34. Über die Zerfällung des Irreduziblen Matrizensystems.

Von Junjiro OGAWA, Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., June 12, 1946.)

Bekanntlich handelt es sich in der Theorie der Gruppendarstellug um die Aufgabe, durch eine geeignete Erweitrung des Grundkorpers eine irreduzible Darstellung dort zu zerlegen.(1) In der vorliegenden Note betrachten wir ein etwas allgemeineres Problem, wie man ein irreduzible Matrizensystem in seine absolut irreduziblen Bestandteile zerlegen kann.

§1. $\mathfrak{S} = \{S\}$ sei ein Matrizensystem n-ten Grades in einem Körper P der Charakteristik 0. Eine Matrix A n-ten Grades in P, die mit jedem Element S aus $\mathfrak{S}$ elementweise vertauschbar ist, nennen wir die Kommutatormatrix von dem System $\mathfrak{S}$. Die Gesamtheit der Kommutatormatrizen von $\mathfrak{S}$ bildet offenbar einen Matrizenring $\mathfrak{A}$ über P.

Es gilt nun der folgende

HILFSSATZ.(2) Wenn das System $\mathfrak{S}$ in P irreduzibel ist, dann ist der Kommutatorring $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ eine Divisionsalgebra, m. a. W., $\mathfrak{A}$ ist isomorph zu einer abstrakten Divisionsalgebra über P.

BEWEIS: Sehen wir das System $\mathfrak{S}$ als ein System der linearen Transformationen im n-dimensionalen linearen Vektorgebilde(3) $\mathfrak{M}$ über P an, dann ist die Tatsache, dass $\mathfrak{S}$ irreduzibel in P ist, nicht anders als dass jedes Teilgebilde $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{M}$, das invariant gegenüber jedem Element S aus $\mathfrak{S}$ ist, entweder $\mathfrak{M}$ selbst oder Null ist. Nun gilt aber für ein A aus $\mathfrak{N}$ und jedes S aus $\mathfrak{S}$

$$S(A(\mathfrak{M})) = A(S(\mathfrak{M})) \leqq A(\mathfrak{M}) \quad .$$

Das Teilgebilde $A(\mathfrak{M})$ aus $\mathfrak{M}$ ist also invariant gegenüber jedem Element S aus $\mathfrak{S}$, daher $A(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ oder $A(\mathfrak{M}) = 0$, d. h. wenn die Matrix A nicht eine Nullmatrix ist, ist A nichtsingulär. W. Z. B. W.

Nun sehen wir die Kommutatormatrix A als die Darstellungsmatrix des Elementes a aus einer abstrakten Divisionsalgebra $\mathfrak{d}$ über P an. Ist $m(u)$ das irreduzible Polynom (dessen Koeffizient des Gliedes vom höchsten Grade e

(1) A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Dritte Aufl. 1937. Kapitel 11-14.

(2) Hermann Weyl, Classical Groups, their invariants and representations, 1939. S. 81.

(3) O. Schreier und E. Sperner, Vorlesungen über Matrizen. 1932.

O. Schreier und E. Sperner, Einfürung in die Analytische Geometrie und Algebra Erster Band, 1931; Zweiter Band, 1935.

ist) in dem Grundkörper P, für welche

$$m(a) = 0$$

gilt, dann ist $m(u)$ das Minimalpolynom[4] der Matrix A. Bezeichnet man also das charakteristische Polynom der Matrix A, d. h. $|uE-A|$, mit $f(u)$, so gilt die folgende Gleichung nach dem bekannten Satz aus der Matrizentheorie:

$$f(u) = (m(u))^l$$

wobei l eine natürliche Zahl ist.

Da der Grundkörper P vollkommen ist, ist das Polynsm $m(u)$ separabel über P. Sind $\theta_1, \ldots, \theta_m$ die lauter verschiedenen Wurzeln von $m(u) = 0$, dann zerlegt sich $m(u)$ in $P(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ in fogende Gestalt:

$$m(u) = (u-\theta_1)\ldots(u-\theta_m) = \prod_{\alpha=1}^{m}(u-\theta_\alpha).$$

Im Körper $P_\alpha = P(\theta_\alpha)$ gilt aber

$$m(u) = (u-\theta_\alpha)\, m^*(u),$$

wo $m^*(u)$ ein Polynom in P_α und nicht teilbares durch $u-\theta_\alpha$ ist. Also lässt sich die Matrix A im P_α in die Form

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\theta_\alpha \cdots\cdots \theta_\alpha}^{l} & O \\ O & A^* \end{pmatrix}$$

transformieren, wo A^* eine Matrix $(m-1)\cdot l$-ten Grades in P_α darstellt. Daher muss sich jede Matrix S aus $\mathfrak{S}$ durch eine bestimmte Matrix T, n-ten Grades, in die Form

$$\begin{pmatrix} S_\alpha & O \\ O & S^* \end{pmatrix}$$

transformieren lasssen, wo S_α bzw. S^* die Matrizen l-ten Grades bzw. $(m-1)\cdot l$-ten Grades in P_α sind.

Nun bezeichnen wir die Gesamtheit der Matrizen S_α mit $\mathfrak{S}_\alpha$, die Matrix, welche durch Substitution $\theta_\alpha \to \theta_\beta$ $(\beta = 1, \ldots, m)$ aus S_α entsteht, mit S_β $(\beta = 1, \ldots, m)$ und die Gesamtheit der S_β $(\beta=1, \ldots, m)$ mit $\mathfrak{S}_\beta$ $(\beta=1, \ldots, m)$. Bilden wir dann die Matrizen der folgenden Form

$$\begin{pmatrix} S_1 & & & O \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & S_m \end{pmatrix}$$

und bezeichnen wir die Gesamtheit solcher Matrizen mit

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1 & & & \\ & \mathfrak{S}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix},$$

(4) O. Schreier und E. Sperner. Vorlesungen über Matrizen. 1932. S. 45.

so bekommen wir den folgenden

SATZ VON I. SCHUR.[5] Das Systen $\mathfrak{S}$ ist aquivalent mit dem System

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1 & & \\ & \mathfrak{S}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix}$$

Im Zeichen:

$$\mathfrak{S} \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1 & & \\ & \mathfrak{S}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix}$$

Wenn das System $\mathfrak{S}$ in P irreduzibel ist, so ist $\mathfrak{S}_a$ in P_a irreduzibel.

Die Matrix aus dem Kommutatorring $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$, welche mit A vertauschbar ist, lässt sich durch die Matrix T in die Form

$$\begin{pmatrix} B^a & O \\ O & B^* \end{pmatrix}$$

transformieren, wo B_a bzw. B^* eine Matrix l-ten Grades bzw. (m-1). l-ten Grades in P_a darstellt. Die Matrizen B_a sind, wie man leicht einsieht, die Kommutatormatrizen von $\mathfrak{S}_a$. Bezeichnet man die Gesamtheit der B_a mit $\mathfrak{B}_a$, dann ist $\mathfrak{B}_a$ der Kommutatorring von dem System $\mathfrak{S}_a$; daher ist $\mathfrak{B}_a$ eine Divisionsalgebra über P_a.

Wenn jedes Element A aus $\mathfrak{A}$ lineares Minimalpolynom hat, so ist das System $\mathfrak{S}$ absolut irreduzibel schon in P.

Hat $\mathfrak{B}_a$ wenigsten eine Matrix, deren Minimalpolynom nicht linear ist, dann nehmen wir eine solche Matrix B aus $\mathfrak{B}_a$ und zerlegen das System $\mathfrak{S}_a$ noch weiter nach dem obigen Verfahren. Dieses Verfahren soll soweit fortgesetzt werden bis man an das System kommt, dessen Kommutatoralgebra lauter Elemente hat, deren Minimalpolynome linear sind.

Abstrakt betrachtet, erweitern wir den Grundkörper P zu P(a) durch Adjungieren eines Elementes a aus der Kommutatordivisionsalgebra $\mathfrak{d}$ zu dem Grundkörper P. Und dann adjungieren wir ein Element b aus $\mathfrak{d}$, das mit a vertauschbar ist, zu dem P (a), u. s. w. Wir fortsetzen dies Verfahren so weit, bis jedes Element aus $\mathfrak{d}$, das mit jedem Element aus P $(a, b, \ldots)$ vertauschbar ist, schon in P $(a, b, \ldots)$ enthalten wird, d. h. bis man zu dem maximalen kommutativen Teilkörper der $\mathfrak{d}$ gelangt. Also erhalten schliesslich wir absolut irreduzible Bestandteile des Systems $\mathfrak{S}$ in dem maximalen kommutativen Teilkörper der Kommutatordivisionsalgebra $\mathfrak{d}$. Dieser maximale kommutative Teilkörper ist offenbar endlich über P.

§2 Es seien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ die lauter verschiedenen Wurzeln des in P irreduziblen Polynoms

(5) I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Transaction of American Math. Soc. Vol. 15, 1909. S. 159.

$$m(u) = eu^m + a_1 u^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_m,$$

dann gilt bekanntlich für die van der Mondesche Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \cdots\cdots & \theta_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_1^{m-1} & \theta_2^{m-1} & \cdots\cdots & \theta_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$|V| \neq 0;$$

daher ist V eine nichtsinguläre Matrix.

Nach einigen Umrechnungen haben wir folgende Relation:

$$V \begin{pmatrix} \theta_1 & & O \\ & \theta_2 & \\ & & \ddots & \\ O & & & \theta_m \end{pmatrix} V^{-1} = \mathrm{R}, \text{ [6]}$$

wobei

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ -a_m & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix R ist die reguläre Darstellung des Elements θ_α in dem Grundkörper P.

Es sei $S_\alpha = (s_{ij})$ eine Matrix l-ten Grades in dem Körper $\mathrm{P}(\theta_\alpha)$. Die Matrix $(\mathrm{R}(s_{ij}))$ lm-ten Grades, die durch Ersetzung des Elementes s_{ij} durch seine reguläre Darstellung $\mathrm{R}(s_{ij})$ in P aus S_α entsteht, nennt man nach M. Abe[7] aus S_α in P abgeleitete Matrix und bezeichnet mit $S_{\alpha\mathrm{P}(\theta\alpha)} \rightarrow \mathrm{P}$. Die Gesamtheit der Matrizen $S_{\alpha\mathrm{P}(\theta\alpha)} \rightarrow \mathrm{P}$ nennen wir das aus $\mathfrak{S}_\alpha$ in P abgeleitete System und bezeichnen so mit $\mathfrak{S}_{\alpha\mathrm{P}(\theta\alpha)} \rightarrow \mathrm{P}$. Dann gilt der folgende

SATZ.

$$\mathfrak{S}_{\alpha\ \mathrm{P}(\theta\alpha)} \rightarrow \mathrm{P} \sim V \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1 & & \\ & \mathfrak{S}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Fasst man dies mit dem Schurschen Satz zusammen, so ergibt sich daraus der folgende

SATZ.[8] Zu einem gegebenen irreduziblen Matrizensystem in einem Körper P der Charakteristik 0 gibt es ein absolut irreduzibles Matrizensystem $\mathfrak{S}^*$ in einer geeigneten Erweiterung endlichen Grades K des Grundkörpers P derart, dass

$$\mathfrak{S}^*_K \rightarrow \mathrm{P} \sim \mathfrak{S}$$

gilt.

Hier kann man ersichtlich als K einen maximalen kommutativen Teilkörper der Kommutatordivisionsalgebra $\mathfrak{d}$ wählen.

Institut der Statistischen Mathematik zu Tokyo, Japan.

(6) I. Schur, Ibid.

(7) Makoto Abe, Irreduzibilität und absolute Irreduzibilität des Matrizensystems, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, 3rd Ser., Vol. 24, No. 10 1942.

(8) M. Abe, Ibid.