102. Estimation des fonctionnelles de Kac sur une variété compacte et première valeur propre de $\Delta+f$

Par Bernard GAVEAU
Université P. et M. Curie, Mathématiques*)

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Dec. 12, 1984)

Résumé. On donne une estimée supérieure de $E\left(\exp\int_0^t f(x_s)ds\right)$ sur une variété riemannienne compacte.

Summary. An upper bound of $E\left(\exp\int_0^t f(x_s)ds\right)$ on a compact Riemannian manifold is obtained.

1. Notations. Soit V une variété riemannienne compacte de dimension n, g_{ij} sa métrique normalisée de sorte que le volume de V soit 1, Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami de V. Pour toute fonction f intégrable sur V, on note

(1) $\bar{f}=\int_V f(x)dv(x)$ la moyenne de f

$\tilde{f}=f-\bar{f}$ l'oscillation de f par rapport à sa moyenne.

On note encore G l'opérateur de Green agissant sur les fonctions f de carré intégrable et de moyenne nulle.

$$\frac{1}{2}\Delta G=\delta.$$

Nommons opérateur de déviation ergodique, et notons Φ l'opérateur non linéaire sur les functions L^2 qui associe à toute fonction $f\in L^2$ la fonction

$$\Phi(f)(x)=\|\nabla G\tilde{f}\|^2(x) \tag{2}$$

où $\nabla G\tilde{f}$ est la différentielle de $G\tilde{f}$ et $\|\ \|^2$ est le carré de la longueur des 1-formes pour la métrique duale de g_{ij}.

Notons encore $x_\omega(t)$ le mouvement brownien de V de générateur infinitésimal $(1/2)\Delta$, Ω est son espace de probabilité, E_x est l'espérance conditionnelle sachant que $x_\omega(0)=x$. (Voir [1] par exemple.)

2. Fonctionnelles de Kac sur V. f étant une fonction suffisamment régulière, on étudie la fonctionnelle de Kac [2]

$$E_x\left(\exp\left(\int_0^t f(x_\omega(s))\,ds\right)\right) \tag{3}$$

lorsque $t\to+\infty$. Il est facile en utilisant le développement en série des fonctions propres de montrer

*) Tour 45-46-5ème étage, 4, place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

Lemme 1. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x\left(\exp\left(\int_0^t f(x_\omega(s)\, ds\right)\right) = \lambda_1$

où λ_1 est la borne supérieure des spectres de l'opérateur $(1/2)\Delta + f$.

L'objet de cette Note est d'obtenir une estimée de (3) lorsque $t \to +\infty$, et par conséquent de λ_1, en utilisant un raisonnement probabiliste fort simple.

Notons d'abord le lemme évident.

Lemme 2. *On a l'encadrement*

$$\bar{f} \leqq \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log E_x\left(\exp \int_0^t f(x_\omega(s))\, ds\right) \leqq \|f\|_\infty. \tag{4}$$

Preuve: L'estimée supérieure est évidente. Comme l'exponentielle est convexe la borne à obtenir est plus grande que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} E_x\left(\int_0^t f(x_\omega(s))\, ds\right)$$

et cela est $\bar{f}$ (voir [1] pour des résultats, plus fins sur la loi de $\int_0^t f(x_\omega(s))\, ds$).

Remarque. Dans le cas de $\boldsymbol{R}_n$, $(n \geqq 3)$ les estimées de ces fonctionnelles ont été obtenues dans [3], [4].

3. Estimée de la fonctionnelle de Kac par utilisation de l'opérateur de déviation ergodique. Si φ est une fonction de moyenne nulle bornée sur V, les raisonnements expliqués dans (5) justifient la formule de Itô pour la fonction $G\varphi$ donc

$$(G\varphi)(x_\omega(t)) - (G\varphi)(x) = \int_0^t \frac{\partial G\varphi}{\partial x_i}(x_\omega(s)) g^{ij}(x_\omega(s))\, db_j(s) + \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta G\varphi) x_\omega(s)\, ds$$

où b_j est un brownien standard de $\boldsymbol{R}^n$.

Mais $(1/2)\Delta G\varphi = \varphi$ et de plus il existe un brownien β tel que

$$\int_0^t \frac{\partial G\phi}{\partial x_i}(x_\omega(s)) g^{ij}(x_\omega(s))\, db_j(s) = \int_0^t \Phi(\varphi)^{1/2}(x_\omega(s))\, d\beta_\omega(s)$$

donc

$$\int_0^t \varphi(x_\omega(s))\, ds = (G\varphi)(x_\omega(t)) - (G\varphi)(x) - \int_0^t \Phi(\varphi)^{1/2}(x_\omega(s))\, d\beta_\omega(s) \tag{5}$$

d'où

Lemme 3. *On a l'estimée*

$$E_x\left(\exp\left(\int_0^t \varphi(x_\omega(s))\, ds\right)\right) \leqq \exp\,(2\|G\varphi\|_\infty) E_x\left(\exp 2\int_0^t \Phi(\varphi)(x_\omega(s)) ds\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Preuve: Utilisons (5) pour estimer (6); il suffit d'estimer

$$E_x\left(\exp\left(-\int_0^t \Phi(\varphi)^{1/2}(x_\omega(s))\, d\beta_\omega(s)\right)\right) = E_x\left(\exp\left[-\int_0^t \Phi(\varphi)^{1/2}(x_\omega(s))\, d\beta_\omega(s) - \int_0^t \Phi(\varphi)(x_\omega)\, ds\right] \exp\left(+\int_0^t \Phi(\varphi)(x_\omega(s)) ds\right)\right).$$

On majore le second membre en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de la martingale exponentielle de McKean [1]

$$E_x\left(\exp\left[-2\int_0^t \Phi(\varphi)^{1/2}(x_\omega(s))\,d\beta_\omega(s)-2\int_0^t \Phi(\varphi)(x_\omega(s))ds\right]\right)=1.$$

Théorème. *Pour tout $n>0$, il existe une constante C'_n telle que pour tout t on ait l'estimation*

$$E_x\left(\exp\left(\int_0^t f(x_\omega(s))\,ds\right)\right)\leqq C'_n \exp t\left[\bar{f}+C_1\overline{\Phi(f)}+\cdots+C_{n-1}\overline{\Phi^{n-1}(f)}\right]$$
$$\times E_x\left(\exp 2^{2^n-1}\int_0^t \Phi^n(f)(x_\omega(s))ds\right)^{2-n}$$

avec $C_k=2^{2^k-1-k}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ et Φ l'opérateur de déviation ergodique défini en 1.

Preuve: On écrit $f=\bar{f}+\tilde{f}$ et de proche en proche en utilisant le lemme 3 on est amené à étudier

$$E_x\left(\exp \alpha_n\int_0^t \Phi^n(f)(x_\omega(s))\,ds\right)^{\beta_n}\leqq D_n$$
$$\times E_x\left(\exp 2\int_0^t \Phi(\alpha_n\Phi^n(f))(x_\omega(s))\,ds\right)^{\beta_n/2}.$$

Mais l'espérance qui apparaît est du type précédent avec

$$\alpha_{n+1}=2\alpha_n^2 \qquad \beta_{n+1}=\frac{\beta_n}{2}$$

d'où $\beta_n=2^{-n}$ et $\alpha_n=2^{2^n-1}$.

Corollaire. *Pour tout $n>0$, on a*

$$\bar{f}\leqq\lambda_1\leqq\bar{f}+\sum_{k=1}^{n} C_k\overline{\Phi^k(f)}+C_{n+1}\|\Phi^{n+1}(f)\|_\infty. \tag{8}$$

Remarque 1. Cette estimée n'est pas celle qu'on obtiendrait par une série de perturbation pur $(1/2)\Delta+f$. En particulier, lorsqu'on arrête la série de perturbation au rang p, on ne sait pas si on obtient un minorant ou un majorant de λ_1. Ici la série majore toujours λ_1.

Remarque 2. Il peut sembler à première vue que les coefficients C_n ont une croissance très grande. Cependant, comme va le montrer l'exemple suivant, le fait que Φ soit quadratique et qu'il faille prendre l'oscillation de $\Phi^n(f)$ pour définir le terme suivant permet d'obtenir des séries convergentes. Enfin, des estimées de ∇G sont données dans [6].

4. Cas d'un potentiel périodique sur $\boldsymbol{R}^n$. Prenons pour V le tore plat T^n de périodes 1 et pour f un potentiel périodique du type

$$f(\vec{x})=a\times\cos(2\pi(\vec{k}\,|\,\vec{x})) \tag{9}$$

où $a\in\boldsymbol{R}$, $\vec{k}\in Z^n$ et $\vec{k}$ n'est pas nul, de sorte que $\bar{f}=0$.

Posons

$\Phi^n(f)=\beta_n(\cos(2\pi(\alpha_n\vec{k}\,|\,\vec{x}))+1)$; on déduit facilement

$$\Phi^{n+1}(f)=\frac{2\beta_n^2}{(2\pi)^2|k|^2\alpha_n^2}\qquad(\cos(2\pi(2\alpha_n\vec{k}\,|\,\vec{x}))+1)$$

de sorte que

$$\alpha_n = 2^n$$
$$\beta_n = (2^{-1}(2\pi)^2|k|^2)^{-1}(\beta_{n-1}\alpha_{n-1}^{-1})^2$$

soit

$$\beta_n = \left(\frac{a}{2(2\pi)^2|k|^2}\right)^{2^n-1} a2^{2n}$$

et le terme général de la série $\sum_{n\geqq 1} C_n\overline{\Phi^n(f)}$ est

$$C_n\beta_n = \left(\frac{a}{(2\pi)^2|k|^2}\right)^{2^n-1} a2^n.$$

Dans le cas où $a/(2\pi)^2|k|^2<1$, la série $\sum C_n\beta_n$ converge et donne un majorant de λ_1. Par ailleurs, on peut comparer l'estimée grossière $\lambda_1 \leqq \|f\|_\infty = |a|$ à l'estimée

$$\lambda_1 \leqq \|\Phi(f)\|_\infty = 2\beta_1 = \frac{4a^2}{(2\pi)^2|k|^2}.$$

Cette dernière estimée est meilleure que $\|f\|_\infty$ lorsque $4a/((2\pi)^2|k|^2)<1$.

Références

[1] H. P. McKean: Stochastic Integrals. Acad. Press (1969).
[2] M. Kac: 2-nd Berkeley Symposium on probability and statistics (1950).
[3] A. M. Berthier et B. Gaveau: J. Funct. analysis, **29**, 416 (1978).
[4] B. Gaveau et E. Mazet: Publi. RIMS Kyoto, **18**, 365–377 (1982).
[5] B. Gaveau: Comm. in Math. Physics, **69**, 131 (1979).
[6] T. Aubin: J. Maths pures et appliquées (1976).