21. Sur un théoèrme de densité d'un ensemble plan de mesure positive.

Par Kinjiro KUNUGUI.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1945.)

Considérons dans le plan OXY un ensemble E quelconqúe et un point $p=(x_0, y_0)$. Soit $l(\alpha)$ une demi-droite issue du point p, ayant la direction α. Nous désignons par $\tau(x_0, y_0, r)$ la *mesure intérieure linéaire* de la partie commune à E et au segment de $l(\alpha)$ situé entre deux extrémités p et le point $(x_0+r\cos\alpha,\ y_0+r\sin\alpha)$. Nous disons que E possède le point p comme un *point de densité linéaire sur* $l(\alpha)$, si, ϵ étant un nombre réel positif arbitraire, il existe un nombre réel positif $r_0(\epsilon)$ tel que, pour tout nombre positif r inférieur à $r_0(\epsilon)$, on ait

$$\frac{\tau(x_0,\ y_0,\ r)}{r} > 1-e$$

Enfin, nous dirons que le point p possède la "*propriété A*", s'il existe un ensemble de directions $D(p)$ de mesuae O (qui dépend du point p), tel que les directions hors de $D(p)$, contiennent les points de E d'une telle quantité que p soit un point de densité linéaire sur ces dimi-droites. Or, Prof. M. Tsuji a posé récemment le problème suivant: étant donné un ensemble plan mesurable dont la mesure est positive, presque tout point de cet ensemble jouit-il de la propriété A? Le but de cette Note est d'y donner une solution affirmative, c. a d. nous allons démontrer le

Théorème. *Soit M un ensemble situé dans le plan OXY, qui est mesurable au sens de M. Lebesgue et dont la mesure est positive. Alors, il existe un sous-ensemble N de M, de mesure O, tell que tout point de $M-N$ jouit de la propriété A.*

Démonstration. Supposons, par impossible, qu'il existe un ensemble plan M mesurable au sens de Lebesgue, contenant un sons-ensemble N de mesure exterieure positive tel que, pour tout point p de N, il existe un ensemble $D(p)$ de de directions, de mesure extérieure positive et jouissant de la propriété: la demi-droite $l(\alpha)$ à la direction α appartenant à $D(p)$, issues de p, possède des points de M de telle manière que p ne soit pas un point de densité linéaire de l'ensemble $M\,l(\alpha)$. Nous pouvons supposer que N est l'ensemble de tous les points de M

1) La direction d'une demi-droite est l'angle de la demi-droite que fait celle-ci avec l'axe OX.

qui ne jouissent pas de la propriété A. Désignons par μ la mesure extérieure de cet ensemble N. Nous supposons donc que $\mu > 0$. Nous pouvons d'ailleurs considérer seulement le cas où la mesure mes M de M est finie. Il existe alors un ensemble fermé F qui est un sous-ensemble de M et dont la mesure surpasse mes $M - \mu/2$. Alors, *la mesure extérieure de $N \cdot F$ est positive.* En effet, puisque F est fermé, il est mesurable et par suite nous avons[2)]

$$\mu = \text{mes. ext. de } N \cdot F + \text{mes. ext. de } (N - N \cdot F),$$

et, par conséquent, si mes $N \cdot F = 0$, on aurait

$$\mu = \text{mes. ext. de } (N - N \cdot F) \leq \text{mes } (M - F) < \mu/2$$

ce qui est absurde. Donc, la mesure extérieure de $N \cdot F$ est positive.

Désignons par N^* l'ensemble de tous les points p de F pour lesquels il existe un ensemble $D^*(p)$ de directions, de mesure extérieure positive et jouissant de la propriété : la demi-droite $l(\alpha)$ à toute direction α de $D^*(p)$, issues de p, contient les points de F de telle manière que p ne soit pas un point de densité linéaire de l'ensemble $F \cdot l(\alpha)$. Nous avons évidemment $N^* \supseteq N \cdot F$. Donc, la mesure extérieure de N^* est positive. L'absurdité pour les ensembles F et N^* entrainant une contradiction pour les ensembles M et N, nous pouvons, par conséquent, aupposer dès l'abord que *M est un ensemble fermé.*

Maintenant, nous allons montrer que *N est un ensemble mesurable au sens de Lebesgue.* Pour cela, considérons un espace à quatre dimensions dont les points seront désignés par (x, y, α, z). Supposons que les deux premières coordonnées x et y parcourent le plan OXY, que α est une variable-directions : $0 \leq \alpha < 2\pi$, et que z peut prendre toutes les valeurs réelles positives. Désignons par $\lambda(x, y, \alpha, z)$ la mesure linéaire de la partie commune à l'ensemble M et au segment de la demi-droite $l(\alpha)$ de la direction α, issue du point (x, y), situé entre le point (x, y) et le point $(x + z \cos \alpha, y + z \sin \alpha)$. La fonction $\lambda(x, y, \alpha, z)$ est définie pour tous les points (x, y, α, z) de l'espace à quatre dimensions que nous avons considéré plus haut. Or, nous allons démontrer que, *z étant une constante positive et fixe, la fonction $\lambda^*(x, y, \alpha) = \lambda(x, y, \alpha, z)$ est semi-continue supérieurement.*

Pour le voir, désignons d'abord par $\mu(x, y, \alpha)$ la mesure linéaire de la partie commune à l'ensemble complémentaire CM de M et au segment de la demidroite $l(\alpha)$ issue du point (x, y) à la direction α, qui est situé entre le point (x, y) et le point $(x + z \cos \alpha, y + z \sin \alpha)$. Nous avons alors $\lambda^*(x, y, \alpha) = z - \mu(x, y, \alpha)$, Il nous suffit donc de démontrer que la fonction $\mu(x, y, \alpha)$ est semi-continue in-

2) Voir C. Carathéodory: Vorlesungen uber reelle Funktionen, Leipzig-Berlin, 2. Auflage, 1927, p. 246.

férieurement. Supposons, pour cela, qu'une suite des points (x_n, y_n, α_n) tend vers un point (x, y, α). Alors, le segments S_n ayant deux extrémités (x_n, y_n) et $(x_n+z\cos\alpha_n, y_n+z\sin\alpha_n)$ (situés dans le plan OXY) tend uniformément vers le segment S ayant les extremites (x, y), $(x+z\cos\alpha, y+z\sin\alpha)$ (situé également dans le même plan). *Les points du segment S qui appartiennent à CM peuvent être couverts par une suite des cercles $C_i(i=1, 2, 3,\cdots\cdot)$ disjoints les uns des autres, la somme des diamètre des C_i étant la mesure $\mu(x, y, \alpha)$.* Pour le voir. considérons les cercles aux centres situés sur le segment S et qui sont contenues dans CM. Soit C_1 l'un de ces cercles dont le rayon est de longueur maximum. Désignons par $\overline{C}_1$ la fermeture de C_1. Considérons ensuite les cercles qui sont contenues dans $C(M+\overline{C}_1)$ et dont les centres situés sur le segment S. Soit C_2 l'un de ces cercles dont le rayon est de longueur maximum. Considérons ensuite les cercles qui sont contenus dans $C(M+\overline{C}_1+\overline{C}_2)$ et dont les centres sont situés sur S. Soit C_3 l'un de ces cercles dont le rayon est de longueur maximum. Continuons ainsi de suite. La suite des cercles C_1, C_2, $C_3,\cdots\cdot$ déterminés ainsi satisfait à la propriété mentionée plus haut. Il est clair d'abord que C_i sont disjoints les uns des autres, et que la somme des diamètres des C_i est inférieure ou égale à la mesure $\mu(x, y, \alpha)$. Or, nous pouvons dire que les points d'intersection de la circonférence des cercles C_i avec le segment S (on ne peut pas en général dire tous) seuls peuvent être des points de $S\cdot CM$ qui n'appartiennent pas à la somme ΣC_i. En effet, sinon, le point considéré doit être un point limite d'une suite partielle de la suite $\{C_i\}$. La circonférence du cercle C_i possède au moins un point de M, sauf le cas où il est situé entre deux cercles des C_i qui sont osculateurs l'un à l'autre (tous trois) dont les deux possèdent des points de M. Donc, il existe une suite des points de M qui tend vers ce point. M étant fermé, ce point doit appartenir à M, ce qui est absurde. Ainsi, nous avons vu qu'il n'existe qu'au plus une infinité dénombrable des points de $S\cdot CM$ qui n'appartiennent pas à la somme de diamètres des C_i. Donc, la somme des longueure de ces diamètres est égale à $\mu(x, y, \alpha)$.

Les segments S_n tendant vers S uniformément, on voit clairement que la mesure $\mu(x_n, y_n, \alpha_n)$ satisfait à l'inégalité :

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu(x_n, y_n, \alpha_n)\geqq\mu(x, y, \alpha).$$

La fonction $\mu(x, y, \alpha)$ est donc semi-continue inférieurement, c.q.f.d.

Rangeons ensuite *tous les nombres rationnels positifs* en une suite déterminée et désignons-la par $r_1, r_2, r_3,\cdots\cdot, r_n,\cdots$ Considérons maintenant, dans l'espace à 3 dimensions (x, y, α), l'ensemble $E_{m,\nu}$ de tous les points (x, y, α) satisfaisant à la condition :

$$\frac{\lambda(x, y, \alpha, r_\nu)}{r_\nu} < 1 - \frac{1}{m}$$

et posons

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{r_\nu < 1/n} E_{m,\nu}$$

où la sommation Σ s'étend à tous les indices ν qui jouissent de l'inégalité: $r_\nu < 1/n$.

Or, comme la fonction $\lambda(x, y, \alpha, r_\nu)$ est semi-continue supérieurement, l'ensemble $E_{m,\nu}$ est ouvert. Donc, l'ensemble Φ est un ensemble $G_{\delta\sigma}$. D'autre part, on voit bien que, pour tout point (x, y, α) de Φ, il existe un entier positif m, tel que, pour tout nombre $1/n$ arbitrairement petit, il existe au moins un nombre rationnel positif r_ν qui satisfait

$$\frac{\lambda(x, y, \alpha, r_\nu)}{r_\nu} < 1 - \frac{1}{m}.$$

Donc, le point (x, y) ne'soit pas un point de densité sur la demi-droite $l(\alpha)$. Par conséquent, l'ensemble N défini au commencement est justement l'ensemble de tous les points de M tels que la section[3] $\Phi^{(x,y,\cdot)}$ est de mesure positive. Or, d'après un théorème de M. D. Montgomery,[4] cet ensemble est un $G_{\delta\sigma}$. L'ensemble N est donc également un $G_{\delta\sigma}$. À la plus forte raison, *N est mesurable au sens de Lebesgue.*

Ensuite, soit Φ^* la partie de l'ensemble Φ dont la projection sur le plan OXY appartient à M. Φ^* est un $G_{\delta\sigma}$, et par suite, il est mesurable au sens de Lebesgue. La mesure trois dimensionnelle de Φ^* peut être exprimée, d'après un théorème de Lebesgue-Fubini,[5] par

$$\int_M \operatorname{mes} \Phi^{(x,y,\cdot)} d(x, y)$$

Désignons par M_K l'ensemble de tous les points (x, y) de M tels que $\operatorname{mes} \Phi^{(x,y,\cdot)} > 1/K$. Nous avons évidemment $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ et $\sum_{K=1}^{\infty} M_K = N$. M. D.

---

3) Φ étant un ensemble, nous désignons par $\Phi^{(x,y,\cdot)}$ l'ensemble de tous les points α qui satisfont à la condition: $(x,y,\alpha)\in\Phi$. $\Phi^{(x,y,\cdot)}$ est donc un ensemble à une dimension.

4) D. Montogomery: Properties of plane sets and functions of two variables, American Journal of Mathematics, vol. LVI, 1934, pp. 569-586.

Étant donnés un ensemble plan E et une propriété p d'un ensemble linéaire, désignons par $\Gamma_p(E)$ l'ensemble de tous les points x tels que $E^{(x,\cdot)}$ satisfasse à p. Soient maintenant p la propriété d'être de mesure positive et p_r celle d'avoir la mesure superieure à r. Alors, si E est un O_α borné, $\Gamma_{p_r}(E)$ est un O_α ; si E est un O_α , $\Gamma_p(E)$ est un O_α .

Ces théorèmes et la démonstration sont valables pour le cas où E est un ensemble de l'espace à. 3 dimensions et où $\Gamma_p(E)$ etc. est l'ensemble de tous les points (x,y) tels que $E^{(x,y,\cdot)}$ satisfasse à p etc.

5) Cf. p. ex. Saks: Theory of the Integral (English translation by L. C. Young) Warszawa-Lwow, 1937, New York, pp. 76–81.

Montgomery[4] a démontré également que M_K sont aussi des ensembles mesurables (B). Donc, il existe un K tel que mes $M_K > 0$. D'autre part, on a mes $\Phi^* > \frac{1}{K}$ mes M_K. Par suite, *la mesure trois dimensionnelle de Φ^* est positive.*

Alors, le même théorème de Lebesgue-Fubini nous fait conclure que, pour presque tous les α d'un sous-ensemble de mesure positive de la projection de Φ^* sur l'axe de α, la section $\Phi^{*(\cdot,\cdot,\alpha)}$ (qui est un $G_{\delta\sigma}$ pour tous les α) possède la mesure deux-dimensionnelle qui est positive, c. à d. *il existe (une infinité) des valeurs α et un sous-ensemble $N(\alpha)$ de M tels que*

(1) *pour tous les points (x, y) de $N(\alpha)$ la demi-droite à la direction α, issue du point (x,y) possède la partie commune à l'ensemble M qui n'admet pas le point (x, y) comme point de densité, et* que

(2) *l'ensemble $N(\alpha)$ est mesurable au sens de Lebesgue et de mesure positive.*

Puisque α est fixe, nous pouvons tourner le plan OXY d'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ de sorte que la direction α devienne la direction OY après la rotation. Si l'on désigne par $N^*(\alpha)$ l'ensemble qu'on obtient de $N(\alpha)$ au moyen de la rotation, la mesure de $N^*(\alpha)$ est égale à celle de $N(\alpha)$, et donc est positive. Or, d'après le théorème de Lebesgue-Fubini[5] mentionné plus haut, il existe un point x_0 de la projection de $N^*(\alpha)$ sur l'axe OX, tel que la section $N^*(\alpha)^{(x_0,\cdot)}$ est de mesure positive. Cette section $N^*(\alpha)^{(x_0,\cdot)}$ contient donc un point (x_0, y_0) qui est un point de densité[6] au sens de Lebesgue.

Désignons par M^* l'ensemble obtenu de l'ensemble M au moyen de la rotation indiquée plus haut. Comme $N^*(\alpha) \subseteq M^*$, le point (x_0, y_0) est un point de densité au sens de Lebesgue non seulement pour l'ensemble $N^*(\alpha)^{(x_0,\cdot)}$, mais encore pour l'ensemble $M^{*(x_0,\cdot)}$. En revenant aux ensembles $N(\alpha)$ et M, il existe alors un point (x, y, α) de Φ, qui satisfait à la propriété: (x, y) est un point de densité de notre sens de $M \cdot l(\alpha)$, puisque le point de densité au sens de Lebesgue est toujours un point de densité sur les deux demi-droites en lesquelles la droite est décomposée par ce point. Ainsi, nous sommes amenes à une contradiction, et notre théorème est démontré.

En terminant, l'auteur exprime la reconnaissance à Prof. M. Tsuji pour l'intérêt qu'il a eu au cours de ce travail.

6) Cf. S. Saks: Théorie de l'intégrale, 1933, Warszawa, p. 55 et S. Saks: Theory of the Integral, loc. cit. p. 128.