63. Note sur le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-spaces riemanniens.

Par Kentaro YANO et Yosio MUTÔ.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., Dec. 12, 1946.)

§ 0. Dans un Mémoire précédent,[1] nous avons traité le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens, et obtenu cinq équations tensorielles conformes comme la condition nécessaire et suffisante pour que trois tenseurs donnés déterminent un sous-espace plongé dans un espace euclidien et dont les tenseurs fondamentaux conformes sont précisément les tenseurs donnés. Nous allons, dans cette Note, montrer que les deux de ces cinq équations peuvent être déduites des trois autres.

§ 1. Considérons un sous-espace V_m à m dimensions

(1.1) $$x^\lambda = x^\lambda(u^i)\,{}^{(2)}$$

plongé dans un espace riemannien à n dimensions, dont le tenseur métrique est $g_{\mu\nu}$. Alors le premier tenseur fondamental g_{jk} du sous-espace est donné par

(1.2) $$g_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} = g_{jk},$$

où $B_j^{\cdot\lambda} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^j}$ désignent m vecteurs, linéairement indépendents et tangents au sous-espace.

En désignant par $B_P^{\cdot\lambda}$ $n-m$ vecteurs unitaires, normaux au sous-espace et orthogonaux les uns aux autres, on a

(1.3) $$g_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_P^{\cdot\nu} = 0 \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu}B_P^{\cdot\mu}B_Q^{\cdot\nu} = \delta_{PQ}.$$

Cela étant, les équations de Gauss pour le V_m peuvent s'écrire

(1.4) $$B_{j;k}^{\cdot\lambda} \equiv B_{j,k}^{\cdot\lambda} + B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu}\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} - B_i^{\cdot\lambda}\{{}^{i}_{jk}\} = H_{jkP}B_P^{\cdot\lambda},$$

où le point-virgule désigne la dérivée covariante le long du souse-space et la virgule la dérivée partielle par rapport à u^k, $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ et $\{{}^{i}_{jk}\}$ étant les symboles de Christoffel pour V_n et V_m respectivement. Les $H_{jkP} = H_{kjP}$ apparaissant dans les equations de Gauss sont les seconds tenseurs fondamentaux du sous-espace.

D'autre part, les équations de Weingarten peuvent s'écrire

(1) K. Yano et Y. Mutô: Sur le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens. Proc. Physico-Math. Soc. Japan, *24* (1942), 437–449.

(2) Les indices $\begin{cases}\lambda, \mu, \nu, \dots, \\ i, k, j, \dots, \\ P, Q, R, \dots\end{cases}$ prennent respectivement les symboles $\begin{cases}1, 2, \dots, n, \\ \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{m}, \\ \dot{m}+\dot{1}, \dots, \dot{n}.\end{cases}$

(1.5) $$B_{P;k}^{\cdot\lambda} \equiv B_{P,k}^{\cdot\lambda} + B_P^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} \{{}_{\mu\nu}^{\lambda}\} = -B_i^{\cdot\lambda} H^i_{\cdot kP} + L_{PQk} B_Q^{\cdot\lambda},$$

où

$$H^i_{\cdot kP} = g^{ij} H_{jkP} \quad \text{et} \quad L_{PQk}(=-L_{QPk}) = g_{\mu\nu} B_{P;k}^{\cdot\mu} B_Q^{\cdot\nu}.$$

Or, si l'on effectue une transformation conforme

(1.6) $$\bar{g}_{\mu\nu} = \rho^2 g_{\mu\nu}$$

du tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, ou ρ est une fonction arbitraire des coordonnees, les trois tenseurs fondamentax g_{jk}, H_{jkP} et L_{PQk} du sous-espace subissent respectivement des transformations suivantes :

$$\bar{g}_{ik} = \rho^2 g_{jk}, \quad \bar{H}_{jkP} = \rho\,(H_{jkP} - g_{jk}\rho_\lambda B_P^{\cdot\lambda}), \quad \bar{L}_{PQk} = L_{PQk}. \quad \left(\rho_\lambda = \frac{\partial \log \rho}{\partial x^\lambda}\right)$$

Par conséquent, si l'on définit le tenseur M_{jkP} par

(1.7) $$M_{jkP} = H_{jkP} - \frac{1}{m} g_{jk} g^{bc} H_{bcP},$$

on obtient

(1.8) $$\bar{g}_{jk} = \rho^2 g_{jk}, \quad \bar{M}_{jkP} = \rho M_{jkP}, \quad \bar{L}_{PQk} = L_{PQk}.$$

On les appelle les tenseurs fondamentaux conformes du sous-espace. Le tenseur M_{jkP} satisfait à la relation $g^{jk} M_{jkP} = 0$.

§ 2. Or, nous avons démontré, dans le Mémoire cité dans § 0, qu'étant donnés un tenseur symétrique g_{jk}, $n-m$ tenseurs symétriques M_{jkP} satisfaisant à $g^{jk} M_{jkP} = 0$ et $(n-m)\cdot(n-m-1)/2$ vecteurs $L_{PQk}(=-L_{QPk})$, pour qu'ils déterminent un sous-espace à m dimensions, plongé dans un espace euclidien à n dimensions et dont les trois tenseurs fondamentaux conformes sont $\rho^2 g_{jk}$, ρM_{jkP} et L_{PQk} où ρ est une fonction convenable, il faut et il suffit qu ils satisfassent aux cinq relations

(2.1) $$\begin{aligned} C^i_{\cdot jkh} &= M_{jkP} M^i_{\cdot hP} - M_{jhP} M^i_{\cdot kP} \\ &+ \frac{1}{m-2}(M_{jaP} M^a_{\cdot kP}\delta^i_h - M_{jaP} M^a_{\cdot hP}\delta^i_k + g_{jk} M^i_{\cdot aP} M^a_{\cdot hP} - g_{jh} M^i_{\cdot aP} M^a_{\cdot kP}) \\ &- \frac{M^a_{\cdot bP} M^b_{\cdot aP}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^i_h - g_{jh}\delta^i_k), \end{aligned}$$

(2.2) $$\begin{aligned} &M_{jkP;h} - M_{jhP;k} + M_{jkQ} L_{QPh} - M_{jhQ} L_{QPk} \\ &+ \frac{g_{jk}}{m-1}(M^a_{\cdot hP;a} + M^a_{\cdot hQ} L_{QPa}) - \frac{g_{jh}}{m-1}(M^a_{\cdot kP;a} + M^a_{\cdot kQ} L_{QPa}) = 0, \end{aligned}$$

(2.3) $$L_{PQk;h} - L_{PQh;k} - M_{kaP} M^a_{\cdot hQ} + M_{haP} M^a_{\cdot kQ} + L_{PRk} L_{RQh} - L_{PRh} L_{RQk} = 0,$$

(2.4) $$\begin{aligned} &\frac{1}{m-3} C^i_{\cdot jkh;i} + \left[\frac{(M_{jaP} M^a_{\cdot kP})_{;h}}{m-2} - \frac{g_{jk}(M^a_{\cdot bP} M^b_{\cdot aP})_{;h}}{2(m-1)(m-2)}\right] \\ &\qquad - \left[\frac{(M_{jaP} M^a_{\cdot hP})_{;k}}{m-2} - \frac{g_{jh}(M^a_{\cdot bP} M^b_{\cdot aP})_{;k}}{2(m-1)(m-2)}\right] \\ &= \frac{1}{m-1} M_{jkP}(M^a_{\cdot hP;a} + M^a_{\cdot hQ} L_{QPa}) - \frac{1}{m-1} M_{jhP}(M^a_{\cdot kP;a} + M^a_{\cdot kQ} L_{QPa}) \end{aligned}$$

and

(2.5) $$\begin{aligned} &\frac{1}{m-1}(M^a_{\cdot kP;a} + M^a_{\cdot kQ} L_{QPa})_{;h} - \frac{1}{m-1}(M^a_{\cdot hP;a} + M^a_{\cdot hQ} L_{QPa})_{;k} \\ &+ \frac{1}{m-1}(M^a_{\cdot kQ;a} + M^a_{\cdot kR} L_{RQa}) L_{QPh} - \frac{1}{m-1}(M^a_{\cdot hQ;a} + M^a_{\cdot hR} L_{RQa}) L_{QPk} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{m-2}(R_{ik}M^{\cdot i}_{\cdot hP}+M_{iaQ}M^{\cdot a}_{\cdot kQ}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-R_{ih}M^{\cdot i}_{\cdot kP}$$
$$-M_{iaQ}M^{\cdot a}_{\cdot hQ}M^{\cdot i}_{\cdot kP})=0.$$

§ 3. Si l'on pose

$$C_{jk}=\frac{M_{jaP}M^{\cdot a}_{\cdot kP}}{m-2}-\frac{g_{jk}M^{\cdot a}_{\cdot bP}M^{\cdot b}_{\cdot aP}}{2(m-1)(m-2)} \tag{3.1}$$

et

$$C_{kP}=\frac{1}{m-1}(M^{\cdot a}_{\cdot kP;\,a}+M^{\cdot a}_{\cdot kQ}L_{QPa}), \tag{3.2}$$

les équations (2.1) et (2.2) peuvent s'écrire respectivement

$$C^{\cdot i}_{\cdot jkh}=M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP} \tag{3.3}$$
$$+C_{jk}\delta^i_h-C_{jh}\delta^i_k+g_{jk}C^{\cdot i}_{\cdot h}-g_{jh}C^{\cdot i}_{\cdot k}$$

et

$$M_{jkP;\,h}-M_{jhP;\,k}+M_{jkQ}L_{QPh}-M_{jhQ}L_{QPk} \tag{3.4}$$
$$+g_{jk}C_{hP}-g_{jh}C_{kP}=0,$$

où $C^{\cdot i}_{\cdot k}=g^{ij}C_{jk}$.

Prenant la dérivée covariante de $M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP}$ et contractant, nous avons

$$(M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;\,i}$$
$$=M_{jkP;\,i}M^{\cdot i}_{\cdot hP}+M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP;\,i}-M_{jhP;\,i}M^{\cdot i}_{\cdot kP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP;\,i}$$
$$=M_{jiP;\,k}M^{\cdot i}_{\cdot hP}+(M_{jkP;\,i}-M_{jiP;\,k})M^{\cdot i}_{\cdot hP}+M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP;\,i}$$
$$-M_{jiP;\,h}M^{\cdot i}_{\cdot kP}-(M_{jhP;\,i}-M_{jiP;\,h})M^{\cdot i}_{\cdot kP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP;\,i}$$
$$=(M_{jiP}M^{\cdot i}_{\cdot hP})_{;\,k}-(M_{jiP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;\,h}+M_{jiP}(M^{\cdot i}_{\cdot kP;\,h}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;\,k})$$
$$+(M_{jkP;\,i}-M_{jiP;\,k})M^{\cdot i}_{\cdot hP}-(M_{jhP;\,i}-M_{jiP;\,h})M^{\cdot i}_{\cdot kP}$$
$$+M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP;\,i}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP;\,i}.$$

En y substituant (3.4), on trouve

$$(M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;\,i}$$
$$=(M_{jiP}M^{\cdot i}_{\cdot hP})_{;\,k}-(M_{jiP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;\,h}$$
$$-M_{jiP}(M^{\cdot i}_{\cdot kQ}L_{QPh}-M^{\cdot i}_{\cdot hQ}L_{QPk}+\delta^i_k C_{hP}-\delta^i_h C_{kP})$$
$$-(M_{jkQ}L_{QPi}-M_{jiQ}L_{QPk}+g_{jk}C_{iP}-g_{ji}C_{kP})M^{\cdot i}_{\cdot hP}$$
$$+(M_{jhQ}L_{QPi}-M_{jiQ}L_{QPh}+g_{jh}C_{iP}-g_{ji}C_{hP})M^{\cdot i}_{\cdot kP}$$
$$+M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP;\,i}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP;\,i},$$

d'où

$$(M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;\,i} \tag{3.5}$$
$$=(M_{jiP}M^{\cdot i}_{\cdot hP})_{;\,k}-(M_{jiP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;\,h}$$
$$-(m-3)(M_{jkP}C_{hP}-M_{jhP}C_{kP})-g_{jk}M^{\cdot i}_{\cdot hP}C_{iP}+g_{jh}M^{\cdot i}_{\cdot kP}C_{iP}.$$

D'autre part, en dérivant $C^{\cdot i}_{\cdot k}$ covariantement et contractant, nous avons

$$C^{\cdot i}_{\cdot k;\,i}=\frac{1}{m-2}(M^{\cdot i}_{\cdot aP;\,i}M^{\cdot a}_{\cdot kP}+M^{\cdot i}_{\cdot aP}M^{\cdot a}_{\cdot kP;\,i})-\frac{(M^{\cdot a}_{\cdot bP}M^{\cdot b}_{\cdot aP})_{;\,k}}{2(m-1)(m-2)}$$
$$=\frac{1}{m-2}(M^{\cdot i}_{\cdot aP;i}M^{\cdot a}_{\cdot kP}+M^{\cdot i}_{\cdot aP}M^{\cdot a}_{\cdot iP;\,k})$$

$$+\frac{1}{m-2}M^{\cdot i}_{\cdot aP}(M^{\cdot a}_{\cdot kP;a}-M^{\cdot a}_{\cdot iP;k})-\frac{(M^{\cdot a}_{\cdot bP}M^{\cdot b}_{\cdot aP})_{;h}}{2(m-1)(m-2)}$$

En y substituant (3.5), on trouve

$$C^{\cdot i}_{\cdot k;i}=\frac{1}{m-2}(M^{\cdot i}_{\cdot aP;i}M^{\cdot a}_{\cdot kP}+M^{\cdot i}_{\cdot aP}M^{\cdot a}_{\cdot iP;k})$$
$$-\frac{1}{m-2}M^{\cdot i}_{\cdot aP}(M^{\cdot a}_{\cdot kQ}L_{QPi}-M^{\cdot a}_{\cdot iQ}L_{QPk}+\delta^a_k C_{iP}-\delta^a_i C_{kP})$$
$$-\frac{(M^{\cdot a}_{\cdot bP}M^{\cdot b}_{\cdot aP})_{;k}}{2(m-1)(m-2)},$$

d'où

$$C^{\cdot i}_{\cdot k;i}=M^{\cdot a}_{\cdot kP}C_{aP}+\frac{(M^{\cdot a}_{\cdot bP}M^{\cdot b}_{\cdot aP})_{;k}}{2(m-1)}. \tag{3.6}$$

Les $(M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;i}$ et $C^{\cdot i}_{\cdot k;i}$ étant ainsi calculés, nous allons dériver (3.3) covariantement et contracter, alors, on aura

$$C^{\cdot i}_{\cdot jkh;i}=(M_{jkP}M^{\cdot i}_{\cdot hP}-M_{jhP}M^{\cdot i}_{\cdot kP})_{;i}$$
$$+C_{jk;h}-C_{jh;k}+g_{jk}C^{\cdot i}_{\cdot h;i}-g_{jh}C^{\cdot i}_{\cdot k;i}.$$

En substituant, dans cette équation, (3.5) et (3.6), on trouve

$$C^{\cdot i}_{\cdot jkh;i}=-(m-3)(C_{jk;h}-C_{jh;k})$$
$$-(m-3)(M_{jkP}C_{hP}-M_{jhP}C_{kP}). \tag{3.7}$$

Cette équations n'est autre que l'équation (2.4). Donc, l'équation (2.4) peut être déduite des équations (2.1) et (2.2).

§ 4. En prenant la dérivée covariante de

$$M^{\cdot i}_{\cdot kP;h}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;k}+M^{\cdot i}_{\cdot kQ}L_{QPh}-M^{\cdot i}_{\cdot hQ}L_{QPk}+\delta^i_k C_{hP}-\delta^i_h C_{kP}=0$$

qui est équivalente à (3.4), et en contractant, on obtient

$$(M^{\cdot i}_{\cdot kP;h}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;k})_{;i}+(M^{\cdot i}_{\cdot kQ}L_{QPh}-M^{\cdot i}_{\cdot hQ}L_{QPk})_{;i}+C_{hP;k}-C_{kP;h}=0. \tag{4.1}$$

Or, nous avons

$$(M^{\cdot i}_{\cdot kP;h}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;k})_{;i}$$
$$=M^{\cdot i}_{\cdot kP;h;i}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;k;i}$$
$$=M^{\cdot i}_{\cdot kP;i;h}+(M^{\cdot i}_{\cdot kP;h;i}-M^{\cdot i}_{\cdot kP;i;h})$$
$$-M^{\cdot i}_{\cdot hP;i;k}-(M^{\cdot i}_{\cdot hP;k;i}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;i;k})$$
$$=M^{\cdot i}_{\cdot kP;i;h}+(M^{\cdot a}_{\cdot kP}R^{\cdot i}_{\cdot ahi}-M^{\cdot i}_{\cdot aP}R^{\cdot a}_{\cdot khi})$$
$$-M^{\cdot i}_{\cdot hP;i;k}-(M^{\cdot a}_{\cdot hP}R^{\cdot i}_{\cdot aki}-M^{\cdot i}_{\cdot aP}R^{\cdot a}_{\cdot hki}),$$

d'où

$$(M^{\cdot i}_{\cdot kP;h}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;k})_{;i}$$
$$=M^{\cdot i}_{\cdot kP;i;h}-M^{\cdot i}_{\cdot hP;i;k}+M^{\cdot a}_{\cdot kP}R_{ah}-M^{\cdot a}_{\cdot hP}R_{ak}, \tag{4.2}$$

en vertu de l'identité

$$M^{\cdot i}_{\cdot aP}R^{\cdot a}_{\cdot khi}=M^{\cdot i}_{\cdot aP}R^{\cdot a}_{\cdot hki}.$$

D'autre part, on a

$$(M^{\cdot i}_{\cdot kQ}L_{QPh}-M^{\cdot i}_{\cdot hQ}L_{QPk})_{;i}$$
$$=M^{\cdot i}_{\cdot kQ;i}L_{QPh}+M^{\cdot i}_{\cdot kQ}L_{QPh;i}-M^{\cdot i}_{\cdot hQ;i}L_{QPk}-M^{\cdot i}_{\cdot hQ}L_{QPk;i}$$

$$= M^{\cdot i}_{kQ;\,i} L_{QPh} + M^{\cdot i}_{kQ} L_{QPi\,;\,h} + M^{\cdot i}_{kQ} (L_{QPh;\,i} - L_{QPi\,;\,h})$$
$$- M^{\cdot i}_{hQ\,;\,i} L_{QPk} - M^{\cdot i}_{hQ} L_{QP\,;\,k} - M^{\cdot i}_{hQ} (L_{QPk;\,i} - L_{QPi\,;\,k}).$$

En y substituant (2.3), on trouve

$$(M^{\cdot i}_{kQ} L_{QPh} - M^{\cdot i}_{hQ} L_{QPk})_{;\,i}$$
$$= M^{\cdot i}_{kQ;\,i} L_{QPh} + M^{\cdot i}_{kQ} L_{QPi\,;\,h}$$
$$+ M^{\cdot i}_{kQ} (M_{haQ} M^{\cdot a}_{iP} - M_{iaQ} M^{\cdot a}_{hP} - L_{QRh} L_{RPi} + L_{QRi} L_{RPh})$$
$$- M^{\cdot i}_{hQ;\,i} L_{QPk} - M^{\cdot i}_{hQ} L_{QPi\,;\,k}$$
$$- M^{\cdot i}_{hQ}(M_{kaQ} M^{\cdot a}_{iP} - M_{iaQ} M^{\cdot a}_{kP} - L_{QRk} L_{RPi} + L_{QRi} L_{RPk})$$
$$= (m-1)\, C_{kQ} L_{QPh} + M^{\cdot i}_{kQ} L_{QPi\,;\,h} - M^{\cdot i}_{kQ} M_{iaQ} M^{\cdot a}_{hP}$$
$$- (m-1)\, C_{hQ} L_{QPk} - M^{\cdot i}_{hQ} L_{QPi\,;\,k} + M^{\cdot i}_{hQ} M_{iaQ} M^{\cdot i}_{kP}$$
$$- (M^{\cdot i}_{kQ} L_{QRh} - M^{\cdot i}_{hQ} L_{QRk}) L_{RPi},$$

d'où

$$(4.3)\qquad (M^{\cdot i}_{kQ} L_{QPk} - M^{\cdot i}_{hQ} L_{QPk})_{;\,i}$$
$$= (m-2)\, C_{kQ} L_{QPh} + (M^{\cdot i}_{kQ} L_{QPi})_{;\,h} - M^{\cdot i}_{kQ} M_{iaQ} M^{\cdot a}_{hP}$$
$$- (m-2)\, C_{hQ} L_{QPk} - (M^{\cdot i}_{hQ} L_{QPi})_{;\,k} + M^{\cdot i}_{hQ} M_{iaQ} M^{\cdot a}_{kP}.$$

En substituant (4.2) et (4.3) dans (4.1), on obtient

$$(4.4)\qquad (m-2)(C_{kP;\,h} - C_{hP;\,k}) + (m-2)(C_{kQ} L_{QPh} - C_{hQ} L_{QPk})$$
$$+ (M^{\cdot a}_{kP} R_{ah} + M_{iaQ} M^{\cdot a}_{kQ} M^{\cdot i}_{hP} - M^{\cdot a}_{hP} R_{ak} - M_{iaQ} M^{\cdot a}_{hQ} M^{\cdot i}_{kP}) = 0\,.$$

Ce n'est autre que l'équation (2.5). Donc, l'équation (2.5) peut être déduite des équations (2.2) et (2.3).

§ 5. Nous avons donc démontré que:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tenseur symétrique g_{jk}, $n-m$ tenseurs symétriques H_{jkP} et $(n-m)\,(n-m-1)/2$ vecteurs $L_{PQk}\,(=-L_{QPk})$ déterminent un sous-espace à m dimensions plongé dans un espace euclidien à n dimensions est que les tenseurs fondamentaux satisfassent aux equations (2.1), (2.2) et (2.3).