$$

DÉMONSTRATION. On note que $^{c}\omega_{p}$ s'annule sur les nerfs de $\mathscr{U}'$, tandis que $^{b}\omega_{p}$ s'annule sur les nerfs de $\mathscr{U}$ qui sont contenus dans D. Sur tout nerf de $\mathscr{U}$ contenu dans D le complexe $^{c}\omega_{\cdot}$ est quasi-isomorphe à C. En vertu des Corollaires 3.1.3 et 2.2.4 (ii), on voit que les complexes $\omega_{\cdot}$ et $^{b}\omega_{\cdot}$ sont aussi quasi-isomorphes à C. On en conclut d'abord que

$$C_{-p}(\mathscr{U}, {}^{c}\omega_{-q}) = C_{-p}(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; {}^{c}\omega_{-q}) ,$$

$$C_{-p}(\mathscr{U}, {}^{b}\omega_{-q}) = C_{-p}(\mathscr{U}', {}^{b}\omega_{-q}) ,$$

ensuite on obtient les isomorphismes suivants des hyperhomologies;

$$\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, {}^{c}\omega_{\cdot}) \cong \boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; {}^{c}\omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{U}'; C) ,$$

$$\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, \omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(\mathscr{U}, C) ,$$

$$\boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}, {}^{b}\omega_{\cdot}) \cong \boldsymbol{H}_{\cdot}(\mathscr{U}', {}^{b}\omega_{\cdot}) \cong H_{\cdot}(\mathscr{U}', C) .$$

La proposition est montrée en vertu du théorème de Leray.

Si l'on tien compte des (vi) et (vii) plus hauts, on trouve que la suite suivante est exacte;

$$0 \longrightarrow {}^{b}\omega_{p} \longrightarrow \omega_{p} \longrightarrow {}^{c}\omega_{p} \longrightarrow 0 .$$

D'où découle la suite d'hyperhomologies correspondante, et puis on a la suite exacte d'homologies de la couple $(\bar{D}, B)$;

$$\longrightarrow H_i(B, C) \longrightarrow H_i(\bar{D}, C) \longrightarrow H_i(\bar{D}, B; C)$$
$$\longrightarrow H_{i-1}(B, C) \longrightarrow .$$

4.3. Nous allons déduire la dualité de Lefschetz-Poincaré un peu restreinte de nos representations analytiques dans 4.2 des cohomologies et homologies. Bien entendu cette dualité est vraie pour toute variété différentiable avec la frontière [18].

PROPOSITION 4.3.1.

$$H_i(\bar{D}, C) \cong H^{2n-i}(\bar{D}, B; C) , \quad \textit{pour tout} \quad i ,$$
$$H_i(\bar{D}, B; C) \cong H^{2n-i}(\bar{D}, C) , \quad \textit{pour} \quad i \leqq n-1 ,$$
$$H_i(B, C) \cong H^{2n-1-i}(B, C) , \quad \textit{pour} \quad i \leqq n-2 .$$

DÉMONSTRATION. D'abord on note que, pour un faisceau cohérent F, on a

$$H_{n-i}(\mathscr{U}, \mathscr{H}_c^n(j_! F)) \cong H_c^i(D, F) ,$$

et

$$H_{n-j}(\mathscr{U}, \mathscr{H}_c^n(j_* F)) \cong H^j(D, F) \quad \text{pour} \quad j \geqq 1 .$$

Ceci est montré par la suite spectrale des homologies de précofaisceaux qu'on a vue dans la section 1, et d'après la Proposition 2.1.7. De ces relations on a;

$$H_{-p}(\mathscr{U}, \omega_{-q}) \cong H_c^{n+p}(D, \Omega^{n+q}) ,$$

et

$$H_{-p}(\mathscr{U}, {}^c\omega_{-q}) \cong H^{n+p}(D, \Omega^{n+q}) , \quad \text{pour} \quad p \geqq -n+1 .$$

D'autre part, d'après les propositions dans 4.1 et 4.2, on a les suites spectraux pour homologies;

$$E_1^{p,q} = H_{-p}(\mathscr{U}, \omega_{-q}) \Longrightarrow H_\cdot(\bar{D}, C) ,$$

et

$${}_c'E_1^{p,q} = H_{-p}(\mathscr{U}, {}^c\omega_{-q}) \Longrightarrow H_\cdot(\bar{D}, B; C) ,$$

et celles pour cohomologies;

$${}^cE_1^{r,s} = H_c^r(D, \Omega^s) \Longrightarrow H^\cdot(\bar{D}, B; C) ,$$

et

$$'E_1^{r,s} = H^r(D, \Omega^s) \Longrightarrow H^{\cdot}(\bar{D}, C) .$$

Il en résulte que

$$H_i(\bar{D}, C) \cong H^{2n-i}(\bar{D}, B; C) ,$$

et

$$H_j(\bar{D}, B; C) \cong H^{2n-j}(\bar{D}, C) , \quad \text{pour} \quad j \leqq n-1 .$$

Par le même argument que ci-dessus, usant la Proposition 2.4.3, on a l'isomorphisme:

$$H_i(B, C) \cong H^{2n-1-i}(B, C) , \quad \text{pour} \quad i \leqq n-2 .$$

On veut remarquer qu'on n'a pas ci-dessus usé aucun théorème de dualité qu'on a traité dans la section précédente. Nous allons voir plus de la relation dualiste des homologies et cohomologies en vertu du théorème de dualité.

Rappelons qu'on a montré le théorème de finitude

$$\dim H^p(\mathscr{U} \cap B, \underline{H}_B^1 F) < \infty ,$$

et le théorème de dualité;

$$(H^p(\mathscr{U} \cap B, \underline{H}_B^1 F))' \cong H_p(\mathscr{U} \cap B, \operatorname{ext}_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)) ,$$

pour tout p et tout faisceau cohérent F tel que $\operatorname{codh} F \geqq 3$, voir le corollaire du Théorème 3.2.1. En particulier, le dual de $H^p(\mathscr{U}, \underline{H}_B^1 \Omega^q)$ est $H_p(\mathscr{U}, {}^b\omega_q)$, et ces espaces sont de dimension finite. Cela étant ainsi, les aboutissements héritent la relation dualiste des termes initiaux dans les suites spectraux suivantes;

$$E_1^{p,q} = H^{-p}(\mathscr{U}, \underline{H}_B^1 \Omega^{-q}) \Longrightarrow H^i(B, C) ,$$

$$'E_1^{p,q} = H_{-p}(\mathscr{U}, {}^b\omega_{-q}) \Longrightarrow H_i(B, C) , \qquad i = -(p+q) .$$

On a donc l'isomorphisme de dualité;

$$H_i(B, C) \cong H^i(B, C) , \quad \text{pour tout} \quad i .$$

PROPOSITION 4.3.2.
(i) $H_i(B, C) \cong H^i(B, C)$ *pour tout* i,
(ii) *soit* $i \leqq n-2$, *soit* $i \geqq n+1$,
$H_i(B, C) \cong H^{2n-1-i}(B, C)$,
(iii) *soit* $i \leqq n-1$, *soit* $i \geqq n+2$,
$H_i(\bar{D}, B; C) \cong H^{2n-i}(\bar{D}, C)$.

En effet, le troisième isomorphisme est une conséquence des suites exactes des cohomologies et homologies du couple $(\bar{D}, B)$ et de la Proposition 4.3.1.

REMARQUE IMPORTANTE. Pour les isomorphismes (i) et (ii) ci-dessus il ne faut supposer que les points dans un voisinage N de B sont réguliers comme dans la section 3, $D-N$ admet n'importe quelle singularité.

Bibliographie

[1] A. ANDREOTTI and C. BANICA, Relative duality on complex spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **XX**-9 (1975), 981-1181.

[2] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193-259.

[3] C. BANICA and O. STANASILA, Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces, John Wiley & Sons, 1976.

[4] G. E. BREDON, Sheaf Theory, McGraw Hill, New York, 1967.

[5] H. CARTAN and S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[6] R. GODEMENT, Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[7] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., **9** (1957), 119-221.

[8] A. GROTHENDIECK, Local Cohomology, Lecture Notes in Math., **41**, Springer, 1967.

[9] A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique III, Etude cohomologique des faisceaux cohérents, Publ. I. H. E. S., **11**, 1961.

[10] M. HERRERA and D. LIEBERMAN, Duality and the De Rham cohomology of infinitesimal neighborhoods, Invent. Math., **13** (1971), 97-124.

[11] T. KORI, Cohomologie de De Rham au bord d'un domaine fortement pseudoconvexe, Tokyo J. Math., **3**, (1980), 37-74.

[12] T. KORI, Théorème de dualité pour la cohomologie locale au bord des ouverts fortement pseudoconvexes, Hokkaido Math. J., **10** (1981), Sp., 374-423.

[13] B. MALGRANGE, Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 231-237.

[14] J.-P. RAMIS, Théorèmes des séparations et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **32** (1978), 933-997.

[15] J.-P. SERRE, Un théorème de dualité, Comm. Math. Helv., **29** (1955), 9-26.

[16] Y.-T. SIU, Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional complex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **143** (1969), 77-94.

[17] K. SUOMINEN, Duality for coherent sheaves on analytic manifolds, Ann. Acad. Sci. Fenn., **424** (1968).

[18] E. H. SPANIER, Algebraic Topology, McGraw Hill, New York, 1966.

[19] S. S.-T. YAU, The signature of Milnor fibers and Duality theorem for strongly pseudoconvexe manifolds, Invent. Math., **46** (1978), 81-97.

Address actuelle:
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
UNIVERSITÉ DE WASÉDA
OKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO