57. *Ein Satz über die Abelschen Gruppen mit Operatoren.*

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Universität zu Osaka.
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 13, 1952.)

Es sei Ω eine Erweiterung einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ mit einem Operatorring Γ. Γ besitze das Einselement 1, das den identischen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ bewirkt. Ein Element a aus Ω heisst *algebraisch*[1] über $\mathfrak{A}$, wenn die durch $\mathfrak{A}$ und a erzeugte Gruppe $\mathfrak{A}(a)$ keine Untergruppe $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$ besitzt. Die Gesamtheit von m aus Γ mit $ma\in\mathfrak{A}$ bildet ein Linksideal $\mathfrak{m}$ von Γ, die Ordnung von a bezüglich $\mathfrak{A}$. Die Gleichung $ma=a\in\mathfrak{A}$ bedeutet einen Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{A}$, der mit $\theta(\mathfrak{m})$ bezeichnet wird.

Hilfssatz 1. Ein Element a aus Ω ist dann und nur dann algebraisch über A, wenn man den zugehörigen Homomorphismus $\theta(\mathfrak{m})$ nicht erweitern kann.

Ist nämlich $\theta(\mathfrak{n})$ eine Erweiterung von $\theta(\mathfrak{m})$, der $n\in\mathfrak{n}$ auf $a\in\mathfrak{A}$ abbildet, so bilden die Elemente $na-a$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}(a)$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$. Umgekehrt sei $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}(a)$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$. Dann besteht $\mathfrak{B}$ aus den Elementen $na-a$ und die Abbildung $n\rightarrow a$ ist eine Erweiterung von $\theta(\mathfrak{m})$.

Eine Erweiterung Ω heisst algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn jedes Element aus Ω algebraisch über A ist. Dann beweist man leicht.

Hilfssatz 2. Sind $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{A}''$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$.

Zwei Erweiterungen heissen *äquivalent* über $\mathfrak{A}$, wenn sie durch die $\mathfrak{A}$ elementweise festlassenden Isomorphismen aufeinander abgebildet werden.

Satz. *Jede algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist mit keiner echten Untergruppe äquivalent, wenn man voraussetzt*[2]*:* 1) *Teilerkettensatz für Linksideale in* Γ, 2) *Jeder Operatorhomomorphismus* $\bar{\sigma}$ *eines Linksideals* $\bar{\mathfrak{m}}$ *in einem Restklassenmodul* $\bar{\Gamma}=\Gamma/\mathfrak{l}$ *nach einem Linksideal* $\mathfrak{l}$ *wird durch die Abbildung* σ *von* m *induziert, die* m *aus* $\mathfrak{m}$ *in* mt_σ *überführt. Dabei bedeutet* t_σ *ein Element aus* Γ.

---

1) Diese Definition des algebraischen Elementes und die nachfolgende zwei Hilfssätze entnehmen wir aus der Arbeit: K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, erscheint demnächst in Osaka Math. Journal Bd. 4.

2) Gilt der Vielfachenkettensatz für Rechts- und Linksideale, so ist die Bedingung 2) für $\mathfrak{l}=0$ bzw. für zweiseitigen $\mathfrak{l}$ damit äquivalent, dass Γ ein quasi-Frobeniusscher bzw. einreihiger Ring ist. Vgl. M. Ikeda, A characterization of quasi-Frobenius rings, erscheint demnächst in Osaka Math. Journal Bd. 4.

Beweis: Es sei Ω eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ und φ sei eine äquivalente Abbildung, die Ω in eine echte Untergruppe $\Omega\varphi$ überführt. Dann erhält man eine Reihe der unendlichvielen äquivalenten Erweiterungen

$$\Omega \supset \Omega\varphi \supset \Omega\varphi^2 \supset \dots .$$

Ist α ein Element aus Ω, das in $\Omega\varphi$ nicht enthalten ist, so sind α, $\alpha\varphi, \dots$ unendlichviele voneinander verschiedene Elemente, deren zugehörigen Operatorhomorphismen $\theta(\mathfrak{m})$ übereinstimmen. Die Ordnung $\mathfrak{m}_1$ bzw. $\mathfrak{m}_1'$ von α bzw. $\alpha\varphi$ bezüglich $\mathfrak{A}(\alpha\varphi)$ bzw. $\mathfrak{A}(\alpha)$ besteht aus den Lösungen m bzw. m' von

$$m\alpha \equiv m'\alpha\varphi \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{A})$$

und $\mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1' \supseteq \mathfrak{m}$. Ist

$$m\alpha = m'\alpha\varphi + \gamma\ , \qquad \gamma \in \mathfrak{A}\ ,$$

so ist

$$m\alpha\varphi = m'\alpha\varphi^2 + \gamma\ , \quad m\alpha(1-\varphi) = m'\alpha(1-\varphi)\varphi\ ,$$

da φ eine äquivalente, also die Elemente aus $\mathfrak{A}$ festlassende Abbildung ist. Bezeichnet man die Linksideale der Lösungen m, m' von

$$m\alpha(1-\varphi) \equiv m'\alpha(1-\varphi)\varphi \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{A})$$

mit $\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2'$, so sind $\mathfrak{m}_2 \supseteq \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2' \supseteq \mathfrak{m}_1'$, Wenn man analog vorgeht, so erhält man nach dem Teilerkettensatz schliesslich $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{i-1}$, $\mathfrak{m}_i' = \mathfrak{m}_{i-1}'$. D.h. die beiden Kongruenzen

$$m\alpha(1-\varphi)^{i-1} \equiv m'\alpha(1-\varphi)^{i-1}\varphi,\ m\alpha(1-\varphi)^i \equiv m'\alpha(1-\varphi)^i\varphi \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{A})$$

haben dieselben Lösungen m, m'. Ist aber

$$m\alpha(1-\varphi)^{i-1} = m'\alpha(1-\varphi)^{i-1}\varphi + \gamma$$

so ist

$$m\alpha(1-\varphi)^{i-1}\varphi = m'\alpha(1-\varphi)^{i-1}\varphi^2 + \gamma\ , \quad m\alpha(1-\varphi)^i = m'\alpha(1-\varphi)^i\varphi$$

Die Abbildung von m auf m' induziert ersichtlich einen Operatorisomorphismus von $\overline{\mathfrak{m}_i}$ auf $\overline{\mathfrak{m}_i'}$ im Restklassenmodul $\Gamma/\mathfrak{m}^*$, wo $\mathfrak{m}^*$ die Ordnung von $\alpha(1-\varphi)^i$, also von $\alpha(1-\varphi)^i\varphi$ ist. Nach der Voraussetzung 2) ist dann $m_i' \equiv m_i t$ (mod $\mathfrak{m}^*$) mit einem festen t. Daher ist $\alpha(1-\varphi)^i$ nach Hilfssatz 1 nicht algebraisch über $\mathfrak{A}(t\alpha(1-\varphi)^i\varphi)$ gegen der Voraussetzung, dass $\alpha(1-\varphi)^i$ algebraisch über $\mathfrak{A}$, also nach Hilfssatz 2 über $\mathfrak{A}(t\alpha(1-\varphi)^i\varphi)$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.