169. *Sur Quelques Ensembles Ordonnés Linéairement*

Par Tadashi OHKUMA

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Nov. 12, 1954)

1. Nous commençons par quelques définitions:

Un ensemble ordonné linéairement s'appellera une *chaîne*, et pour une chaîne E, le groupe d'automorphismes sur E par rapport à son ordre est désigné par $G(E)$. On dira qu'une chaîne E est *homogéne*, si le groupe $G(E)$ est transitif sur E. Voici encore la

Définition. *On dit qu'une chaîne E est homogêne uniquement, si, quelques soient a et b ses deux éléments, il existe seulement un automorphisme de $G(E)$ qu'applique a en b.*

2. La chaîne J de tous nombres entiers est évidemment homogéne uniquement. D'où, nous avons naturellement le probléme suivant:

Y a-t-il une chaîne homogéne uniquement qui n'est pas isomorphe à J?

Ce probléme sera resolu affirmativement, et alors encore la deuxieme question suivante serait suggerée:

Combien y a-t-il types distincts des chaînes homogênes uniquement?

La réponse y sera que la puissance de l'ensemble de tous tels types soit $2^{2^{\aleph_0}}$.

La but de cette note est d'informer resumement notre considération sur ces deux problémes, et les démonstrations détailées seront d'ici peu publiées ailleurs.

3. D'abord, on a le

Lemme 1. *Une chaîne E homogéne uniquement qui n'est pas isomorphe à J, pour peu qu'il existe l'une, est nécessairement isomorphe à une chaîne qui est un sous-groupe partout dense du groupe L additif ordonné linéairement de tous nombres réels.*

En effet, en fixant un élément a de E, on a une correspondance entre E et $G(E)$ tells qu'un élément x de E fasse correspondre à biunivoque l'automorphisme f de $G(E)$ qu'applique a en x, et de plus, quand $G(E)$ se regardera un groupe réticulé, la correspondance préservera ses ordres. Encore, l'unicité de la homogénéité de E entraine que $G(E)$ soit archimedien, et donc, au grâce du théorème bien connu,[1] on aura ce lemme.

4. En nous basant sur le lemme précédent, nous construirons une chaîne homogéne uniquement et non isomorphe à J dans L comme son sous-groupe partout dense.

1) Cf. 1) p. 226.

Si une chaîne H est partout dense dans L, chaque automorphisme de H pourra être étendu en un automorphisme de L, c'est-à-dire, une fonction sur L continue, croissante strictement, et non bornée en deux côtés. Nous dirons que telle fonction est automorphique. Alors, pour notre but, il suffit de construire une sous-groupe E partout dense de L, dont aucune fonction automorphique de L, sauf celles définies par translation, ne conduite un automorphisme.

5. La puissance de l'ensemble de toutes fonctions automorphiques, sauf celles définies par translations, est du continu, et donc ces fonctions peuvent être rangées en une suite bien ordonnée $\{f_\alpha\}$ $(\alpha < \eta)$ muni le type η du plus petit nombre ordinal de puissance du continu, par l'aide de l'axiome du choix. Alors, construissons deux suites $\{E_\alpha\}$ et $\{S_\alpha\}$ $(\alpha < \eta)$ des parties de L, par l'induction transfinie, en telle sorte que

1° chaque E_α soit un sous-groupe additif de L,

2° E_α et S_α ne s'intersectent intersectent pas,

3° quand α est infini, les puissances de E_α et S_α ne soient pas plus grand que celle de α,

4° pour nombre γ quelconque plus petit que α, il y ait t_γ de E_α qui est appliqué en S_α par f_γ ou bien par f_γ^{-1}.

6. Soient E_1 l'ensemble R du tous nombres rationels, et S_1 vide, et supposons que tous E_γ et S_γ $(\gamma < \alpha)$ soient définis pour α donné.

Quand α est limité, posons

$$E_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} E_\gamma, \qquad S_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} S_\gamma.$$

Puis, supposons que α soit isolé et $\alpha=\beta+1$.

D'après 3°, il y a $2^{2^{\aleph_0}}$ nombres x en dehors de E_β tel que le sous-groupe de L engendré par chacun x et E_β ne s'intersecte pas avec S_β, et alors on désignera par D_β l'ensemble de tous tels x.

Considérons les deux cas suivants:

Cas I. Il esiste un nombre t de D_β tel que $nt+a \neq f_\beta(t)$ pour tous nombres a de E_β et n de J.

Cas II. Pour tout nombre s de D_β, il y a nombres a de E_β et n de J tels que $ns+a=f_\beta(s)$.

7. En cas I, choisissons un nombre t de D_β muni cette propriété et posera $t_\beta=t$ et $s_\beta=f_\beta(t_\beta)$.

En cas II, il existe un nombre s de D_β tel que $ns+a=f_\beta(s)$ pour a quelque de E_β et n quelque de J dont la valeur absolue est plus grande que 1. En choissant tel s de D_β et posant $s_\beta=s$ et $t_\beta=f_\beta(s_\beta)$, on peut en outre montrer qu'aucuns nombres m de J et b de E_β ne satisfassent à l'égalité $s_\beta=mt_\beta+b$.

8. En deux cas on a eu un nombre t_β de D_β tel que l'égalité $f_\beta(t_\beta)=nt_\beta+a$ ou bien $f_\beta^{-1}(t_\beta)=nt_\beta+a$ ne soit remplit par aucuns n de J et a de E_β. Alors, définissons E_α comme la sous-groupe de L éngendré par E_β et t_β, et S_α comme l'ensemble obtenu en ajoutant s_β défini dans 7 à S_β.

Alors, en deux cas que α soit limité ou isolé, il sera montré que les ensembles E_α et S_α définis ainsi satisfassent aux suppositions 1°–4° sur l'induction.

Enfin posons $E=\bigcup_{\alpha<\eta} E_\alpha$ et $S=\bigcup_{\alpha<\eta} S_\alpha$. Alors pour fonction f quelconque automorphique, sauf celles définis par translations, il existe t de E appliqué en S par f ou bien par f^{-1} où S ne s'intersecte avec E, c'est-à-dire, f ne conduite aucun automorphisme de E, et donc E est une chaîne homogéne uniquement qui est évidemment non isomorphe à J. Ainsi on a le

Théorème I. *Il existe une chaîne homogéne uniquement qui n'est pas isomorphe à la chaîne J de tous nombres entiers.*

9. Ensuite, nous considérons sur le dernier probléme dans 2.

Maintenant, on construira une suite des sous-groupes A_α^i ($i=0,1$; $\alpha<\eta$) de L tels que

W$_1$) tous A_α^i soient indépendants comme éléments du réticulé de tous sous-groupes de L, c'est-à-dire, si les sous-famillies $\{B_\lambda\}$ et $\{B'_\mu\}$ de $\{A_\alpha^i\}$ sont disjointes, les sous-groupes de L éngendrés par $\bigcup B_\lambda$ et par $\bigcup B'_\mu$ respectivement s'intersectent seulement en point zéro,

W$_2$) soit $h_\beta(x)$ la fonction définie comme $f_\beta(x)-x$, alors l'image $h_\beta(A_\beta^i)=\{h_\beta(x)\,;\,x\in A_\beta^i\}$ soit de la puissance du continu.

Cette suite $\{A_\alpha^i\}$ peut être obtenue en définissant les générateurs de ces groupes A_α^i par l'induction transfinie.

10. Soit χ une fonction sur nombres ordinaux plus petits que η, dont les valeurs sont 0 ou bien 1. En la construction des suites $\{E_\alpha\}$ et $\{S_\alpha\}$, il est montré que on puisse faire le choix de t_β (en Cas I. cf. 7) ou de s_β (en Cas II) de parmi $A_\beta^{\chi(\beta)}$, et que la chaîne E^χ homogéne uniquement construite par la manière dans 5–8 avec cet choix de t_β ou bien s_β s'intersecte avec $A_\beta^{\chi(\beta)}$ au moin en deux points, et si i n'est pas $\chi(\beta)$, il s'intersecte avec A_β^i en le point zéro seulement.

Par conséquent, si χ et χ' sont distinctes, les chaînes E^χ et $E^{\chi'}$ qui sont ainsi construites par χ et χ' respectivement sont aussi distinctes (comme les parties de L!), et comme la puissance de l'ensemble de toutes telles fonctions χ est $2^{2^{\aleph_0}}$, il y a aussi $2^{2^{\aleph_0}}$ chaînes E^χ homogénes uniquement distinctes qui sont sous-groupes de L à la fois.

Toutefois, quelques E^{χ}'s peuvent être isomorphes, bien qu'ils soient distincts comme parties de L. Mais, pour chaque E^{χ}, l'ensemble de toutes chaînes E qui sont isomorphes à E^{χ} et sont à la fois sous-groupes de L est de la puissance du continu au plus, car il faut que pour toute telle chaîne E il existe quelque nombre u réel tel que $E=\{ux;\ x\in E^{\chi}\}$. Donc, si la puissance du famillie de tous types des chaînes homogénes uniquement soit plus petit que $2^{2^{\aleph_0}}$, la puissance de l'ensemble de toutes chaînes homogéne uniquement qui sont à la fois sous-groupes de L serait plus petit que $2^{2^{\aleph_0}}$, contrairement à la proposition précédente, donc on a le

Théorème II. *Il y a* $2^{2^{\aleph_0}}$ *types des chaînes homogènes uniquement.*

Avant de finir, l'auteur rendrait grâce à Prof. Motokiti Kondô par ses suggèstions et assistance bonne pour cette note.

References

G. Birkhoff: Lattice Theory. New York (1940).
A. Denjoy: L'Enumeration Transfinie. Paris (1952).
F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig (1914).