52. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres. II*

Par J.-L. MAUCLAIRE
Pensionnaire à la Maison franco-japonaise

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1980)

On conserve les notations de la Note I de même titre. Les résultats établis dans la-dite note permettent de démontrer le théorème suivant:

Théorème 4.1. *Soit f une fonction multiplicative complexe, i.e.: $f: \boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{C}$ et $f(mn)=f(m)f(n)$ si $(m, n)=1$.*

Si l'on a:

(H.1) *Il existe un $\alpha > 1$ tel que:*

(H.1.1): $\displaystyle F_\alpha(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{|f(n)|^\alpha}{n^s}$ *converge pour* $\mathbf{Re}\, s > 1$.

(H.1.2): $\displaystyle \limsup_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}} (\sigma-1)F_\alpha(\sigma) < +\infty.$

(H.2) *Il existe un chemin Γ donné par $\gamma: [0,1]\to \boldsymbol{C}$, γ continue, satisfaisant à:*

$$\mathbf{Re}\, \gamma(t) > 1 \quad si\ t\neq 1, \quad \gamma(1)=1 \quad et \limsup_{t\to 1} \frac{|I(m)\gamma(t)|}{\mathrm{Re}\, \gamma(t)-1} < +\infty,$$

pour lequel:

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\Gamma}} (s-1)\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{existe et est non nulle.}$$

Alors

(C) *les sommes ou séries suivantes convergent:*

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_{|f(p)|\leqslant 2} \frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{|f(p)|>2} \frac{|f(p)|^\alpha}{p}, \quad \sum_p \sum_{r\geqslant 2} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r},$$

et de plus, pour tout p,

$$1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{f(p^k)}{p^k}\neq 0.$$

Réciproquement, les conclusions énoncées dans C impliquent les hypothèses H.

De plus, la moyenne de f existe, et l'on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{\substack{s\to 1\\ \mathrm{Re}\ s>1}} (s-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\times\sum_{k\geqslant 0}\frac{f(p^k)}{p^k}.$$

Esquissons brièvement la démonstration du Théorème.

1° Tout d'abord, on démontre que moyennant (H), pour tout p, la série $\sum_{k\geqslant 0} f(p^k)/p^{ks}$ définit une fonction holomophe dans un voisinage de 1, et non nulle dans ce voisinage.

2° On vérifie ensuite que, si $g'(n)$ est une suite de $\mathscr{B}^\beta$, où β est défini par $1/\alpha+1/\beta=1$, alors, si g' est associée à $g\in L^\beta(\prod_p E_p, \bigotimes_p d\mu_p)$ $=L^\beta(E, d\mu)$, $\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\Gamma}}(s-1)\times\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)g'(n)/n^s=\langle f, g'\rangle$ existe, et g' $\mapsto\langle f, g'\rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{B}^\beta$. On en déduit qu'il existe une fonction $F\in L^\alpha(E, d\mu)$, telle que, si g' est associée dans $\mathscr{B}^\beta$ à $g\in L^\beta(E, d\mu)$, $\int_E F\cdot g d\mu=\langle f, g'\rangle$.

3° Le théorème 3.2, ainsi que 1° et 2° va permettre de montrer que la suite de fonctions

$$t=(t_p)\mapsto F_y(t)=\prod_{p\leqslant y}\frac{f(t_p)}{(1-1/p)\sum_{k\geqslant 0} f(p^k)/p^k}$$

est une suite de fonctions de $L^\alpha(E, d\mu)$ qui tend $d\mu$-presque-partout, et en norme aussi, vers une fonction de $L^\alpha(E, d\mu)$ quand $y\to+\infty$. En considérant alors le fait que les fonctions

$$\begin{aligned} h_y(t)&=F_y(t)\times|F_y(t)|^{(\alpha/2)-1} && \text{si } F_y(t)\neq 0\\ &=0 && \text{si } F_y(t)=0 \end{aligned}$$

convergent dans $L^2(E, d\mu)$ et $d\mu$-presque-partout vers une fonction $h(t)$ $\in L^2(E, d\mu)$, quand $y\to+\infty$, la formule de Fourier-Plancherel appliquée à $h(t)$ nous donne que:

$$\sum_p\sum_{k\geqslant 2}\frac{|f(p^k)|^\alpha}{p^k}<+\infty,\qquad \sum_p\frac{|1-|f(p)|^\alpha|}{p}<+\infty,$$

et d'autres formules que l'on utilise pour établir que

$$\sum_{|f(p)|\leqslant 2}\frac{|1-f(p)|^2}{p}<+\infty.$$

4° Pour démontrer que $\sum_p (1-f(p))/p$ converge, on utilise les résultats de 3, l'hypothèse (H.2), et une idée de H. Delange ([1]).

5° La réciproque du Théorème est donnée par un résultat de H. Daboussi ([2, Th. 2.b]). Les formules relatives à la moyenne de f sont la conséquence du Théorème 2.2.

Références

[1] H. Delange: Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives. Annales Ec. Norm. Sup., **78**, 273–304 (1961).

[2] H. Daboussi: Remarques sur les fonctions multiplicatives. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 18° Année, no. 4 (1976–1977).