26. Ein alternierendes Approximationsverfahren für konforme Abbildung von einem Ringgebiete auf einen Kreisring.

Von Yûsaku KOMATU.
Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., March 12, 1945.)

1. *Vorwort.* —— Es sei ein beliebiges *Ringgebiet* in einer komplexen Ebene gegeben. Bekanntlich läßt es sich stets auf einen damit konform äquivalenten konzentrischen Kreisring schlicht abbilden.

Zwar sind die Versuche, diejenige Funktion etwa sukzessiv-approximativ auf irgendeine konkrete Weise zu bekommen, welche ein vorgegebenes *einfach* zusammenhängendes Gebiet mit mehr als einem einzigen Randpunkte auf ein Gebiet normaler Gestalt, etwa ein Kreisinnere, konform abbildet, bisher von theoretischen sowie praktischen Standpunkten vielerlei gemacht worden. Was die Abbildung von vielfach zusammenhängenden Gebieten betrifft, sind jedoch die entsprechenden Probleme, mindestens vom Standpunkte für praktische Brauchbarkeit aus, auch im einfachsten Falle des zweifachen Zusammenhanges, d. h. für die Abbildung von einem Ringgebiete auf ein normales Gebiet, z. B., wie oben erwähnt wurde, einen konzentrischen Kreisring, bis jetzt fast nicht erledigt worden. Ein Bericht von Garrick[1] ist indessen bemerkenswert, worin konforme Abbildung von einem zweifach zusammenhängenden Gebiet etwas spezieller Gestalt auf ein Normalgebiet unter einem praktischen Gesichtspunkte behandelt wird.

Das betreffende Problem läßt sich zwar in bekannter und einfacher Weise auf dasjenige zurückführen, eine Abbildungsfunktion bezüglich der einfach zusammenhängenden Gebiete aufzufinden, indem man etwa die entsprechenden unverzweigten universellen Überlagerungsflächen einführt[2].

In der vorliegenden Note soll aber ein anderes Verfahren beim *zweifachen* Zusammenhange erwähnt werden; es läßt sich nämlich zeigen, daß eine Funktionenfolge auf einfachere Weise konstruiert werden kann, welche gegen die gewünschte Abbildungsfunktion von einem vorgegebenen Ringgebiete auf einen konzentrischen Kreisring srebt. Gleichfalls werden dabei nur die Abbildungen

1) I. E. Garrick, Potential flow abott arbitrary biplane wing section. N.A.C.A. Tech. Rep. No. 542 (1936), 47–75.

2) Vgl. etwa C. Carathéodory, Conformal representation. Cambridge, (1932), p. 71–72; O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math. 3 (1938), 621–678.

zwischen den einfach zusammenhängenden Gebieten und den Kreisinnern oder -äußern benutzt und sogar lauter ganz elementare Tatsachen als Hilfsmittel gebraucht. Daraus wird man also nebenbei übersehen können, daß die Existenz der Abbildungsfunktion betreffender Art zugleich aufs neue wiedergestellt wird.

2. *Hilfsmittel.* —— Auf Grund des soeben Gesagten fassen wir hierbei zuvor die Hilfssätze zusammen, um hauptsächlich die Eindeutigkeit der Kreisringsabbildung u. a. direkt und etwas systematisch festzustellen[3].

Hilfssatz 1. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine in einem Kreisringe $q<|z|<1$ regulär analytische Funktion $f(z)$, deren reeller Teil eindeutige Randwerte besitzt, dort selbst eindeutig sei, lautet*

$$\int_0^{2\pi} \Re f(qe^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} \Re f(e^{i\theta})d\theta .$$

Sei nämlich die Funktion $f(z)$ erstens im Kreisringe regulär und eindeutig, dann ist auch die Funktion $\dfrac{f(z)}{iz}$ zugleich so. Folglich ist der Wert des Integrals

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{iz}\,dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta \qquad (q<r<1)$$

von r unabhängig, woraus die Notwendigkeit ohne weiteres folgt. Umgekehrt, aus der Eindeutigkeit der Randwerte von $\Re f(z)$ sieht man unmittelbar ein, daß die Funktion $f(z)$ selbst zuerst höchstens einen rein imaginären Periodizitätsmodul besitzen kann, d. h. es stets eine reelle Zahl a gibt, derart, daß die Differenzfunktion $f(z)-\dfrac{a}{2\pi}\lg z$ sich eindeutig verhält. Nach dem soeben Gezeigten muß also die Relation

$$\int_0^{2\pi} \Re f(qe^{i\theta})d\theta - a\lg q = \int_0^{2\pi} \Re f(e^{i\theta})d\theta$$

bestehen. Die genannte Bedingung zieht also sofort nach sich $a=0$, d. h. die Eindeutigkeit von $f(z)$ selbst.

Hilfssatz 2. *Eine Funktion $w=F(z)$ bilde den Kreisring $q<|z|<1$ konform und schlicht auf ein Ringgebiet ab, welches beide Punkte $w=0$ und*

---

3) Eine andere Herkunft des ersten Hilfssatzes findet sich etwa in Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **25** (1943), 1–42. Der Zweite Hilfssatz besagt samt dem nachfolgenden Satze tatsächlich nichts anderes als eine Art Monotonie des Moduls der Ringgebiete sowie dessen konforme Invarianz. Für Herleitungsweisen aus anderen Standpunkten vgl. man die in Anm. 2) zitierte Teichmüllersche Arbeit sowie auch H. Grötzsch, Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, I. Leipziger Ber. **80** (1928), 367–376 und E. Rengel, Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung. Schriften d. Math. Sem. u. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **1** (1932–3), 141–162.

$w=\infty$ voneinander trenne. Die größten und die kleinsten Absolutbeträge von Punkten auf der zu $|z|=q$ entsprechenden Randkomponente seien m^* bzw. m_*, und die entsprechenden Größen bezüglich der Bildkurve von $|z|=1$ seien M^* bzw. M_* ($> m_*$). Dann gelten die Ungleichungen

$$\frac{m^*}{M_*} \geqq q \geqq \frac{m_*}{M^*};$$

hierbei tritt jedes Gleichheitszeichen nur dann auf, wenn die Abbildung eine Drehstreckung um den Mittelpunkt des Kreisringes ist.

In der Tat bleibt jeder Zweig von $\lg \dfrac{F(z)}{z}$ im Kresringe regulär und eindeutig, und also nach dem Hilfssatze 1 gilt für jede reelle Zahl $\delta\,(0<\delta<\frac{1}{2}(1-q))$ immer die Relation

$$\int_0^{2\pi} \lg \frac{|F((q+\delta)e^{i\theta})|}{q+\delta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \lg \frac{|F((1-\delta)e^{i\theta})|}{1-\delta}\,d\theta$$

oder

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg \left|\frac{F((q+\delta)e^{i\theta})}{F((1-\delta)e^{i\theta})}\right| d\theta = \lg \frac{q+\delta}{1-\delta}$$

Jeder vorgegebenen positiven Zahl ε kann man offenbar eine genügend kleine positive Zahl δ so entsprechen lassen, daß beide Beziehungen

$$\lg \frac{m^*}{M_*} + \varepsilon > \lg \left|\frac{F((q+\delta)e^{i\theta})}{F((1-\delta)e^{i\theta})}\right| > \lg \frac{m_*}{M^*} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

und

$$\lg q < \lg \frac{q+\delta}{1-\delta} < \lg q + \varepsilon$$

zugleich und also auch die Abschätzungen

$$e^{\varepsilon}\frac{m^*}{M_*} > q > e^{-\varepsilon}\frac{m_*}{M^*}$$

gelten. Da hierbei $\varepsilon > 0$ beliebig klein genommen werden kann, so folgen daraus sofort die behaupteten Ungleichungen.

Auch der Fall, wo jedes Gleichheitszeichen wirklich auftritt, läßt sich fast unmittelbar erledigen. Auf Grund seiner Wichtigkeit, insbesondere in Bezug auf die eindeutige Bestimmtheit der Abbildung zwischen beiden Ringgebieten unter einer einzigen Normierungsbedingung, soll er aber hierbei von neuem wiedergestellt werden. Zum Zwecke genügt es offenbar das Bestehen des folgenden Statzes zu bestätigen:

Satz. *Eine Funktion, welche eine konforme Abbildung von einem Kreisringe $q<|z|<1$ auf einen anderen Kreisring $p<|w|<1$ vermittelt, muß notwendig die Gestalt*

$$F(z) \equiv \varepsilon z \quad \textit{oder} \quad F(z) \equiv \frac{\varepsilon q}{z}$$

mit $|\varepsilon|=1$ *besitzen; insbesondere muß also zugleich* $p=q$ *sein.*

Um dies zu zeigen, beachte man zuerst, daß die Abbildung $w=F(z)$ der analytischen Fortsetzbarkeit wegen ihre Regularität auch auf den beiden Randperipherien aufrechterhält. Es genügt also nur zu zeigen, daß sie unter der weiter hinzugefügten Annahme $F(1)=1$ auf die identisch Transformation reduzieren muß. Aus dem Hilfssatz 2 folgt zuerst ohne weiteres

$$p \geqq q \geqq p \quad \text{d. h.} \quad p=q.$$

Also stellt das Quotient $\dfrac{F(z)}{z}$ eine in $q<|z|<1$ regulär analytische und sogar nullstellenfreie Funktion dar, deren Absolutbetrag die konstanten Randwerte 1 besitzt, oder was dasselbe ist, stellt $\lg\left|\dfrac{F(z)}{z}\right|$ eine dort regulär harmonische Funktion mit den überall verschwindenden Randwerten dar, woraus sich nacheinander ergeben:

$$\left|\frac{F(z)}{z}\right| \equiv 1, \quad F(z)\equiv \varepsilon z \quad \text{und} \quad 1=F(1)=\varepsilon.$$

Oder indem man die analytische Fortsetzbarkeit von $F(z)$ durchaus ausnutzt, kann man auch wie im folgenden schließen: Die fortgesetzte Funktion $w=F(z)$ bildet nämlich die punktierte Ebene $0<|z|<\infty$ konform und schlicht auf die gleichfalls punktierte Ebene $0<|w|<\infty$ ab, und also nach dem Riemannschen Satze über hebbare Singularitäten vermittelt sie die Abbildung von $|z|<\infty$ auf $|w|<\infty$ oder im allgemeinen evtl. auf $|w|>0$, woraus wieder die im Satze behauptete Tatsache ohne weiteres folgt.

Für spätere wiederholte Anwendung geben wir hier zur Vorsorge den wohlbekannten *Schwarzschen Hilfssatz* an:

Eine Funktion $g(z)$ mit $g(0)=0$ sei in $|z|<K$ holomorph, genüge dort der Bedingung $|g(z)|<M$ und ferner sei $\dfrac{g(z)}{z} \not\equiv$ konst. Dann gilt dort $|g(z)|<\dfrac{M}{K}|z|$. Eine Funktion $h(z)$ mit $h(\infty)=\infty$ sei an $|z|>k$ meromorph, genüge dort der Bedingung $|h(z)|>m\ (\geqq 0)$ und ferner sei $\dfrac{h(z)}{z}$ $\not\equiv$ konst. Dann gilt dort $|h(z)|>\dfrac{m}{k}|z|$.

3. *Verfahren.* —— Wir können nun und wollen hierbei nur der Einfachheit halber ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß ein auf der z-Ebene vorgegebenes Ringgebiet D, wie vorher, die Einheitskreisperipherie $|z|=1$ als eine Randkomponente und eine im Innern von $|z|<1$ verlaufende, um den Punkt $z=0$ umschreibende, einfach geschlossene regulär analytische Kurve γ als andere Randkomponente besitze. Vom Gebiete D ausgehend, sollen wir dann nacheinander für jedes $n=0, 1, 2, \ldots$ ein Ringgebiet D_n, welches auf einer komplexen z_n-Ebene liegt und beide Punkte $z_n=0$ und $z_n=\infty$ voneinander trennt, sowie eine zugehörige Funktion $z_n=F_n(z)$, die die konforme Abbildung von D auf D_n vermittelt, definieren:

1°. Es seien für $n=0$: $z_0=z$, $D_0=D$, $F_0(z)\equiv z$.

2°. Sämtliche noch genauer zu erklärende Gebiete D_n besitzen eine ähnliche Gestalt wie das ursprüngliche Gebiet D; beide Randkomponenten von D_n bestehen nämlich aus der Peripherie $|z_n|=1$ und einer einfach geschlossenen regulär analytischen Kurve γ_n, welche innerhalb $|z_n|=1$ gelegt wird und übrigens um $z_n=0$ umschreibt, und deren größte und kleinste Abstände von $z_n=0$ wir mit m_n^* bzw. m_{*n} bezeichnen sollen.

3°. Irgendeine Funktion, die die konforme Abbildung zwischen dem Außengebiete von γ_n und dem Kreisäußern $|t_n|>m_n^*$ vermittelt,[4] sei dann

$$t_n=h_n(z_n)\,, \qquad h_n(\infty)=\infty\,.$$

Aus D_n entsteht dabei ein Ringgebiet Δ_n, dessen Rand aus der Peripherie $|t_n|=m_n^*$ und einer außerhalb deren gelegenen Bildkurve Γ_n von $|z_n|=1$ besteht; ihre größten und kleinsten Abstände vom Punkte $t_n=0$ seien M_n^* bzw. M_{*n}.

4°. Ferner bezeichnen wir mit

$$z_{n+1}=g_n(t_n)\,, \qquad g_n(0)=0\,,$$

eine Funktion, die das Innengebiet von Γ_n auf das Kreisinnere $|z_{n+1}|<1$ abbildet. Die Bilder vom Gebiete Δ_n und von dessen innerer Randkurve $|t_n|=m_n^*$ bei dieser Abbildung seien D_{n+1} bzw. γ_{n+1}.

5°. Setzen wir nun beide oben genannte Abbildungen zusammen, dann bildet die resultierende Funktion

$$z_{n+1}=f_n(z_n)=g_n(h_n(z_n))$$

natürlich das Gebiet D_n aufs Gebiet D_{n+1} ab; hierbei kann dieser zusammengesetzten Abbildung noch eine Normierungsbedingung auf dem Rande, etwa $f_n(1)=1$, auferlegt werden. Dadurch läßt sich die Funktion $f_n(z_n)$, also auch das Bildgebiet D_{n+1}, wirklich fürs Gebiet D_n eindeutig bestimmen.

6°. Die Abbildungsfunktion von D auf D_n läßt sich dann wesentlich eindeutigerweise durch die Zusammensetzung

$$z_n=F_n(z)\equiv f_n(f_{n-1}(\cdots f_2(f_1(z))\cdots))$$

liefern, und genügt offenbar den Bedingungen

$$F_n(1)=1 \quad \text{und} \quad F_n(z)\equiv f_n(F_{n-1}(z))\,.$$

4) Derartige Bestimmung der Radien m_n^* in den t_n-Hilfsebenen hängt natürlich nur von einer Fixerung für Vergrößerungsfaktoren im Unendlichen ab.

Wir sollen nun diejenige Operation mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, welche das Bildgebiet D_1 aus dem Urgebiete D, oder allgemeiner D_{n+1} aus D_n, entstehen läßt, d. h. wir setzen

$$D_{n+1} = \mathfrak{A} D_n$$

und dementsprechend im allgemeinen

$$D_n = \mathfrak{A}^n D;$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{A}^0$ von selbst die identische Transformation. *Jedem operierten Gebiete entspricht also eine einzige $\mathfrak{A}$-Operation jeweilig eindeutig, und demgemäß lassen sich die Gebietsfolge $\{D_n\}$ und beide Abbildungsfunktionenfolgen $\{f_n(z_n)\}$ sowie $\{F_n(z)\}$ für das vorgegebene Urgebiet D eindeutigerweise definieren.*

Nach dem Spiegelungsprinzip bildet die Funktion $z_{n+1}=f_n(z_n)$ das an $|z_n|=1$ gespiegelte Gebiet von D_n auf das betreffs $|z_{n+1}|=1$ ebenso aus D_{n+1} entstehende Gebiet ab, und ebenfalls besitzt auch die Abbildungsfunktion $z_n=F_n(z)$ eine entsprechende Eigenschaft. Und zwar genügen sie in der Tat den Funktionalgleichungen

$$f_n\left(\frac{1}{\bar{z}_n}\right)=\frac{1}{\overline{f_n(z_n)}}, \qquad F_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=\frac{1}{\overline{F_n(z)}}$$

für jeden Punkt $z_n \in D_n$ bzw. $z \in D$.

Nebenbei bemerkt, falls das ursprüngliche Gebiet D mit einem konzentrischen Kreisringe um $z=0$ nicht zusammenfällt, dann ist jedes Gebiet D_n auch nicht so, und folglich

$$\frac{h_n(z_n)}{z_n} \not\equiv \text{konst.} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{g_n(t_n)}{t_n} \not\equiv \text{konst.}$$

4. *Abschätzungen.* —— Wenn das Urgebiet D gerade ein konzentrischer Kreisring ist, dann gibt es nichts weiter zu tun. Deshalb nehmen wir nun an, daß D selbst mit keinem konzentrischen Kreisringe übereinstimme. Um einige grundliegenden Abschätzungen herzuleiten, kommt hierbei der Schwarzsche Hilfssatz mit Erfolg wiederholt zur Anwendung.

Wenden wir ihn zuerst auf die zu $t_n=h_n(z_n)$ inverse Funktion $z_n=h_n^{-1}(t_n)$ nebst dem zugehörigen Kreisäußern $|t_n| > m_n^*$ an, so ergibt sich für jedes Paar voneinander entsprechender Punkte die Ungleichung

$$|z_n| > \frac{m_{*n}}{m_n^*}|t_n|,$$

woraus die Beziehung

$$1 > \frac{m_{*n}}{m_n^*} M_n^*$$

ohne weiteres folgt, indem man insbesondere einen Punkt t_n mit $|t_n| = M_n^*$ auf

Γ'_n betrachtet. Wenden wir ihn weiter auf die zu $z_{n+1}=g_n(t_n)$ inverse Funktion $t_n=g_n^{-1}(z_{n+1})$ nebst dem Kreisinnern $|z_{n+1}|<1$ an, so ergibt sich für jedes Paar der entsprechenden Punkte die Ungleichung

$$|t_n| < M_n^* |z_{n+1}|,$$

woraus mit Berücksicht auf einen Punkt z_{n+1} mit $|z_{n+1}|=m_{*n+1}$ auf γ_{n+1} die Beziehung

$$m_n^* < M_n^* m_{*n+1}$$

folgt. Wir erhalten somit die Abschätzungen

$$\text{(i)} \qquad m_{*n} < \frac{m_n^*}{M_n^*} < m_{*n+1}.$$

Die Anwendung des Schwarzschen Hilfssatzes auf die Funktion $t_n=h(z_n)$ selbst und das Kreisäußere $|z_n|>m_n^*$ zieht nach sich die Ungleichung

$$|t_n| > |z_n|,$$

woraus man für einen Punkt t_n mit $|t_n|=M_{*n}$ auf Γ_n die Beziehung

$$M_{*n} > 1$$

entnimmt. Unter Berücksichtigung der letzten Beziehung erhält man nach dem Schwarzschen Hilfssatze, auf $z_{n+1}=g_n(t_n)$ nebst dem Kreisinnern $|t_n|<1$ angewandt, die Ungleichung

$$|z_{n+1}| < |t_n|,$$

woraus man die Abschätzung

$$\text{(ii)} \qquad m_{n+1}^* < m_n^*$$

schließen kann, indem man einen Punkt z_{n+1} mit $|z_{n+1}|=m_{n+1}^*$ aus γ_{n+1} betrachtet.

Beide soeben gewonnene Abschätzungen (i) und (ii) zeigen uns ersichtlich, daß die Zahlenfolgen $\{m_{*n}\}$ sowie $\{m_n^*\}$ beide monoton und zwar zu- bzw. abnehmend sind. Es gibt also stets ihre Grenzwerte p bzw. q, und sogar gelten offenbar zwischen ihnen die Ungleichungen

$$0 < p = \lim_{n\to\infty} m_{*n} \leqq \lim_{n\to\infty} m_n^* = q < 1;$$

folglich gilt auch die Grenzrelation

$$\lim_{n\to\infty} M_n^* = \frac{q}{p},$$

und also muß die Kurve Γ_n immer für jedes n ganz in einem Kreise um $t_n=0$ mit einem festen von n unabhängigen Radius $\left(\text{etwa } \frac{m_0^*}{m_{*0}}\right)$ liegen bleiben.

5. *Hauptsatz.* —— Wir sind nun in der Lage, das Hauptresultat der vorliegenden Note anzugeben:

Satz. *Die oben definierte Funktionenfolge $\{F_n(z)\}$ konvergiert gleichmäßig im weiteren Sinne im Urgebiete D, einschließlich dessen äußeren*

Randkomponente $|z| = 1$ (und zwar im Vereinigungsgebiete von D selbst und dessen Spiegelbilde an $|z| = 1$). Ihre Grenzfunktion

$$w = F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$$

bildet D derart auf den konzentrischen Kreisring $q < |w| < 1$ ab, daß dem Punkte $z = 1$ der Bildpunkt $w = 1$ entspricht.

Beweis. Wir setzen zuerst der Bequemlichkeit halber

$$k_n(\omega) \equiv h_n^{-1}\left(\frac{m_n^*}{q}\omega\right);$$

diese Funktion $z_n = k_n(\omega)$ bildet das Kreisäußere $|\omega| > q$ auf das Außengebiet von γ_n ab. Da ihr Wertvorrat also stets eine feste Umgebung von $z_n = 0$, etwa $|z_n| < m_{*0}$ ausschließt, bildet die Folge $\{k_n(\omega)\}$ im Kreisäußern $|\omega| > q$ eine Normalfamilie. Da andererseits $t_n = g_n^{-1}(w^*)$ das Einheitskreisinnere $|w^*| < 1$ auf das Innengebiet von Γ_n ab, welches gleichmäßig beschränkt ist, so ist die Folge $\{g_n^{-1}(w^*)\}$ im Kreisinnern $|w^*| < 1$ wiederum normal. Somit läßt sich eine geeignete Teilfolge $\{n_\nu\}$ von natürlichen Zahlen so auswählen, daß beide Grenzfunktionen

$$\lim_{\nu\to\infty} k_{n_\nu}(\omega) = K(\omega) \quad \text{und} \quad \lim_{\nu\to\infty} g_{n_\nu}^{-1}(w^*) = G^{-1}(w^*)$$

zugleich auf $|\omega| > q$ bzw. $|w^*| < 1$ existieren, wobei natürlich jede Konvergenz gleichmäßig im weiteren Sinne stattfinden soll. Sie sind beide offenbar nicht konstant und also dort schlicht; denn aus den im letzten Paragraphen geführten Überlegungen kann man sogar leicht übersehen, daß die Ungleichungen

$$\frac{p}{q} \leqq |K'(\infty)| \leqq 1 \quad \text{und} \quad 1 \leqq |G^{-1\prime}(0)| \leqq \frac{q}{p}$$

bestehen müssen.

Wir bezeichnen nun mit Γ_∞ und γ_∞^* die Urbildkurven von $|w| = 1$ bei $w = K(\omega)$ bzw. von $|\omega| = q$ bei $\omega = G^{-1}(w^*)$, und weiter mit $\varDelta_\infty$ und D_∞^* die Ringgebiete zwischen $|\omega| = q$ und Γ_∞ bzw. zwischen γ_∞^* und $|w^*| = 1$. Nach einem Satze von Carathéodory[5] bildet die Grenzfunktion $w = K(\omega)$ das Gebiet $\varDelta_\infty$ auf den Kern D_∞ der Gebietsfolge $\{D_{n_\nu}\}$, d. h. den gemeinsamen Teil von $|w| < 1$ und demjenigen (einfach zusammenhängenden) Gebietskern ab, gegen welchen die aus den Außengebieten von γ_{n_ν} bestehende Gebietsfolge konvergiert[6]. Die Funktion $\omega = G^{-1}(w^*)$ bildet D_∞^* auf den Kern der Folge $\{\varDelta_{n_\nu}\}$ ab, welcher

5) C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Annalen **72** (1912), 107–144; oder auch L. Bieberbach, Über einen Satz des Herrn Carathéodory. Göttinger Nachr. (1913), 552–564.

6) Es ist natürlich ohne weiteres möglich, die Begriffe des Gebietskerns sowie der Konvergenz gegen den Kern naturgemäß auch für Ringgebiete so einfacher Gestalt unmittelbar zu erklären, wie wir sie hierbei vor uns haben; vgl. etwa die in Anm. 3) zitierte Arbeit des Verfassers.

offenbar nichts anderes als Δ_∞ ist. Insbesondere stimmt D_∞^* somit identisch mit $\mathfrak{A}D_\infty$ überein. Offenbar enthalten die Ringgebiete D_∞ und $D_\infty^* = \mathfrak{A}D_\infty$ zwar die Ringe $q < |w| < 1$ bzw. $q < |w^*| < 1$ als Teilgebiete, aber besitzen beide mindestens je einen Randpunkt mit dem absoluten Betrage q. Da die Ringgebietsfolge $\{D_{n_\nu}\}$ gegen den Kern D_∞ konvergiert, so strebt die zugehörige Abbildungsfunktionenfolge $\{F_{n_\nu}(z)\}$ gegen diejenige Funktion $F(z)$ gleichmäßig im weiteren Sinne in D, welche D auf D_∞ abbildet, folglich über die Peripherie $|z| = 1$ hinaus analytisch fortsetzbar ist und natürlich der Bedingung $F(1) = 1$ genügt. Auf die Konvergenz der Folge $\{D_{n_\nu+1}\}$ gegen ihren Kern D_∞^* hin strebt die ihr entsprechende Folge $\{F_{n_\nu+1}(z)\}$ gegen diejenige Funktion $F^*(z)$ wiederum gleichmäßig im weiteren Sinne in D, weiche D auf D_∞^* abbildet, sich über $|z| = 1$ hinaus fortsetzen läßt und wieder der Bedingüng $F^*(1) = 1$ genügt. Die Funktion

$$w^* = F^*(F^{-1}(w))$$

bildet also D_∞ auf D_∞^* ab, und erfüllt die Bedingung $F^*(F^{-1}(1)) = 1$.[7]

Stimmte nun das Gebiet D_∞ mit dem Kreisringe $q < |w| < 1$ nicht überein, so müßte $\mathfrak{A}D_\infty$, wie oben bemerkt wurde, die ganze Peripherie $|w^*| = q$ innerhalb sich selbst enthalten. Andererseits, im Widerspruch damit, besitzt das Gebiet D_∞^* jedoch gewiß einen Randpunkt w^* mit $|w^*| = q$. Daher muß D_∞ tatsächlich mit dem Ringe $q < |w| < 1$ zusammenfallen, und folglich stimmen D_∞^* und D_∞ sowie $F^*(z)$ und $F(z)$ voneinander überein. Da jede konvergente Teilfolge aus der normalen Familie $\{F_n(z)\}$ gegen diejenige Funktion strebt, die D auf $q < |w| < 1$ abbildet und weiter an $z = 1$ den Wert 1 nimmt, so muß die Grenzfunktion auf Grund der eindeutigen Bestimmtheit der Abbildung stets eine und dieselbe sein. Somit konvergiert die Folge $\{F_n(z)\}$ selbst in D, und sogar in dem im Satze erwähnten größeren Gebiete, gleichmäßig im weiteren Sinne, und die Grenzfunktion

$$w = F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)\,, \qquad F(1) = 1\,,$$

vermittelt natürlich die Abbildung von D auf $q < |w| < 1$, die offenbar durch die hier hinzugeschrieben Normierungsbedingung eindeutig bestimmt wird. Hiermit ist der Satz völlig bewiesen.

Zum Schluß bemerke man noch, daß die Folge $\{H_n(z) \equiv h_n(F_n(z))\}$ wiederum gegen dieselbe Grenzfunktion $F(z)$ konvergiert; hierbei haben wir aber zuvor noch eine Normierungsnebenbedingung, etwa wie

$$\lim_{n\to\infty} H_n(1) > 0\,,$$

---

7) Hierbei kann man unmittelbar auch übersehen, daß die Relationen gelten:

$$z_{n_\nu+1} = g_{n_\nu}\Big(\frac{m_{n_\nu}}{q} k_{n_\nu}^{-1}(z_{n_\nu})\Big) = f_{n_\nu}(z_{n_\nu}); \quad G(K^{-1}(w)) = F^*(F^{-1}(w)).$$

aufzuerlegen. Man kann es in der Tat übersehen, auf ganz ähnliche Schlußweise wie oben, oder auch indem man das soeben gewonnene Resultat auf die für eine Funktion von $\frac{m_1^*}{t_1}$ angesehene Größe $\frac{m_n^*}{t_n}$, d. h. auf die durch die Relation

$$\frac{m_n^*}{t_n} = \frac{1}{h_n\left(F_n\left(h_n^{-1}\left(\frac{1}{m_1^*}\frac{m_1^*}{t_1}\right)\right)\right)}$$

definierte Folge anwendet.