68. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* III

Par J.-L. MAUCLAIRE
Pensionnaire à la Maison franco-japonaise

(Communicated by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., June 12, 1980)

On conserve les notations des notes I et II de même titre.

On a d'abord le résultat suivant:

Théorème 5.1. *Soit I' : $N^* \to \{0, 1\}$. On suppose $I' \in B^1$, et que la série de Fourier associée à I' ne comporte que des "sommes de Ramanujan."*

Alors, I' est associée dans B^1 à la fonction caractéristique d'un ensemble μ-intégrable de E.

Réciproquement, à la fonction caractéristique d'un ensemble μ-intégrable de E, on peut associer un élément de B^1 ne prenant que les valeurs 0 et 1 dont la série de Fourier ne comporte que des "sommes de Ramanujan."

Ce résultat donne une caractérisation des fonctions de B^1 induites par des éléments de $L^1(E, d\mu)$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1.

Un autre résultat relatif à certains ensembles d'entiers particuliers est le suivant:

Théorème 5.2. *Soit $f(n)$ une fonction multiplicative telle que pour tout p et tout $k \geqslant 0$, $f(p^k) \geqslant 1$.*

On suppose que $f \in B^1$.

Soit $\sigma_f(x)$ la distribution asymptotique de f. Alors, en tout point de continuité x de σ_f, la fonction

$$\begin{aligned} I_x(n) &= 1 \quad si \quad f(n) < x \\ &= 0 \quad si \quad f(n) \geqslant x \end{aligned}$$

est un élément de B^1 dont la série de Fourier ne comporte que des "sommes de Ramanujan."

On remarquera que bon nombre de fonctions classiques vérifient les hypothèses du théorème; par exemple, la fonction $\sigma(n)/n$, dont la distribution est continue; la fonction $(\varphi(n)/n)^{-1}$ entre dans la même catégorie [2]. On peut en déduire que la fonction $J_x(n) = 1$ si $\varphi(n)/n < x$, 0 sinon, $\in B^1$. Le Théorème 2.2 nous donne aussi que $\sigma_f(x) = \lim_{y \to \infty} (\prod_{p \leqslant y} (1 - (1/p))) \times \sum_{n \in E_y} I_x(n)/n$ aux points de continuité x de σ_f.

Enfin, si f_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des fonctions vérifiant les hypothèses du Théorème 5.2, et si x_i sont des points de continuité de σ_{f_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$, alors, pour tout $h \in B^1$, on a:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leq N\\ f_i(n)<x_i\\ 1\leq i\leq m}} h(n) \qquad \text{existe.}$$

Pour démontrer le Théorème 5.1, on utilise le fait qu'à tout fonction $I'\in B^1$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1, on peut associer une fonction $I(t)\in \mathcal{L}^1(E, d\mu)$ telle que $0\leqslant I(t)\leqslant 1$, et on montre que $I(t)=0$ ou 1 $d\mu$-presque partout; pour la réciproque, on fait le contraire: à une fonction $I(t)\in \mathcal{L}^1(E, d\mu)$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1 $d\mu$-presque partout, on associe une suite $a(n)$ telle que $0\leqslant a(n)\leqslant 1$, $a(n)\in B^1$, et on montre que $a(n)$ est équivalente à une suite $u(n)\in B^1$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1.

La démonstration du Théorème 5.2 repose sur un théorème de B. Jessen et A. Wintner [1]. (On trouvera dans l'article [1] tous les renseignements suffisants relatifs aux fonctions de distributions asymptotiques.) Les démonstrations de ces résultats seront publiées ultérieurement.

Références

[1] B. Jessen and A. Wintner: Distribution function and the Riemann ζ-function. Trans. Amer. Math. Soc., **38**, 48–88 (1935).

[2] P. Erdös and A. Wintner: Additive arithmetical functions and statistical independence. Amer. J. Math., **61**, 713–721 (1939).