62. *Détermination unique de solution de l'équation intégrale de Volterra*

Par Tokui SATŌ.

(Comm. by K. KUNUGI M.J.A., June 12, 1951.)

Dans la théorie analytique de l'équation différentielle, le théorème[1] de la détermination unique de solution (le théorème de M. Picard) est fondamentalement important. On peut le généraliser dans le cas de l'équation intégrale de Volterra.

Soient D et $\mathfrak{D}$ des domaines respectivement dans le plan x et dans le (t, u)-espace.

Soit C une courbe joignant deux points a et x_0 dans D $(a, x_0 \in D)$ qui satisfait à la condition suivante: quelque petit que soit r, il existe sur C un point x_1 tel que, à partir de x_1, la courbe C ne sorte plus du cercle de x_0 et de rayon r.

Pour simplifier l'écriture, désignons par C la courbe excepté x_0, par $\bar{C}$ la courbe comprise x_0 et par $\widehat{ax_1}$ l'arc de C de a à x_1.

Théorème. *Soient $f(x)$ et $K(x, t, u)$ régulières analytiquement respectivement dans D et dans $|x-a| < l$, $(t, u) \in \mathfrak{D}$, où l est la borne supérieure de $|t-a|$ pour $(t, u) \in \mathfrak{D}$.*

Si l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t))dt \qquad (x, t \in C) \tag{1}$$

admet une solution régulière $u = u(x)$ sur C, et le point (x_0, u_0) appartient à $\mathfrak{D}$, où u_0 est une valeur de l'ensemble des valeurs limites de $u = u(x)$ pour $x \to x_0$, $x \in C$, $u = u(x)$ est régulière au point x_0.

Par hypothèse on peut prendre r, ρ de manière que $|x-x_0| \leqq r$ et $|t-x_0| \leqq r$, $|u-u_0| \leqq \rho$ soient contenus respectivement dans D et dans $\mathfrak{D}$. Par conséquent on a une constante positive M telle que

$$\begin{array}{lll} |K(x, t, u(t))| \leqq M & x \in \bar{C}, \quad t \in \widehat{ax_1}, & \\ |K(x, t, u)| \leqq M & x \in \bar{C}, \quad |t-x_0| \leqq r, & |u-u_0| \leqq \rho, \\ |K(x, t, u)| \leqq M & |x-x_0| \leqq r, \quad |t-x_0| \leqq r, & |u-u_0| \leqq \rho. \end{array}$$

Par hypothèse on peut prendre une suite de points x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ tels que $|x_\nu - x_0| \downarrow 0$, $|u(x_\nu) - u_0| \to 0$. Sans perdre la généralité on peut supposer que $|x_\nu - x_0| < r$, $|u(x_\nu) - u_0| < \rho$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Désignons par C_ν la courbe qui consiste de l'arc $\widehat{ax_\nu}$ de la courbe C et du segment $\overline{x_\nu x_0}$.

1) E. Picard, Traité d'analyse (deuxième édit.) II, 355.

Posons

$$v_\nu(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \widehat{ax_\nu}\,, \\ \dfrac{x-x_\nu}{x_0-x_\nu}u_0 + \dfrac{x_0-x}{x_0-x_\nu}u(x_\nu) & x \in \overline{x_\nu x_0}\,, \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$v_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sont donc continues sur C_ν et

$$|v_\nu(x) - u_0| < \rho \qquad x \in \overline{x_\nu x_0}\,.$$

Définissions $\bar{u}_\nu(x)$ par l'égalité

$$\bar{u}_\nu(x) = f(x) + \int_{C_\nu} K(x, t, v_\nu(t))dt\,,$$

alors $\bar{u}_\nu(x)$ est régulière sur $\bar{C}$, et

$$|\bar{u}_\nu(x_\nu) - u(x_\nu)| = \left|\int_{x_\nu}^{x} K(x_\nu, t, v_\nu(t))dt\right| \leqq M|x_\nu - x_0|\,,$$

$$|\bar{u}_{\nu+p}(x) - \bar{u}_\nu(x)| \leqq 2M|x_\nu - x_0| \qquad (p \geq 1)\,.$$

On peut en conclure que la suite des fonctions $\{\bar{u}_\nu(x)\}$ se converge uniformément sur $\bar{C}$. Soit $\bar{u}(x)$ la fonction limite, $\bar{u}(x)$ est donc régulière sur $\bar{C}$ et $\bar{u}(x_0) = u_0$. Par suite on peut prendre $\bar{r}$ tel que

$$|\bar{u}(x) - u_0| < \rho/2 \qquad \text{pour} \quad |x - x_0| < \bar{r}\,,$$

$$0 < \bar{r} \leqq \min\{r, l - |x_0 - a|\}\,.$$

$K(x, t, u)$ est donc régulière dans $|x-x_0|<\bar{r}$, $|t-x_0|<\bar{r}$, $|u-\bar{u}(x)|<\bar{\rho}$, où $0<\bar{\rho}\leqq\rho/2$. Cela posé, on peut prendre un entier N tel que

$$|x_\nu - x_0| < \min\{\sigma\bar{r}, \sigma\bar{\rho}/M\} \qquad \text{pour} \quad \nu \geq N\,,$$

où σ est une constante positive moindre que 1.

Posons

$$f_\nu(x) = f(x) + \int_a^{x_\nu} K(x, t, \bar{u}(t))dt \qquad (t \in C)\,,$$

alors $f_\nu(x)$ $(\nu \geq N)$ sont régulières dans $|x - x_\nu| < (1-\sigma)\bar{r}$ et on a

$$|f_\nu(x) - \bar{u}(x)| = \left|\int_{x_\nu}^{x_0} K(x, t, \bar{u}(t))dt\right|$$

$$< M|x_\nu - x_0| < \sigma\bar{\rho} \qquad (\nu \geq N)\,.$$

$K(x, t, u)$ est donc régulière et $|K(x, t, u)| \leqq M$ dans $|x - x_\nu| < (1-\sigma)\bar{r}$, $|t - x_\nu| < (1-\sigma)\bar{r}$, $|u - f_\nu(x)| < (1-\sigma)\bar{\rho}$ $(\nu \geq N)$.

Par le théorème d'existence l'équation intégrale

$$u(x) = f_\nu(x) + \int_{x_\nu}^{x} K(x, t, u(t))dt \qquad (x, t \in C) \tag{2}$$

admet une seule solution régulière $u = u(x)$ dans $|x - x_\nu| < \min\{(1-\sigma)\bar{r},\ (1-\sigma)\bar{\rho}/M\}$.

Prenant σ assez petit, on obtenit

$$\min\{(1-\sigma)\bar{r},\ (1-\sigma)\bar{\rho}/M\} > 2\sigma\bar{r}\,.$$

La solution $u = u(x)$ de l'équation intégrale (2) est régulière dans $|x-x_\nu| < 2\sigma\bar{r}$ et donc aussi dans $|x-x_0| < \sigma\bar{r}$. Par le prolongement de la solution, cette solution est celle de l'équation intégrale (1), C.Q.F.D.