47. La Structure d'un Flot Topologique, I.

Par Motokiti KONDÔ.
L'iustitut mathématique, l'université de Kyûsyû, Hukuoka.
(Comm. by T. KUBOTA, M. J. A., July 12, 1949.)

Le but de ces notes que je représentrai en même title dans ce journal est de discuter la structure d'un flot topologique et nous commençons par la discussion des fonctions prespue-périodiques sur celui-ci[1)].

1. Nous entendrons par un *flôt topologique* une paire (Ω, G) d'un espace Ω topologique de F. Hausdorff et un groupe G des homéomorphismes sur Ω.

Etant donné un flot topologique (Ω, G), nous désignons par $C_{\Omega, G}$ l'ensemble de toutes les fonctions finies, complexes et définies sur la somme directe $\Omega\oplus G$. Pour un élément $f=f(\omega, \sigma)$ de $C_{\Omega, G}$ et un nombre positif ε, nous désignons par $U(f, \varepsilon)$ l'ensemble de tous les éléments $g=g(\omega, \sigma)$ de $C_{\Omega, G}$ qu'il existe un nombre positif $\delta(<\varepsilon)$ tel qu'on ait $|f(\omega, \sigma)-g(\omega, \sigma)|<\varepsilon-\delta$ sur $\Omega\oplus G$ et nous l'appelons un *voisinage* de f. D'après cette définition, $C_{\Omega, G}$ est un espace topologique de F. Hausdorff. Puis, pour un élément f de $C_{\Omega, G}$, nous désignons par $\mathfrak{F}(f)$ la famille des fonctions $f(\xi\omega, \eta\sigma)$ $(\xi, \eta \in G)$. Alors, si $\mathfrak{F}(f)$ est conditionnellement compacte, c'est-à-dire, toute sous-famille infinie de $\mathfrak{F}(f)$ admet an moins un élément de $C_{\Omega, G}$ comme un élément d'accumulation, nous dirons que f est *presque-périodique* sur $\Omega\oplus G$. Pour une fonction $f(\omega)$ continue, complexe et définie sur Ω, nous posons

$$f^{\sigma}(\omega, \sigma)=f(\sigma\omega), \tag{1.1}$$

et quand f^{σ} est presque-périodique sur $\Omega\oplus G$, nous dirons que $f(\omega)$ est *presque-périodique* sur Ω.

---

1) Sur les fonctions presque périodiques définies sur un flot topologique, voir H. Weyl, Harmonics on homogeneous manifold. Ann. Math., **35** (1934),
H. Weyl, Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space. Am. Jour. Math., **71** (1949),
Y. Kawada, Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Kugelfunktionen. Proc. Imp. Acad., **1** (1939).
Or, ils sont considéré le cas où un groupe donné est transitif sur un espace et les resultats donnés dans celles ci sont contenus dans notre resultats

Or, lorsque, quelques soient les deux sous-ensembles ouverts A et B de Ω, il existe un élément σ de G tel qu'on ait $A\Lambda\sigma B \neq 0$, nous dirons qne (Ω, G) est *topologiquement ergodique*. Nous avons alors

Théorème 1. *Si (Ω, G) est topologiquement ergodique, toute fonction presque-péridoque sur Ω est bornée.*

Puis, nous désignons par C_Ω l'espace des fonctions continues, bornées, complexes et définies sur Ω dont la norme $|f|$ d'un élément $f=f(\omega)$ est la borné supérieure de $|f(\omega)|$ sur Ω. Il est alors un espace de S. Banach. Or, nous avons

Théorème 2. *Si (Ω, G) sst topologiquement ergodique, la famille de toutes les fonctions presque-périodiques sur Ω est un sous-ensemble linéaire et fermé de C_Ω et de plus il est un anneau normé en vertu de la multiplication ordinaire. Nous le designons par $C_\Omega{}^*$.*

2. Maintenant, nous considérons la valeur moyenne d'un fonction presque-périodique sur un flot topologique (Ω, G). Lorsque $f(\omega)$ est telle fonction, la fonction

$$f^\omega(\sigma) = f(\sigma\omega) \tag{2.1}$$

est presque-périodique sur G au sens de M. J. v. Neumann,[1] et donc si nous posons

$$M_\omega(f) = M_\sigma(f^\omega), \tag{2.2}$$

où $M_\sigma(f^\omega)$ désigne la valeur moyenne de f^ω sur G, nous avons

$$M_\omega(af) = aM_\omega(f), \tag{2.3}$$

$$M_\omega(f+g) = M_\omega(f)+M_\omega(g), \tag{2.4}$$

$$M_\omega(e) = 1, \tag{2.5}$$

$$M_\omega(f\sigma) = M_\omega(f), \tag{2.6}$$

$$|M_\omega(f)| \leqq |f|, \tag{2.7}$$

où e désigne la fonction presque-périodique sur Ω telle qu'on ait $e(\omega)=1$ pour tout élément ω de Ω. Or, nous avons le

Théorème 3. *Si (Ω, G) est topologiquement ergodique, $M_\omega(f)$ est independente du choix d'un élément ω de Ω, et donc nous la désignons par $M(f)$ et nous l'appelons la valeur moyenne de f.*

---

1) J. v. Neumann, Almost périodic functions in a group, I. Trans. Am. Math. Soc., **36** (1934).

Remarque. C'est une sorte des théorèmes individuellement ergodiques.

Théorème 4. *Si (Ω, G) est topologiquement ergodique, $M(f)$ est déterminée univoquement sur C_Ω^*.*

3. Pour un élément σ de G, quand nous posons

$$(3.1) \qquad U f = f\sigma \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } C_\Omega,$$

U_σ est linéaire et isométrique sur C_Ω et nous avons

$$(3.2) \qquad U_\sigma U_\tau = U_{\sigma\tau} \quad (\sigma, \tau \in G).$$

D'où, l'ensemble U_G de tous les opérateurs $U_\sigma (\sigma \in G)$ est un groupe isomorphique à G. Puis, nous désignons par $U_{\Omega, G}$ un anneau des opérateurs sur C_Ω par rapport à la topologique uniforme dont des générateurs sont les élémente de U_G.

Quand un sous-ensemble $\mathfrak{A}$ de C_Ω remplit pour tout élément X de $U_{\Omega, G}$ la condition

$$(3.3) \qquad X\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A},$$

nous l'appelons un *sous-ensemble invariant* de C_Ω par rapport à $U_{\Omega, G}$. Alors, l'ensemble de tous les sous-ensembles linéaires, fermés et invariants par rapport à $U_{\Omega, G}$ est une structure complète. Nous la désignons par $\boldsymbol{L}(U_{\Omega, G})$. C_Ω^* est invariant par rapport à $U_{\Omega, G}$ et donc nous avons $C_\Omega^* \in \boldsymbol{L}(U_{\Omega, G})$.

Pour un élément $\mathfrak{R}$ de $\boldsymbol{L}(U_{\Omega, G})$, si nous désignons par $U^{\mathfrak{R}}{}_\sigma$ la contraction de U_σ sur $\mathfrak{R}$, nous avons

$$(3.4) \qquad U^{\mathfrak{R}}{}_\sigma U^{\mathfrak{R}}{}_\tau = U^{\mathfrak{R}}{}_{\sigma\tau},$$

et donc l'ensemble $U^{\mathfrak{R}}{}_G$ de tous les opérateurs $U^{\mathfrak{R}}{}_\sigma (\sigma \in G)$ est un groupe homomorphique à G. Nous l'appelons une *représentation contiune* de G par rapport à $\mathfrak{R}$.

4. Dans la suite, nous supposons que (Ω, G) soit ergodique topologiquement. Pour deux éléments f et g de C_Ω^*, nous posons

$$(4.1) \qquad (f, g) = M(f(\omega), \overline{g(\omega)}).$$

Alors, (f, g) est une fonctionnelle bilinéaire sur C_Ω^* et $(f, g) = \overline{(g, f)}$. Donc, si nous posons

$$(4.2) \qquad \|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

C_Ω^* est linéaire et normé en vertu de cette définition, et celui obtenu en complétant C_Ω^* est un espace hilbertien. Nous le désignons par $\mathfrak{H}_\Omega$.

Pour un élément σ de G, quand nous posons

$$(4.3) \qquad V_\sigma f = f\sigma \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } C_\Omega^*,$$

il est linéaire et isométrique par rapport à la normé (4.2). D'où, nous pouvons prolonger continuellement V_σ sur $\mathfrak{H}_\Omega$ tout entier. C'est unitaire sur $\mathfrak{H}_\Omega$ et nous le désignons encore par V_σ. Nous avons alors

$$(4.4) \qquad V_\sigma V_\tau = V_{\sigma\tau} \, (\sigma, \tau \in G),$$

et donc l'ensemble V_G de tous les opérateurs $V_\sigma (\sigma \in G)$ est un groupe isomorphique à G. Puis, nous désignone par $N_{G,\Omega}$ un anneau des opérateurs sur $\mathfrak{H}_\Omega$ par rapport à la topologie faible dont les génératers sont les éléments de V_G.

Quand un sous-ensemble $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{H}_\Omega$ remplit pour tout élément de $N_{\Omega,G}$ la condition (3.3), nous l'appelons un *soun-ensemble invariant* de $\mathfrak{H}_\Omega$ par rapport à $N_{\Omega,G}$. Alors, l'ensemble de tous les sous-ensembles linéaires, fermés et invariants par rapport à $N_{\Omega,G}$ est une structure complete et ortho-complémentaire. Nous la désignons par $\boldsymbol{L}(N_{\Omega,G})$.

Pour un élément $\mathfrak{N}$ de $\boldsymbol{L}(N_{\Omega,G})$, si nous désignons par $V^{\mathfrak{N}}{}_\sigma$ la contraction de V_σ sur $\mathfrak{N}$, nous avons de même que (3.4)

$$(4.5) \qquad V_\sigma{}^{\mathfrak{N}} V_\tau{}^{\mathfrak{N}} = V_{\sigma\tau}{}^{\mathfrak{N}},$$

et donc l'ensemble $V_G{}^{\mathfrak{N}}$ de tous les opérateurs $V_\sigma{}^{\mathfrak{N}} (\sigma \in G)$ est un groupe homomorphique à G. Nous l'appelons une *représentation unitaire* de G par rapport à $\mathfrak{N}$.

5. Maintenant, nous considérons la représentation d'un flot topologique (Ω, G), Etant donnés un nombre fini des éléments $f_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ de C_Ω qui sont indépendants linéairement et un ensemble D des opérateurs $D_\sigma (\sigma \in G)$ linéaires sur l'espace R_n unitaire des dimensions n tels qu'on ait $D_\sigma D_\tau = D_{\sigma\tau}$, nous considérons une appliquation

$$(5.1) \qquad f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$$

qui transforme continuellement Ω en un sous-ensemble Ω_f de R_n. Alors, si nous avons

$$D_\sigma f = f\sigma, \tag{5.2}$$

nous appelons (Ω_f, D) une *représentation finie et continue* de (Ω, G). (Ω_f, D) est evidemment un flot topologique. En particulier, si D_σ $(\sigma \in G)$ sont tous unitaires, nous appelons (Ω_f, D) *une rpeèsentations finie et unitaire* de (Ω, G).

Lorsque (Ω_f, D) est une représentation finie et continue de (Ω, G) et que f est donnée par (5.1), il existe les matrices $(d_{ij}(\sigma))$ $(\sigma \in G)$ de degré n qui remplissent la condition

$$f_k\sigma = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(\sigma) f_j, \tag{5.3}$$

et si nous posons $D_f(\sigma) = (d_{ij}(\sigma))$, nous avons

$$D_\sigma f = D_f(\sigma) f, \tag{5.4}$$

$$D_\sigma D_\tau = D_f(\sigma) D_f(\tau). \tag{5.5}$$

D'où, l'ensemble D_f de toutes les matrices $D_f(\sigma)$ $(\sigma \in G)$ est isomorphique à D.

Or, nous avons d'après les définitions

$$f_k^c(\omega, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(\sigma) f_j(\omega), \tag{5.6}$$

$$d_{kj}(\sigma\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_{ki}(\sigma)\, d_{ij}(\tau), \tag{5.7}$$

et donc f_k et d_{kj} sont presque-périodiques respectivement sur Ω et G. Alors si nous désignons par $\mathfrak{N}$ le sous-ensemble linéaire de C_Ω déterminé par f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, nous avons

$$\mathfrak{N} \in \boldsymbol{L}(U_{\Omega, G}), \tag{5.8}$$

$$D_\sigma = U_\sigma^{\mathfrak{N}}. \tag{5.9}$$

Puis, nous prenons un élément $\mathfrak{N}$ de $\boldsymbol{L}(U_{\Omega, G})$ qui est de dimension finie. Quand f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ est une base de $\mathfrak{N}$, l'application $f(\omega)$ donnée par (5.1) est continue sur Ω et $(\Omega_f, U_G^{\mathfrak{N}})$ est une représentation finie et continue de (Ω, G), nous avons donc le

Lemme. 1. *Toute reprèsentation finie et continue d'un fiot topologique (Ω, G) correspood à un èlèment $\mathfrak{N}$ de dimension finie de $\boldsymbol{L}(U_{\Omega, G})$ comme on a considèrè plus haut, et l'inverse de cette proposition est aussi vrai. Quand elle correspond à $\mathfrak{N}$, nons dirons qu'elle appertient à $\mathfrak{N}$.*

Corollaire. *Quand un élément $\mathfrak{N}$ de $L(U_{\Omega,G})$ est de dimensions finies, nous avons*

$$\mathfrak{N} \leqq C_{\Omega}^{*} \tag{5.10}$$

et donc toute élément appartenu à $\mathfrak{N}$ est presque-périodiqne sur Ω.

6. Puis, nous considénous deux représentations (Ω_f, D) et (Ω_g, E) finies, continues et appertenues à un même élément $\mathfrak{N}$ de $L(U_{\Omega,G})$. Pour $f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ et $g(\omega) = (g_1(\omega), g_2(\omega), \ldots, g_n(\omega))$, il existe une matrice $A = (a_{ij})$ des constantes telle qu'on ait

$$g_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} f_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.1}$$

c'est-à-dire,

$$g = Af. \tag{6.2}$$

Or, nous avons pour $D_f(\sigma) = (d_{ij}(\sigma))$ et $E_g(\sigma) = (e_{ij}(\sigma))$

$$\begin{aligned} g_k\sigma &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} f_j \sigma = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{kj} n_{ji}(\sigma) f_i, \\ g_k\sigma &= \sum_{j=1}^{n} e_{kj}(\sigma)\, g_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} e_{kj}(\sigma)\, a_{ji} f_i, \end{aligned} \tag{6.3}$$

et d'où

$$AD_f(\sigma) = H_g(\sigma)\, A, \tag{6.4}$$

c'est-à-dire,

$$E = ADA^{-1}. \tag{6.5}$$

Par conséquent, (Ω_g, E) est donné par (Ω_{Af}, ADA^{-1}). De plus, l'inverse de ce fait est aussi vrai. Ici, nous posons une définition suivante; s'il existe une appliquation linéaire A sur R telle qu'on ait (6.2) et (6.5), nous dirons que deux raprésentations finies sont *équivalentes* l'une à l'autre. Nous avons alors le

Théorème 5. *Pour que deux représentations fines et continues de (Ω, G) soient éqnivalentes l'une à l'autre, il faut et il saffit qu'elles appartiennent au même élément de $L(U_{\Omega,G})$.*

Maintenant, nous désignons par $L^*(U_{\Omega,G})$ l'ensemble de tous les éléments de dimensions finies de $L(U_{\Omega,G})$. Il est une structure et toute représentation finie et continue de (Ω, G) corespond à quelque élément de $L^*(U_{\Omega,G})$. Nous désignons par $C_{\mathfrak{N}}$ la class des représentations appartenue à $\mathfrak{N}$.

7. Chaque élément $\mathfrak{N}$ de $\boldsymbol{L}^*(U_{\Omega,G})$ appartient aussi à $\boldsymbol{L}(N_{\Omega,G})$, et d'où le

$$U_\sigma^{\mathfrak{N}} = V_\sigma^{\mathfrak{N}}. \tag{7.1}$$

Par suite, nous avons le

Théorème 6. *Toute représentation finie et continue d'un flot topologique est équivalente à celle finie et unitaire de celui-la.*

D'après la définition, $\boldsymbol{L}^*(U_{\Omega,G})$ est une sous-structure de $L(V_{\Omega,G})$ et donc elle est ortho-complémentaire. Or, pour éclaircir en detail ce fait, nous posons quelques définitions. Etant donnés deux éléments $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ de $\boldsymbol{L}^*(U_{\Omega,G})$ tel qu'on ait $\mathfrak{N}_1 \perp \mathfrak{N}_2$, nous prenons deux représentations (Ω_{f1}, D_1) et (Ω_{f2}, D_2) finies et continue de (Ω, D) qui appartiennent à $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ respectivement. Quand nous posons $f_1 = f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1m}), f_2 = (f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n})$,

$$f = (f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1m}, f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n}), \tag{7.2}$$

$$D(\sigma) = D_1(\sigma) \oplus D_2(\sigma), \tag{7.3}$$

let flot topologique (Ω_f, D) est une représentation finie et continue de (Ω, G) et il appartient à $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$. Nous le désignons par

$$(\Omega_{f_1} \oplus \Omega_{f_2}, D_1 \oplus D_2) \tag{7.4}$$

et nous l'appelons la *somme directe* de (Ω_{f_1}, D_1) et (Ω_{f_2}, D_2). De plus, nous désignons par $C_{\mathfrak{N}_1} \oplus C_{\mathfrak{N}_2}$ la class de telles sommes directes. Nous avons alors

$$C_{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} = C_{\mathfrak{N}_1} \oplus C_{\mathfrak{N}_2}. \tag{7.5}$$

Puis, quand une représentation finie et continue de (Ω, G) est une somme directe de quelque deux représentations de (Ω, G), nous dirons qu'elle est *complètement réductible* et sinon, qu'elle est *irréductible*.

Théorème 7. *Pour qu'unereprésentation finie et continue d'un flot topologique soit irréductible, il faut et il suffit que l'élément de* $\boldsymbol{L}^*(U_{\Omega,G})$ *auquel elle appartient soit atomique.*

Théorème 8. *Pour qu'une représentation* (Ω_f, D) *finie et continue d'un flot topologique soil irréductible, il faut el il suffit que D soit irréductible.*

Comme chaque élément $\mathfrak{N}$ de $\boldsymbol{L}^*(U_{\Omega,G})$ est de dimensions finies. Nous pouvons le décomposer en le nombre fini des éléments atomiques

$\mathfrak{N}_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ de $L^*(U_{\Omega,G})$ tels que $i \neq j$ entraine $\mathfrak{N}_i \perp \mathfrak{N}_j$ et et donc nous avons

$$C\mathfrak{N} = C\mathfrak{N}_1 \oplus C\mathfrak{N}_2 \oplus \ldots \oplus C\mathfrak{N}_n. \tag{7.6}$$

D'où, nous avons le

Théorème 9. *Toute reprèsentatson finie et continue d'un fiot topologique est une somme directe d'un nombre fini de celles irrèductibles.*

8. Puis, nous envisageons les représentotions irréductibles de (Ω, G). Pour cela, nous introduissons ici la notion du type dimensionnel entre les éléments de $L^*(U_{\Omega,G})$ suivant de l'ideé de MM. J. v. Neumann et F. J. Murray.[1] Quand deux éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $L^*(U_{\Omega,G})$ sont du même type dimensionnel, nous désignons ce fait par $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ et nous dirons qu'ils sont *èquivalents* l'un à l'autre.

Or, quand deux éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ atomiques de $L^*(U_{\Omega,G})$ sont èquivalents l'un à l'autre, il existe un opératur X du commutateur de $N_{\Omega,G}$ tel qu'on ait $X\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ et pour une base $\{f_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ de $\mathfrak{M}$, $\{Xf_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ est celle de $\mathfrak{N}$. Donc, nous avons avons pour $(U_G^{\mathfrak{M}})_f = (d_{kj}(\sigma))$

$$U_\sigma X f_k = XU_\sigma f_k = X\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(\sigma) f_j = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(\sigma)\, X_j f,$$

et d'où

$$(U_G^{\mathfrak{M}})_f = (U_G^{\mathfrak{N}})_{Xf}, \tag{8.1}$$

c'est-à-dire, $U_G^{\mathfrak{M}}$ et $U_G^{\mathfrak{N}}$ sont èquivalents l'un à l'autre. D'ailleurs, l'inverse de ce fait est aussi vrai. Donc, nous avons le

Théorème 10. *Soient (Ω_{f_1}, D_1) et (Ω_{f_2}, D_2) deux repèsentations finies continues et irrèductibles de (Ω, G) qui appartiennent à respectivement $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$. Pour que D_1 et D_2 soient èquivalents l'un à l'autre, il faut et il suffit que $\mathfrak{N}_1$, et $\mathfrak{N}_2$ soient èquivalents l'un à l'autre.*

9. Comme on dit dans le théorème 10, la classification des représentations finies et continues d'un flot topologique par rapport aux groupes qui définissent ces représentations correspond à la classification des éléments de $L^*(U_{\Omega,G})$ au point de vue d'équivalence dimensionnelle. Or, quand il existe deux éléments atomiques de $L^*(U_{\Omega,G})$ qui ne sont pas èquivalents l'un à l'autre, $N_{\Omega,G}$ est réduc-

1) J. v. Neumann et F. J. Murray, Or rings of operators. Ann. Math., 37 (1936).

tible.[1] Donc, pour la décomposition en la somme directe de $\mathfrak{H}_\Omega$ et $N_{\Omega,G}$, nous avons

$$\mathfrak{H}_\Omega = \sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus\mathfrak{H}_{\Omega,\lambda}, \tag{9.1}$$

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus f_\lambda \quad (f\in\mathfrak{H}_\Omega \text{ et } f_\lambda\in\mathfrak{H}_{\Omega,\lambda}), \tag{9.2}$$

$$N_{\Omega,G} = \sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus N_{\Omega,G,\lambda}, \tag{9.3}$$

$$A = \sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus A_\lambda \quad (A\in N_{\Omega,G} \text{ et } A_\lambda\in N_{\Omega,G,\lambda}), \tag{9.4}$$

où Λ est un espace topologique et bicompact sur lequel une mesure $m(X)$ totalement additive est donnée[2].

Or, pour un élément atomique $\mathfrak{N}$ de $L^*(U_{\Omega,G})$, il existe précisément μ de Λ tel qu'on ait

$$m((\mu)) > 0, \tag{9.5}$$

$$\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{H}_{\Omega,\mu}\oplus\sum_{\substack{\lambda\neq\mu\\ \lambda\in\Lambda}}\oplus O_\lambda. \tag{9.6}$$

Maintenant, nous désignons par Λ^* l'ensemble de tous les éléments μ de Λ qu'il existe un élément atomique $\mathfrak{N}$ de $L^*(U_{\Omega,G})$ qui remplit (9.5), et nous posons

$$\mathfrak{H}^*_{\Omega,\mu} = \mathfrak{H}_{\Omega,\mu}\oplus\sum_{\substack{\lambda\neq\mu\\ \lambda\in\Lambda}}\oplus O_\lambda \ (\mu\in\Lambda^*), \tag{9.7}$$

$$\mathfrak{H}^*_\Omega = \sum_{\mu\in\Lambda^*}\oplus\mathfrak{H}^*_{\Omega,\mu}. \tag{9.8}$$

Nous avons alors

$$\mathfrak{H}^*_{\Omega,\lambda}\perp\mathfrak{H}^*_{\Omega,\mu} \quad (\lambda, \mu\in\Lambda^*, \lambda\neq\mu) \tag{9.9}$$

et donc, pour deux éléments $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ atomiques de $L^*(U_{\Omega,G})$ qui ne sont pas équivalents l'un a l'autre, nous avons

$$\mathfrak{N}_1\perp\mathfrak{N}_2. \tag{9.10}$$

10. Or, quand nous avons $\mathfrak{H}^*_\Omega = \mathfrak{H}_\Omega$, nous dirons qu'un flot topologique (Ω, G) est *presque-périodique*. Nous avons alors

---

1) J. v. Neumann et F. J. Murray, loc. cit.

2) M. Kondô, Sur les sommes directes des espaces linéaires, Proc. Imp. Acad., **20** (1944).

M. Kondô, Sur la réductibilité des anneaux des opérateurs, Proc. Imp. Acad. **20** (1944).

Théorème 11. *Pour qu'un flot topologique* (Ω, G) *est presque-périodique, il faut et il suffit que, quelques soient les deux éléments* ω_1, *et* ω_2 *distincts de* Ω, *il existe une représentation* (Ω_f, D) *finie et continue de* (Ω, G) *telle qu'on ait* $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$.

Corollaire. *Quand un flot topologique* (Ω, G) *est presque-périodique,* G *est presque-périodique maximalement.*