41. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres. I*

Par J.-L. MAUCLAIRE
Pensionnaire à la Maison franco-japonaise

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1980)

Une suite $f: N^* \to C$ est dite *limite-périodique* B^λ, $\lambda \geqslant 1$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite périodique $P_\varepsilon(n)$ telle que:

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |P_\varepsilon(n) - f(n)|^\lambda \leqslant \varepsilon.$$

On a remarqué depuis longtemps que ces suites jouent un rôle important dans l'étude des propriétés des fonctions arithmétiques. (On peut consulter, par exemple, les articles mentionnés dans les références, ainsi que leurs bibliographies.) On se propose de donner ici des résultats généraux sur les suites limite-périodiques ; les applications à la théorie des fonctions arithmétiques feront l'objet d'une note ultérieure.

1. Notations. N est l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, \cdots$, $N^* = N - \{0\}$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers de N. p désignera un nombre premier. Z_p est le complété p-adique de Z, dm_p la mesure invariante sur Z_p. Z_p^* est le groupe compact des unités de Z_p, dm_p^* sa mesure invariante. Posons

$$G = \prod_{p\in\mathcal{P}} Z_p, \quad dm = \bigotimes_p dm_p, \quad G^* = \prod_{p\in\mathcal{P}} Z_p^*, \quad dm^* = \bigotimes_p dm_p^*.$$

Si A et B sont deux espaces topologiques, $\mathcal{C}(A, B)$ est l'ensemble des applications continues $A \to B$.

Soit $\lambda \geqslant 1$. On notera $\mathcal{B}^\lambda$ l'ensemble des classes de fonctions $N^* \to C$ qui sont B^λ limite-périodiques ; on a $f \equiv g$ dans $\mathcal{B}^\lambda$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n) - g(n)|^\lambda = 0.$$

On sait que B^λ est complet, et le spectre d'un élément de $\mathcal{B}^\lambda$ est inclus dans $Q \cap [0, 1[$.

Si E est localement compact, si ν est une mesure sur E, on pose $L^\lambda(E, d\nu)$ l'ensemble des classes de fonctions $E \to C$ de puissance $\lambda^{\text{ième}}$ ν-intégrable.

Si Γ est un groupe compact, $\hat{\Gamma}$ sera le dual de Γ.

2. Le résultat essentiel est le suivant:

Théorème 2.1. *$L^\lambda(G, dm)$ s'identifie à $\mathcal{B}^\lambda$.*

De façon précise: Les coefficients de Fourier d'un élément f' de $\mathcal{B}^\lambda$ (qui caractérisent cet élement) sont la transformée de Fourier d'un élément f de $L^\lambda(G, dm)$, et réciproquement. On a de plus:

$$\int_G f\,dm = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} f'(n).$$

Pour les calculs effectifs, on peut utiliser le résultat suivant:

Théorème 2.2. *Si $\lambda>1$, si $f\in L^\lambda(G,dm)$, si f' est associée à f dans $\mathcal{B}^\lambda$, alors:*

$$\int_G f\,dm = \lim_{y\to+\infty} \left\{\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} \times \sum_{n\in E_y} \frac{f'(n)}{n},$$

où

$$E_y=\left\{n\in N^* \mid n=\prod_{\substack{p\le y\\ p\in\mathcal{P}}} p^{\alpha_p},\ \alpha_p\in N\right\},$$

l'ensemble étant ordonné naturellement en ordre croissant.

On remarquera que Théorème 2.2 fait bien apparaître un lien entre moyenne arithmétique et moyenne analytique de la suite $f'(n)$. Pour $\lambda=1$, le résultat n'est plus vrai $\left(\text{contre-exemple: } f(n)=0 \text{ si } n\neq 2^r,\ r\geqslant 1, \text{ et } f(2^r)=\frac{2^r}{r}\right)$.

3. L'un des cas les plus étudiés de fonctions limite-périodiques B^λ est celui où la série de Fourier associée ne comporte que des "*sommes de Ramanujan*" $c_q(n)$ définies par

$$c_q(n)=\sum_{\substack{(h,q)=1\\ 1\le h\le q}} e^{2i\pi(h/q)n}.$$

Les deux théorèmes suivants permettent de comprendre pourquoi ce cas particulier est simple.

Théorème 3.1. *On considère $E_p=[1,p,p^2,\cdots[\cup\{0\}$, muni de la topologie définie par:*

Voisinage de $p^\alpha=\{p^\alpha\}$.

Voisinage de $0=[p^N,p^{N+1},\cdots[\cup\{0\}$.

Alors:

1) *E_p est compact.*
2) *$Z_p\backslash\{0\}$ est homéomorphe à $(E_p\backslash\{0\})\times Z_p^*$.*
3) *Si l'on pose*

$$\mu_p(\{p^\beta\})=\left(1-\frac{1}{p}\right)\times\frac{1}{p^\beta},\qquad \beta\geqslant 0$$

$$\mu_0(\{0\})=0,$$

alors $dm_p=d\mu_p\otimes dm_p^*$, et pour $\lambda\geqslant 1$,

$$L^\lambda(G,dm)=L^\lambda\left(\left(\prod_p E_p\right)\times G^*,\left(\bigotimes_p d\mu_p\right)\otimes dm^*\right).$$

En particulier, les fonctions de $L^\lambda(G,dm)$ invariantes presque partout par G^* sont les fonctions de

$$L^\lambda\left(\prod_p E_p,\ \bigotimes_p d\mu_p\right).$$

Théorème 3.2. *Soit $f'(n)\in B^\lambda$, $\lambda>1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de fonctions $f\in L^\lambda(G,dm)$ associée à f'*

soit invariante presque-partout par G^* *est que la série de Fourier associée à* f' *s'écrive* $f'(n) \sim \sum_{q=1} A_q c_q(n)$, *où les* $c_q(n)$ *sont les sommes de Ramanujan usuelles.*

Dans ce cas, si $t \in \prod_p (E_p \backslash \{0\})$, *on pose* $\theta_y = \prod_{p \leq y} p^{v_p(t)}$ *et*

$$F(\theta_{y^-}) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\sum_{\substack{n \in N^* \\ (n, E_y)=1 \\ n \leq x}} 1 \Big)^{-1} \times \Big(\sum_{\substack{n \in N^* \\ (n, E_y)=1 \\ n \leq x}} f(n\theta_{y^-}) \Big),$$

où E_y *est l'ensemble d'entiers considérés dans Théorème* 2.2. *Alors,* $F(\theta_{y^-})$ *tend vers* $f(t)$ *pour presque tout* t *de* $\prod_p E_p$ *quand* y *tend vers* $+\infty$, *et* $F(\theta_{y^-})$ *tend vers* $f(t)$ *dans*

$$L^\lambda\Big(\prod_p E_p \bigotimes_p d\mu_p\Big).$$

Les démonstrations de ces résultats seront publiées ultérieurement.

Références

[1] W. J. Leveque: Reviews in Number Theory. A. M. S., Providence, R. I., vol. 4, sec. Q.20, nos. 1–6, 8–10, 16, 19, 24, 35; sec. Q.25, nos. 16–18, 24 (1974).

[2] H. Daboussi: Remarques sur les fonctions multiplicatives. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 18e Année, no. 4, p. 3 (1976–77).

[3] G. W. Mackey: Infinite dimensional group representations and their applications. C.I.M.E., Montecatini, pp. 298–315 (1970).