83. *Über die rationalen Nullstellen der von Potenzsummen der natürlichen Zahlen definierten Polynome*

Von Noriaki KIMURA*) und Hardmud SIEBERT**)

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1980)

Für $k \in N$ seien die Polynome $P_k(x) \in Q[x]$ erklärt durch

$$P_k(n)=\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \qquad \text{für alle } n \in N, \tag{1}$$

also zum Beispiel

$$P_1(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$$

$$P_2(x)=\frac{1}{3}x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)^2$$

$$\vdots \qquad .$$

Wir untersuchen die Nullstellen der Polynome $P_k(x)$. Auf der Zahlentheorie-Tagung in Oberwolfach 1975 stellte J. L. Nicolas die Frage, ob sämtliche Nullstellen der $P_k(x)$ rational sind. Das kann, wie schon das Beispiel

$$P_4(x)=\frac{1}{5}x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x-\frac{1}{3}\right)$$

zeigt, nicht der Fall sein. Im Gegenteil stellt sich heraus, daß kein $P_k(x)$ andere rationale Nullstellen haben kann als die bereits bei $P_1(x)$, $P_2(x), P_3(x)$ vorkommenden Nullstellen $x=0$, $x=-1$, $x=-1/2$. Genauer zeigen wir:

Satz 1. *Es ist*

$$P_k(0)=0 \qquad \textit{für } k\geq 1 \tag{2}$$

$$P_k(-1)=0 \qquad \textit{für } k\geq 1 \tag{3}$$

$$P_k\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \textit{für } k\geq 2,\ 2\mid k. \tag{4}$$

Satz 2. *Die Nullstelle bei $x=-1/2$ ist stets einfach. Die Nullstellen bei $x=0$ und $x=-1$ sind für $k\geq 3$, $2\nmid k$ doppelt und in den übrigen Fällen einfach.*

Satz 3. *Alle anderen Nullstellen der $P_k(x)$ außer $x=0$, $x=-1$,*

---

*) College of Industrial Technology, Nihon University, Izumi-cho, Narashino-shi, Chiba 275, Japan.

**) Universität Ulm (MNH), Abt. für Mathematik III. Oberer Eselsberg, 7900 Ulm (Donau) B.R.D.

$x=-1/2$ *sind irrational* ($\notin \boldsymbol{Q}$).

Als eine Anwendung läßt sich aus Satz 2 ohne Mühe ableiten, daß die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu\right)^2$$

die einzige ihrer Art ist, was Wm. J. LeVeque in [3] bewiesen hat.

Zum Beweis von Satz 1 brauchen wir, daß

$$P_k(n)+(n+1)^k = P_k(n+1) \qquad \text{für } \forall n \in \boldsymbol{N}$$

ist, also auch

$$(5) \qquad P_k(x)+(x+1)^k = P_k(x+1).$$

Wir setzen hierzu $x=0$ und erhalten wegen $P_k(1)=1$ die Behauptung (2). Summieren wir (5) über $x=-n, \cdots, x=-1$, ergibt sich

$$P_k(-n)-P_k(0)=(-1)^{k+1}P_k(n-1)$$

für alle $n \in \boldsymbol{N}$. Da dies eine Identität ist, haben wir

$$(6) \qquad P_k(-x)=(-1)^{k+1}P_k(x-1).$$

Setzen wir hierhin $x=0$, folgt aus (2) die Behauptung (3), für $x=1/2$ folgt (4).

Um Satz 3 zu zeigen, benutzen wir die bekannte Darstellung der $P_k(x)$ durch Bernoullische Polynome $B_m(x)$ bzw. Bernoullische Zahlen B_m. Es ist

$$(7) \qquad P_k(x)=\frac{1}{k+1}\{B_{k+1}(x+1)-B_{k+1}\},$$

wobei $B_m(x)$ bzw. B_m erklärt sind durch

$$(8) \qquad \frac{e^{xt}t}{e^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

und

$$B_m = B_m(0).$$

Aus (8) gewinnt man leicht

$$(9) \qquad B_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}B_j x^{m-j}.$$

Lemma. *Ist* $P_k(s/r)=0$, $s, r \in \boldsymbol{Z}$, $r \geq 1$, $(s, r)=1$, *so ist* $2 \nmid k$, $r=1$, *oder* $2 \mid k$, $r=1$ *oder* $r=2$.

Beweis. Wegen (7) reicht es zu zeigen, daß die Lösungen $x=s/r$ der Gleichung

$$(10) \qquad B_{k+1}(x)-B_{k+1}=0$$

von der behaupteten Form sind. Sei also $x=s/r$, $r \geq 1$, $(s, r)=1$. Dann ist (10) wegen (9) äquivalent mit

$$(11) \qquad s^{k+1}+\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k+1}{\nu}B_\nu s^{k+1-\nu}r^\nu=0.$$

Sei nun p eine Primzahl mit $p \mid r$ und N der Hauptnenner der Zahlen $B_1=-1/2$, $B_2, \cdots, B_k$. Ist $p \nmid N$, so folgt aus (11) $p \mid Ns^{k+1}$, also $p \mid s$. Das ist ein Widerspruch zu $(s, r)=1$. Also existiert ein B_j $(1 \leq j \leq k)$, so daß p den Nenner von B_j teilt. Nach dem Satz von v. Staudt-Clausen ist

$$B_j + \sum_{p-1|j} \frac{1}{p}$$

ganz für $j=1,2,4,6,\cdots$ (und $B_j=0$ für die übrigen Indizes). Ist $p>2$, so folgt ähnlich wie oben $p^2|Ns^{k+1}$. Da N quadratfrei ist (als Folge aus dem Satz von v. Staudt-Clausen), ist dies ein Widerspruch zu $(s,r)=1$. Also ist $r=2^t$, $t\in N\cup\{0\}$, $2\nmid s$. Durch Betrachten der Teilbarkeit durch 2 in (11) erhält man die Behauptung des Lemmas.

Satz 3 folgt nun, indem wir noch

$$P_k(n)\neq 0 \qquad \text{für } n\geq 1,\ n\leq -2,\ k\geq 1 \tag{12}$$

$$P_k\left(n+\frac{1}{2}\right)\neq 0 \qquad \text{für } n\neq -1,\ k\geq 1,\ 2|k \tag{13}$$

zeigen. Für $n\geq 1$ folgt (12) aus (2) und (5), hieraus folgt (12) für $n\leq -2$ wegen (6). Die Behauptung (13) folgt ähnlich aus $P_k(-1/2)=0$ und den Funktionalgleichungen (5) und (6). Damit ist Satz 3 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 2 betrachtet man die Ableitung von $P_k(x)$. Es zeigt sich aus (7) und (9)

$$P'_k(x)=B_k(x+1)=kP_{k-1}(x)+B_k \qquad \text{für } 2\leq k$$
$$P''_k(x)=k(k-1)P_{k-2}(x)+kB_{k-1} \qquad \text{für } 3\leq k.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung, da $B_k=0$ für $k\geq 3$, $2\nmid k$ ist und $B_k(1/2)=(1-2^{k-1})B_k/2^{k-1}$.

Literatur

[1] N. E. Nörlund: Differenzenrechnung, Springer (1924).
[2] S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič: Zahlentheorie, Birkhäuser Verlag (1966).
[3] W. J. LeVeque: On the equation $a^x-b^y=1$. Amer. J. Math., **74**, 325–331 (1952).
[4] S. M. Edmonds: Sums of powers of the natural numbers. Math. Gaz., **41**, 187–188 (1957).