22. Über die Grundlagen der Mathematik

(Dritte Mitteilung)*

Von Zyoiti SUETUNA, M.J.A.

(Comm. March 12, 1953)

Um unendlich viele Elemente zu einem Ganzen zusammenzufassen und somit als eine mathematische Existenz zu betrachten, muss es einen dazu hinreichenden Grund geben. Der Totalität von den natürlichen Zahlen liegt unser wiederholtes Addieren von 1 zugrunde. Durch die durch diese Taten bewirkte Anschauung wird die Totalität von den natürlichen Zahlen, wie ich in den früheren Mitteilungen erörtert habe, als ein mathematischer Gegenstand geformt und erfasst. Das lineare Kontinuum wird durch die durch unsere eigene Bewegung bewirkte Anschauung als ein adäquater mathematischer Gegenstand geformt und erfasst. Der Begriff der Totalität von den reellen Zahlen ergibt sich durch Arithmetisierung mittels z. B. unendlicher Dezimalbrüche aus diesem linearen Kontinuum. Um unendlich viele Elemente als einen adäquaten mathematischen Gegenstand zu betrachten, muss zunächst unsere diese Totalität bewerkstelligende Tat uns klar sein und somit muss die Totalität durch unsere durch diese Tat bewirkte Anschauung als mathematischer Gegenstand begreifbar sein. Ich möchte nur eine auf solche Weise erfasste Totalität eine *Menge* nennen. Bezüglich einer Menge gibt es also darin das beliebig-allgemeine (konkret-allgemeine) Element, welches alle Elemente der Menge darstellt und wodurch die Totalität der Elemente der Menge erfasst wird. Deshalb hat das Wort „alle Elemente" einer Menge einen wohlbestimmten (mathematischen) Sinn. In Bezug auf die Tat, welche eine Menge aus deren Elementen bewerkstelligt, ist die Menge zeitlich *werdend,* und in Bezug auf die durch Tat bewirkte Anschauung, welche eine Menge tatsächlich als einen mathematischen Gegenstand erfasst, ist die Menge räumlich *seiend.* Derjenige Satz des ausgeschlossenen Dritten bezüglich einer Aussage, die für alle Elemente der Menge richtig oder falsch ist, dass entweder diese Aussage für alle Elemente der Menge richtig ist oder es gibt mindestens ein solches Element der Menge, für welches diese Aussage falsch ist, gilt ja deshalb, weil die Menge tatsächlich als seiend nicht nur als werdend gedacht wird.

* Z. Suetuna, „Über die Grundlagen der Mathematik", I: J. Math. Soc. Japan, **3** (1951) (Takagi Commemoration Number), 59-68, und II: Proc. Japan Acad., **27** (1951), 389-392. Vergl. ferner mein inzwischen erschienenes Buch „Sūgaku no Kiso" (Grundlagen der Mathematik). Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt: Die Funktionswerte $f(x_n)$ (Z. 7, S. 391 in der zweiten Mitteilung) sollen natürlich eine Folge in unserem Sinne bilden.

In der heutigen Mathematik gebraucht man das Wort „alle" leider allzu leicht. Z.B. spricht man allzu oft von „allen Aussagen". Solche Worte versteht man im alltäglichen Leben in einem passenden Sinne. Sie haben trotzdem als mathematische Worte keinen wohlbestimmten Sinn. Aber zwischen den als Mengen wohlbestimmten Totalitäten und den Gesamtheiten ohne wirklichen mathematischen Sinn gibt es in der Mathematik noch gewisse Gegenstände, die man nicht ausser acht lassen darf. Nun denken wir uns also eine Menge M und x sei das beliebig-allgemeine Element von M, d. h. x bezeichne die Variable, welche die Elemente von M durchläuft. Wenn der korrespondierende Wert von y für *alle* Werte von x aus M eindeutig bestimmt wird, dann soll y eine *Funktion* von x heissen, wie ich in der zweiten Mitteilung dargelegt habe. Wenn z. B. $a<b$ ist, so bilden alle dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ angehörigen Zahlen sicherlich eine Menge in unserem Sinne. Wird also der korrespondierende Wert von y für alle Werte von x in diesem Intervall eindeutig bestimmt, so ist y eine Funktion von x. In diesem Fall sind die meisten Mathematiker vermutlich nicht dagegen, dass man sich „die Totalität aller Werte von y" als mathematischen Gegenstand denkt. Ist hierbei y eine stetige Funktion von x, so bilden alle Werte von y bekanntlich ein abgeschlossenes Intervall, was natürlich eine Menge in unserem Sinne ist. Falls aber wir nichts weiter wissen als dass y eine Funktion von x ist, dann wissen wir auch nicht, ob die Totalität aller Werte von y eine Menge sei. Dass in den meisten Lehrbüchern der Mathematik „Funktion" und „Zuordnung" als synonym erklärt werden, ist leider nicht richtig. Das Wesen des Begriffs der Funktion besteht in der *Bestimmbarkeit*, nicht in der Totalität, aller korrespondierenden Werte. Um dies uns klar zu machen, denken wir uns nunmehr den Begriff der Ableitung. Einfachheitshalber sei y eine (stetige) Funktion von x im Intervall $a<x<b$. Wenn y in einer beliebig-bestimmten Stelle des Intervalls differenzierbar ist, so ist y in *allen* Stellen des Intervalls differenzierbar. Denn als Funktion ist y in *allen* Stellen des Intervalls definiert, sodass wir nun denjenigen Satz des ausgeschlossenen Dritten anzuerkennen haben, dass y entweder in allen Stellen des Intervalls differenzierbar oder mindestens in einer Stelle des Intervalls nicht differenzierbar ist. Deshalb ist y in allen Stellen des Intervalls differenzierbar, falls y in einer beliebig-bestimmten Stelle des Intervalls differenzierbar ist. Somit lässt sich der Begriff der Ableitung (als Funktion) einführen, wie schon am Ende der zweiten Mitteilung gezeigt wurde. Über die tatsächlichen Werte der Ableitung wissen wir trotzdem leider noch nichts. Es ist damit nicht verwunderlich, dass wir bis heute über unstetige Funktionen wirklich gar wenig wissen.

Also bedeutet eine Funktion die Bestimmbarkeit aller korrespondierenden Werte. Aber eine Menge ist die aus deren Elementen durch unsere Tat bewerkstelligte Totalität, welche durch die durch diese Tat bewirkte Anschauung als mathematischer Gegenstand erfasst wird. Bezüglich der Totalität der Funktionswerte weiss man im allgemeinen nicht, wie sie aus ihren Elementen konstruiert sei, sodass die Totalität der Funktionswerte im allgemeinen keine Menge in unserem Sinne ist. Dennoch muss diese Totalität der Funktionswerte wirklich als *seiend* betrachtet werden. Wenn also jeder Wert einer Funktion y von x einer Menge angehört und eine Aussage für alle Elemente dieser Menge richtig oder falsch ist, so gilt derjenige Satz des ausgeschlossenen Dritten bezüglich dieser Aussage, dass entweder diese Aussage für die allen in Betracht kommenden x korrespondierenden Werte von y richtig ist oder es gibt mindestens einen derartigen Wert von x, dass unsere Aussage für den solchem Wert von x korrespondierenden Wert von y falsch ist. Dass solcher Satz des ausgeschlossenen Dritten gilt, ergibt sich nicht bloss aus der Logik oder Tat. Es muss in jedem konkreten Fall durch unsere durch Tat bewirkte Anschauung klar erschaut und entschieden werden.*

Nunmehr denken wir uns eine Menge und eine wohlbestimmte Eigenschaft, welche jedem Elemente dieser Menge entweder zukommt oder nicht. Wenn wir uns ferner diejenigen Elemente der Menge, denen diese Eigenschaft zukommt, zu einem Ganzen zusammengefasst denken, so braucht die somit entstehende Totalität keinesfalls, wenn auch sie als seiend nicht nur als werdend gedacht werden kann, eine Menge zu sein. Die Totalität von den rationalen Zahlen lässt sich natürlich als eine Menge betrachtet werden. Aber die Totalität von den irrationalen Zahlen ist keine Menge (in unserem Sinne), weil diese Totalität durch diejenige Anschauung, welche durch die diese Totalität aus deren Elementen bewerkstelligende Tat bewirkt ist, nicht erfasst wird. Die Totalität von den (reellen) algebraischen Zahlen kann auf wohlbekannte Weise auch als eine Menge betrachtet werden. Aber die Totalität von den nicht-algebraischen d. h. transzendenten Zahlen ist ebenso, wie die von den irrationalen Zahlen, keine Menge. Um von „allen Elementen" solcher Totalitäten, welche keine Mengen sind, zu sprechen, müssen wir recht vorsichtig sein. Es sei M' eine echte Teilmenge einer gegebenen Menge M und M^* die Totalität derjenigen Elemente von M, die nicht in M' enthalten sind. Falls alsdann eine Aussage für alle Elemente von M entweder richtig oder falsch ist, so ist die Aussage sicherlich richtig oder falsch für *alle* Elemente von M^*. Ich behaupte : anders können wir uns nicht denken. Da wir uns die

* Ist y keine Funktion in unserem Sinne, sondern eine in der zweiten Mitteilung sogenannte Pseudofunktion, so kann die „Totalität" der Werte von y nicht als seiend gedacht werden.

Totalität von den reellen Zahlen als die mit der Totalität von den natürlichen Zahlen zusammen die ganze Mathematik tragende Menge denken, so gilt z. B. die Behauptung: *alle* irrationalen Zahlen lassen sich durch (unendliche) nicht-periodische Dezimalbrüche darstellen. Falls nun y gleich

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für alle rationalen } x,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

ist, so ist damit y definiert für *alle* Werte von x, folglich eine Funktion in unserem Sinne. Eine logische Konsequenz, die sich aus demjenigen Tatbestand ergibt, dass eine als seiend denkbare Totalität M^* durch Aussonderung der Elemente aus der Menge M von einer bestimmten Eigenschaft besteht, gilt natürlich für *alle* Elemente von M^*.

Wenn wir die Menge in unserem strikten Sinne verstehen, so gelten das Axiom der *Ersetzung* und das der *Aussonderung* im allgemeinen nicht, wie oben dargelegt ist. Das Axiom der *Potenzmenge* gilt im allgemeinen auch nicht, weil wir alle Teilmengen einer Menge durch unsere durch Tat bewirkte Anschauung nicht erfassen kann. Wir wissen zwar gar nicht, was für eine Tat von uns solche Totalität bewerkstelligen könnte. Aber hierbei sei erwähnt: Für eine abzählbare Menge dürfen wir uns deren Potenzmenge als existierend denken. Denn jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist darstellbar durch einen (dyadischen) Dezimalbruch zwischen 0 und 1. Das Axiom der *Vereinigung* gilt im allgemeinen auch nicht. Denn einer Menge muss unsere Tat zugrunde liegen, durch welche viele Elemente zu einer Totalität bewerkstelligt werden. Die Menge hat deshalb in gewissem Sinne eine eigene Ordnung zwischen den Elementen, obzwar sie natürlich nicht eindimensional oder zweidimensional zu sein braucht. Eine Menge ohne irgendwelche Ordnung ist ein Begriff, der aus einer konkreten Menge mit gewisser Ordnung abstrahiert ist.

Die Axiome der *Bestimmtheit* und der *Paarung* gelten natürlich auch für unsere Menge. Das des *Unendlichen* gilt auch, weil wir uns die Totalität von den natürlichen Zahlen als die fundamentalste Menge der Mathematik denken. Dass das Axiom der *Auswahl*: ist M eine Menge, deren Elemente sämtlich mindestens je ein Element enthalten und überdies paarweise elementefremd sind, so existiert mindestens eine sogenannte Auswahlmenge, die mit jedem Element M_α von M gerade ein einziges Element gemein hat, aber keine anderen Elemente besitzt, auch gilt, habe ich schon in der zweiten Mitteilung dargelegt. Hier sei nur folgendes bemerkt: Falls die Elemente M_α von M nicht paarweise elementefremd sind, dann müssen wir, um zum Auswahlprinzip zu gelangen,* alle M_α durch diejenigen äquivalenten Mengen

* Vergl. etwa A. Fraenkel, „Einleitung in die Mengenlehre", 3. Aufl., S. 315.

ersetzen, welche paarweise elementefremd sind. Diese Ersetzung ist aber dann sicherlich möglich, wenn das Suffix α von M_{α} durch die reelle Zahl darstellbar ist.

Es ergibt sich hieraus, dass für die Menge in unserem Sinne gerade diejenigen Axiome nicht gelten, welche aus gegebenen Mengen eine wesentlich neue Menge entstehen lassen. Man sieht also schliesslich ein, dass die *Mathematik katexochen*, die mittels der Totalität von den natürlichen Zahlen und des linearen Kontinuums durch die durch Tat bewirkte Anschauung erfasst wird, tatsächlich ein abgeschlossenes System der mathematischen Erkenntnisse von anschauiich-inhaltlicher Bedeutung bildet.

Tokyo, den 25. Feb., 1953.