87. *Sur la Dérivation d'une Intégrale E. R. Indéfinie. II*

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1961)

Dans la Note précédente,[1] nous avons montré que l'intégrale $E. R.$ ne possède pas la propriété newtonienne généralisée de fonction primitive, puisqu'il existe une fonction intégrable $E. R.$ telle que l'intégrale $E. R.$ indéfinie n'est pas dérivable en point de mesure positive. Dans cette Note, nous montrerons que la fonction intégrable $E. R.$ définie dans la Note précédente possède de plus la propriété: *l'intégrale E. R. indéfinie n'est pas dérivable approximativement*[2] *en point de mesure positive.*

Désormais, nons gardons, sauf indication contraire, les notations de la Note précédente.

Soit $f(x)$ une fonction intégrable $E. R.$ définie dans la Note précédente. Nons montrerons que l'intégrale $E. R.$ indéfinie de $f(x)$ n'est pas dérivable approximativement en tout point d'ensemble $F_0=H_4$. Soit x un point quelconque de F_0. Alors, il existe, pour tout $m\geq 2$, un indice $i=i(m)$ tel que $J_{\alpha_m-1,i}\ni x$, puisqu'on a $\bigcup_{j=1}^{2\alpha_m-1} J_{\alpha_m-1,j}\supseteq F_0$. Posons simplement $J_{\alpha_m-1,i}=[a_m, b_m]$. On a alors $x\in[a_m, c_{\alpha_m,i}]$ ou $x\in[d_{\alpha_m,i}, b_m]$. x étant un point d'intervalle $[a_m, c_{\alpha_m,i}]$, soit x' un point quelconque d'intervalle $L'_m=[d_{\alpha_m+1,2i}, b_m]$. x étant un point d'intervalle $[d_{\alpha_m,i}, b_m]$, soit x' un point quelconque d'intervalle $L''_m=[a_m, c_{\alpha_m+1,2i-1}]$. Alors on a

$$\begin{aligned}|F(x')-F(x)| &\geq \left|\sum_{n=\alpha_m-1}^{2\alpha_m-2}\int_x^{x'} r_n(x)dx\right| - \sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left|\sum_{n=\alpha_{m+l}-1}^{2\alpha_{m+l}-2}\int_x^{x'} r_n(x)dx\right|\right\}\\ &\geq \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_m}}\cdot\frac{2^{\alpha_m}}{\alpha_m}+\frac{2}{4^{\alpha_m+1}}\cdot\frac{2^{\alpha_m+1}}{\alpha_m+1}+\cdots+\frac{2^{\alpha_m-1}}{4^{2\alpha_m-1}}\cdot\frac{2^{2\alpha_m-1}}{2\alpha_m-1}\right\}\\ &\quad -2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_{m+l}}}\cdot\frac{2^{\alpha_{m+l}}}{\alpha_{m+l}}+\frac{1}{4^{\alpha_{m+l}+1}}\cdot\frac{2^{\alpha_{m+l}+1}}{\alpha_{m+l}+1}+\cdots+\frac{2^{\alpha_{m+l}-1}}{4^{2\alpha_{m+l}-1}}\cdot\frac{2^{2\alpha_{m+l}-1}}{2\alpha_{m+l}-1}\right\}\\ &\geq \frac{\alpha_m}{(2\alpha_m-1)2^{\alpha_m+2}}-\frac{1}{2^{\alpha_{m+1}-2}},\\ |x'-x| &\leq \text{mes}\,(J_{\alpha_m-1,i})<\frac{1}{2^{\alpha_m-1}}.\end{aligned}$$

Donc, on a $\dfrac{|F(x')-F(x)|}{|x'-x|}>\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2^{\alpha_m-1}}$ pour tout x' appartenant à L'_m(ou L''_m). De plus, si l'on pose $L_m=[a_m, b_m]$, on a, pour tout $m\geq 2$,

---

1) S. Nakanishi: Sur la dérivation d'une intégrale $E. R.$ indéfinie, Proc. Japan Acad., **37**, 316-318 (1961).

2) Voir S. Saks: Theory of the Integral, Subwencji funduszu Kultury narodowej, Warszawa (1937).

$L_m \supseteq L'_m (L_m \supseteq L''_m)$ et mes L'_m/mes L_m (=mes L''_m/mes L_m)$>\frac{1}{8}$, puisqu'on a mes $L_m < \frac{1}{2^{\alpha_m - 1}}$ et mes L'_m (=mes L''_m)$>\frac{1}{2^{\alpha_m+2}}$. Par conséquent, il s'ensuit que $|\overline{F}_{ap}(x)| \geq \frac{1}{16}$ pour tout $x \in F_0$.

Ensuite, montrons que $|\underline{F}_{ap}(x)| \leq \frac{1}{32}$ pour tout $x \in F_0$. Considérons d'abord le cas où le point x appartient à l'intervalle $[a_m, c_{\alpha_m, i}]$. Dans ce cas, nous pouvons considérer trois cas suivants:

$$1^{re} \text{ cas: } b_m = c_{\alpha_m - 1, j},\ j = \frac{i+1}{2},$$

$$2^{me} \text{ cas: } b_m = c_{\alpha_m - 2, j},\ j = \frac{i+1}{4},$$

$$3^{me} \text{ cas: les autres cas.}$$

Posons, dans $1^{re}, 2^{me}$ et 3^{me} cas, respectivement

$$\bar{x}_1 = x + 2(b_m - x) + \frac{1}{4^{\alpha_m - 1}}$$

$$\bar{x}_2 = x + 2(b_m - x) + \frac{1}{4^{\alpha_m - 2}}$$

$$\bar{x}_3 = x - \left\{2 \text{ mes}(J_{\alpha_m - 1, i}) + \frac{1}{4^{\alpha_m - 1}} + \frac{1}{4^{\alpha_m - 2}}\right\}.$$

Puisqu'alors $\bar{x}_l \in F_0 (l=1, 2, 3)$ et $F_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^{\alpha_m+4}} J_{\alpha_m+4, j}$, il existe, pour tout $m \geq 4$, un indice $k = k(m, l)$ tel que $J_{\alpha_m+4, k} \ni \bar{x}_l$. Désignons par $L'_{m,l}$ l'intervalle $J_{\alpha_m+4, k}$, où $k = k(m, l)$. Pour $1^{re}, 2^{me}$ et 3^{me} cas, soit x' un point quelconque de $L'_{m,l}$, $l = 1, 2, 3$, respectivement. On a alors pour tout $m \geq 4$

$$|F(x') - F(x)| \leq \frac{2}{2^{\alpha_m - 2}(\alpha_m - 2)} + \left\{\frac{1}{4^{\alpha_m+5}} \cdot \frac{2^{\alpha_m+5}}{\alpha_m + 5} + \frac{2}{4^{\alpha_m+6}} \cdot \frac{2^{\alpha_m+6}}{\alpha_m+6} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{2^{\alpha_m - 6}}{4^{2\alpha_m - 1}} \frac{2^{2\alpha_m - 1}}{2\alpha_m - 1}\right\} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_{m+l}}} \cdot \frac{2^{\alpha_{m+l}}}{\alpha_{m+l}} + \frac{1}{4^{\alpha_{m+l}+1}} \cdot \frac{2^{\alpha_{m+l}+1}}{\alpha_{m+l}+1} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{2^{\alpha_{m+l}-1}}{4^{2\alpha_{m+l}-1}} \frac{2^{2\alpha_{m+l}-1}}{2\alpha_{m+l}-1}\right\} \leq \frac{2}{2^{\alpha_m - 2}(\alpha_m - 2)} + \frac{1}{2^{\alpha_m+5}} + \frac{1}{2^{\alpha_{m+1}-2}},$$

$$|x' - x| > \text{mes}(J_{\alpha_m - 1, i}) > \frac{1}{2^{\alpha_m}}.$$

D'où, il s'ensuit que $\frac{|F(x') - F(x)|}{|x' - x|} < \frac{1}{32} + \frac{8}{\alpha_m - 2} + \frac{1}{2^{\alpha_m - 2}}$. De plus, si l'on pose

$$L_{m1} = \left[a_m,\ a_m + 2 \text{ mes } (J_{\alpha_m - 1, i}) + \frac{1}{4^{\alpha_m - 1}}\right]$$

$$L_{m2} = \left[a_m,\ a_m + 2 \text{ mes } (J_{\alpha_m - 1, i}) + \frac{1}{4^{\alpha_m - 2}}\right]$$

$$L_{m3}=\left[b_m-\left\{3 \text{ mes } (J_{\alpha_m-1,\,i})+\frac{1}{4^{\alpha_m-1}}+\frac{1}{4^{\alpha_m-2}}\right\},\, b_m\right],$$

on a alors, pour $l=1, 2, 3,$

$$L_{ml}\supseteq L'_{ml},\ \text{mes } L'_{ml}>\frac{1}{2^{\alpha_m+5}},$$

$$\text{mes } L_{ml}\leq 3 \text{ mes } (J_{\alpha_m-1,\,i})+\frac{1}{4^{\alpha_m-1}}+\frac{1}{4^{\alpha_m-2}}<\frac{2^{\alpha_m+2}}{4^{\alpha_m-1}},$$

de sorte qu'on a pour tout $m\geq 4$

$$\text{mes } L'_{ml}/\text{mes } L_{ml}>\frac{1}{2^9} \qquad (l=1,2,3).$$

D'une manière analogue, nous pouvons montrer que pour le cas où $x\in[d_{\alpha_m,\,i},\, b_m]$ nous avons aussi les même résultats. Par conséquent, on a $|\underline{F}_{ap}(x)|\leq\frac{1}{32}$ pour tout $x\in F_0$.