2. Über den nicht-Abelschen Hauptdivisorsatz.

Von Hiraku TÔYAMA.
Mathematisches Institut, Tokyo Kôgyô Daigaku.
(Comm. by T. KUBOTA, M.J.A., Feb. 12, 1948.)

1. Problemstellung. In der Abelschen Theorie der algebraischen Funktionen wird ein Divisor erster Ordnung und nullten Grades $\mathfrak{D} = \dfrac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_s}{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_s}$ stets durch eine multiplikative Funktion ausgedrückt. Die explizite Darstellung geschieht durch Abelsches Integral folgendermassen:

$$f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^{s} \Pi_{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i}^{z, c}\right),$$

wobei $\Pi_{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i}^{z, c}$ das Abelsche Integral dritter Gattung bezeichnet, das in p_i und q_i logarithmisch singulär ist und in C verschwindet. Jede multiplikative Funktion ist eine eindeutige Funktion auf der Überlagerungsfläche der Homologien $\hat{\mathfrak{F}}$, welche maximal, unverzweigt und Abelsch über $\mathfrak{F}$ überlagert, und wie von H. Weyl gezeigt wurde,(1) ein funktionentheoretisches Analogon des Hilbertschen Klassenkörpers ist. Daher kann man die Darstellbarkeit durch multiplikative Funktionen als ein Analogon des Hauptidealsatzes ansehen. Wie lässt sich dieser "Hauptdivisorsatz" formulieren in der nicht-Abelschen Theorie? Diese Frage wollen wir in der vorliegenden Arbeit beantworten.(2) Freilich muss man dabei anstatt der $\hat{\mathfrak{F}}$ die universelle Überlagerungsfläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ heranziehen.

2. Bezeichnungen.

$w(\mathfrak{D}) = \mathrm{Grad} \langle \mathfrak{D} \rangle =$ Verzweigungsgrad des $\mathfrak{D}$.

$d(\mathfrak{D}) = rj - w$, $\left(j = -\left[\dfrac{-w}{r}\right]\right)$, Defekt des $\mathfrak{D}$, wobei $[\ \ ]$ die sogenannte Gausssche Funktion bezeichnet.

$N_{\mu\alpha} =$ Verzweigungsmultiplizitäten.

$\nu(\mathfrak{D}) = \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha} N_{\mu\beta} = \mathrm{Grad} \langle \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^{K} \rangle =$ Verzweigungsindex.

t eine Ortsuniformisierende der $\mathfrak{F}$ in einem Punkte.

τ eine Ortsuniformisierende der $\tilde{\mathfrak{F}}$.

3. Einfacher Divisor. Ein Divisor $\mathfrak{D}$ heisst einfach, wenn er den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Grad $\mathfrak{D} = 0$.

(ii) Er hat $rp+d$ unverzweigte Grundpunkte $\mathfrak{p}_i\,(i=1, 2, \ldots. rp+d)$ und in jedem Punkte die folgende Normalform:

$$\begin{pmatrix} E_{r-1} & l \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{r-1} & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} F$$

(iii) Normalform im Verzweigungspunkte:

$$\begin{pmatrix} \tau^{d_1} & & \\ & \tau^{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \tau^{d_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & v_{iK} \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d_1 \leqq d_2 \leqq \ldots. \leqq d_r).$$

(iv) In einem passend festgestellen Punkte $\mathfrak{p}_0$ hat er die Form:

$$t^{-p-j} \cdot E_r$$

Zu einem System von Verzweigungsmultiplizitäten $N_{\mu\alpha}$ gibt es eine Menge von einfachen Divisoren $D(N_{\mu\alpha})$. In diese Menge führen wir die natürliche Topologie ein, die aus $\mathfrak{F}$ und Vektorräumen l und v induziert wird. Dann hat $D(N_{\mu\alpha})$ die komplexe Dimensionszahl $r(rp+d)+\nu$.

4. Logarithmisches Differential. Wie A. Weil gezeigt hat,[3] kann ein Divisor $\mathfrak{D}$ dann und nur dann durch eine multiplikative Funktion ausgedrückt werden, wenn sein *logarithmisches Differential* existiert. Unter einem logarithmischen Differential versteht man ein Differential dI auf $\mathfrak{F}$, das $\mathfrak{D}\,dI\,\mathfrak{D}^{-1} - d\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{D}^{-1}$ überall endlich macht, und bezeichnet mit $dI = d\log\mathfrak{D}$. Wenn solches einmal existiert, wird die dazu gehörige multiplikative Funktion dargestellt durch folgendes hyperabelsches Integral:[4]

$$f(z) = {}_e\!\!\int_a^{*z} d\log\mathfrak{D},$$

wo das Integralzeichen das hyperabelsche Rechtsintegral bedeutet. In dieser Arbeit soll hauptsächlich der folgende Satz, den man mit Recht *Hauptdivisorsatz* nennen möchte, bewiesen werden.

Satz. 1. Fast alle einfachen Divisoren können durch multiplikative Funktionen dargestellt werden.

Beweis. Eine mögliche Form[5] des logarithmischen Differentials ist

$$dI = \sum_{i=1}^{rp+d} F_i^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_i & 1 \end{pmatrix} F_i\, d\Pi_{p_j, q_0} + \sum_{\mu=0}^{l} V_\mu^{-1}(D_\mu n_\mu^{-1} + M_\mu)\, V_\mu\, d\Pi_{q\mu, q_0}$$

$$- (p+j)\cdot E_r\, d\Pi_{p_0 q_0} + \sum_{i=1}^{p} A_i\, dw_i$$

wobei S_i eine 1-zeilige und $(r-1)$-spaltige Matrix bezeichnet, die man kurz $(1, r-1)$-Matrix nennt, und M_μ eine r-reihige quadratische Matrix, deren (i, k)-Element verschwindet, falls $d_{i\mu} \leqq d_{k\mu}$, und D_μ eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} d_{1\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{r\mu} \end{pmatrix}$ bedeutet. A_i ist eine r-reihige quadratische Matrix, und dw_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ sind linear unabhängige Differentiale erster Gattung.

Aus Aufzählung der Paramteranzahl ergibt sich, dass die gesamte Dimensionszahl der obigen Form

$$(r-1)(rp+d) + \nu + r^2 p$$

ist. Dafür, dass dI ein logarithmisches Differential ist, sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(a) Residuensumme verschwinden,

(b) (1, 2)-Teile der $F_i \dfrac{dI}{d\mathfrak{p}_i} F_i^{-1}$ verschwinden.

Da die Spur der Residuensumme identisch verschwindet, enthält (a) höchstens $r^2 - 1$ Bedingungen. Die Bedingungen (b) sind $(r-1) \times (rp+d)$. Also ist die gesamte Anzahl von Bedingungen

$$(r^2 - 1) + (r-1)(rp+d).$$

Die gesamten $(r^2-1) + (r-1)\,rp + d)$ Bedingungen bilden ein lineares nicht-homogenes Gleichungssystem in bezug auf S_i, M_μ und A_i. Also wird unsere Frage zurückgeführt endlich zum Lösbarkeitsproblem dieses Gleichungssystems. Wenn es uns gelingt, zu beweisen, dass der Rang des homogenen Teils des Gleichungssystems der Anzahl der Gleichungen gleich ist für allgemeine Werte des D, dann ist unsere Aufgabe gelöst.

5. Existenzbeweis. Aus $rp+d$ Punkten $\mathfrak{p}_i$ wählen wir r Punkte $\mathfrak{f}_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots r-1)$, r Punkte $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ und d Punkte $\mathfrak{h}_i$ $(i = 1, 2, \ldots d)$. Dazu gehörige $(r-1)$-dimensionale Vektoren seien mit f_i, g_i, h_i bezeichnet. Wir spezialisieren die Vektoren f_i folgendermassen:

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \quad f_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektoren g_i und h_i sein:

$$g_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ \vdots \\ g_{r-1,i} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \ldots r), \quad h_i = \begin{pmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ \vdots \\ h_{r-1,i} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \ldots d).$$

S_i-Matrizen in $\mathfrak{f}$-Punkte, bzw. $\mathfrak{g}$-Punkte seien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_i & 0 \end{pmatrix} \ (i = 0, 1, 2, \dots r-1) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_i & 0 \end{pmatrix} \ (i = 1, 2, \dots r).$$

Hierin bedeuten x_i und y_i $(1, r-1)$-Matrizen. Wir setzen voraus, dass alle anderen Vektoren S_i und M_μ verschwinden. Bezüglich A_i benutzen wir folgende Spezialisierung:

$$A_i = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \, r-1 \\ \} \, 1 \end{matrix}$$

d.h. das Verschwinden der letzten Zeilen. Somit wird nach dieser Spezialisierung die Anzahld der Unbekannten:

$$2r(r-1) + r(r-1)p = (r-1)(rp+2p).$$

Die Matrix des Gleichungssystems lässt sich in folgender Schema darstellen:

Bedingungen	Unbekannte	
	$x_i \ y_i \ (2r(r-1))$	$A_i \ (r(r-1)p)$
Residuensumme (r^2-1)	I	II
h-Punkte $d \ (r-1)$		
Übrige rp-Punkte $(r(r-1)p)$		III

Die Gleichungen der Residuensumme 0 enthalten keine A_i. Wenn wir r $\mathfrak{f}$-Punkte und d $\mathfrak{h}$-Punkte beliebig nahe gegeneinander verrücken, wo wird ersichtlich

$$\frac{d\,\Pi f_k}{d\mathfrak{h}_i} \sim \frac{1}{\mathfrak{f}_k - \mathfrak{h}_i} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Dann kann man den II-Teil vernachlässigen, so genügt es, nur die Teile I und III zu betrachten. Zunächst berechnen wir den Rang des I. Die Gleichungen der Residuensumme 0 lassen sich schreiben:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} E_{r-1} & -f_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{r-1} & f_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{r} \begin{pmatrix} E_{r-1} & -g_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{r-1} & g_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Zerlegt man die obigen Gleichungen in Untermatrizen, so ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{r-1} f_i x_i + \sum_{i=1}^{r} g_i y_i = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} f_i x_i f_i + \sum_{i=1}^{r} g_i y_i g_i = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{r-1} x_i + \sum_{i=1}^{r} y_i = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Spezielle Formen der f_i geben

$$x_j = -\sum_{i=1}^{r} g_{ji} y_i \, (j = 1, 2, \ldots r-1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Der homogene Teil des (1) in bezug auf x_i, y_i und A_i ist

$$dI = \sum_{i=0}^{r-1} F_i^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_i & 0 \end{pmatrix} F_i \, d\Pi_{f_i} + \sum_{i=1}^{r} G_i^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_i & 0 \end{pmatrix} G_i \, d\Pi_{g_i}$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} A_i \, dw_i \,, \text{ wo } G_i = \begin{pmatrix} E_{r-1} & g_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die Ableitung des dI nach der Ortsuniformisierenden folgendermassen ausdrücken,

$$\left(\frac{dI}{d\tau}\right)_p = \frac{dI}{d\mathfrak{p}}$$

so ist (1, 2)-Teil des $\mathfrak{D} \, dI \, \mathfrak{D}^{-1}$ im $\mathfrak{h}_i$-Punkte

$$\left(H_i \frac{dI}{dh_i} H_i^{-1}\right)_{1,2}$$

$$= \sum_{m=1}^{r-1} (f_m - h_i) \, x_m \, (f_m - h_i) \frac{d\Pi_{f_m}}{dh_i}$$

$$+ \sum_{m=}^{r} (g_m - h_i) \, y_m \, (g_m - h_i) \frac{d\Pi_{g_m}}{dh_i} = 0$$

Setzen wir (6) in (4) ein und eliminieren $x_1, x_2, \ldots . x_{r-1}$ aus (4), so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{r-1} f_i \left(\sum_{k=1}^{r} g_{ik} y_k\right) f_i - \sum_{i=1}^{r} g_i y_i g_i = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Hier beschränken wir zuerst auf den Fall $d \leqq r-2$. Wenn wir die Grössen f_i, g_i, h_i beliebig klein annehmen, so reduziert sich die obige Gleichung zu der folgenden Form:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r} g_i y_i g_i = 0 \\ &\sum_{j=1}^{r} (g_j - h_i) \, y_i \, (g_j - h_i) \frac{d\Pi g_j}{dh_i} = 0 \; (i=1, 2, \ldots d) \end{aligned}\right\} \quad . . (8)$$

Wir setzten voraus, dass je r der Vektoren $0, g_1, g_2, \ldots . g_r$, $h_1, h_2 \ldots . h_d$ nicht in einer $(r-2)$-dimensionalen Hyperebene liegen, Unter dieser Voraussetzung spannen die Vektoren g_1, g_1-g_1, g_1-h_2 .... g_1-h_d den $(d+1)$-dimensionalen Teilraum auf. Daher lässt sich ein beliebiger Punkt q_i dieses Teilraumes darstellen:

$$q_i = a_{i1}(g_i-h_1)+a_{i2}(g_i-h_2)+\dots\dots+a_{id}(g_i-h_d)+a_{i,d+1}\,g_i$$
$$(i=1,2,\dots\dots r-1)$$

wo a_{ik} eine geeignete komplexe Zahl bezeichnet. Dann existiert stets eine $(1, r-1)$-Matrix, welche dem folgenden Gleichungssystem genügt:

$$z_{d+1}\,g_1 = a_{1,d+1},\quad z_{d+1}\,g_2 = a_{2,d+1}\ \dots\dots\ z_{d+1,r-1}\,g_{r-1} = a_{r-1,d+1}$$
$$z_i(g_1-h_i) = a_{i1},\quad z_i(g_2-h_i) = a_{i,2}\ \dots\dots\ z_i(g_{r-1}-h_i) = a_{i,r-1}$$
$$(i=1,2,\dots\dots d)$$

Hieraus folgt, dass die Vektoren der Koeffizienten in den Gleichungen (8) den $(d+1)$-dimensionalen Teilraum aufspannen. Jeder solche Raum ist voneinander unabhängig, so ist der gesamte Rang

$$(d+1)(r-1).$$

Falls $d=r-1$, entfernen wir den g_1-Punkt, so werden die Koeffizienten der y_1 beliebig klein. Dann erhalten wir aus (8):

$$y_2 = y_3 = \dots\dots = y_r = 0$$

Setzt man wieder diese Resultate in (8) ein, so ergibt sich:

$$y_1(G_1^* - g_1 g_1^T) = 0$$

wo G_1^* die folgende Diagonalmatrix ist,

$$G_1^* = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ & g_{21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_{r-1,1} \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen ist die Matrix $G_1^* - g_1 g_1^T$ offenbar invertierbar, dann erhalten wir

$$y_1 = 0$$

und aus (5) schliesslich $x_0 = 0$. Somit ist der Rang des II

$$(r-1)(r+d+1).$$

Nun gehen wir zum Teil III über. Zuerst teilen wir die rp Punkte in r Mengen von p Punkten, und numerieren sie in folgender Weise:

$$p_{ik}\,(i=1,2,\dots\dots p,\ k=1,2,\dots\dots r)$$

Bilden wir die r Divisoren

$$\mathfrak{d}_k = p_{1k}\,p_{2k}\dots\dots p_{pk}\,(k=1,2,\dots\dots r)$$

und bezeichnen die Vektoren in Punkt p_{ik} mit l_{ik}.

Sei L_i die r-reihige quadratische Matrix,

$$L_i = \begin{pmatrix} l_{i1} & l_{i2} \dots . & l_{ir} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$J(\mathfrak{d}_k) = \begin{pmatrix} \dfrac{dw_1}{dp_{1k}} & \dfrac{dw_1}{dp_{2k}} \dots\dots & \dfrac{dw_1}{dp_{pk}} \\ \vdots & & \\ \dfrac{dw_p}{dp_{1k}} & \dots\dots\dots\dots & \dfrac{dw_p}{dp_{pk}} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$dW = \sum_{m=1}^{p} A_m \, dw_m$$

Da A_m von der Form $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, so ist (1, 2)-Teil

$$\frac{dw}{d\mathfrak{p}_{ik}} \begin{pmatrix} l_{ik} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots . \, p, \; k = 1, 2, \dots . \, r)$$

In diesen Gleichungen nehmen wir besonders an:

$$L_1 = L_2 = \dots . = L_p$$

Nun folgt aus der Bedingung $|J(\mathfrak{d}_k)| \neq 0$

$$A_m L_1 = 0$$

und wieder aus $|L_1| \neq 0$ erhalten wir schliesslich

$$A_m = 0$$

Also ist der Rang des III genau $r(r-1)p$. w.z.b.w.

Aus diesem Satz folgt leicht der

Satz 2. Die Dimensionszahl des Differentialkerns des allgemeinen einfachen Divisors ist $r^2(p-1) + \nu + 1$.

Beweis. Die in Frage kommende Dimensionszahl ist

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{D}^K \times \mathfrak{D} \times \tilde{w}) &= (r-1)(rp+d) + \nu + r^3 p \\ &\quad - (r-1)(rp + r + d + 1) \\ &= r^2(p-1) + \nu + 1. \end{aligned}$$

Satz 3. Der Kern des allgemeinen einfachen Divisors ist von der Form $a \cdot E_r$.

Beweis. Nach dem Riemann-Roch-Weilschen Satz:

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^K) &= \dim(\mathfrak{D}^K \times \mathfrak{D} \times \overline{w}) + \mathrm{Grad}(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^K) \\ &\quad - \mathrm{Grad} < \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^K > - r^2(p-1) \\ &= r^2(p-1) + \nu + 1 - \nu - r^2(p-1) = 1. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis.

(1) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1923, Anhang.
(2) H. Tôyama, Über eine nicht-Abelsche Theorie der abgebraischen Funktionen, 1947, (erscheint demnächst). § 6.
(3) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de Liouville, 17 (1938).
(4) H. Tôyama, loc. cit. § 4.
(5) H. Tôyama, loc. cit. § 5.