2. Sur l'Application Qui Fait Correspondre à un Point un Continu Bicompact

Par Masuo HUKUHARA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1955)

1. Nous avons démontré[1] sous certaines conditions que la famille de toutes les courbes solutions d'une équation différentielle passant par un point est un continu bicompact dans l'espace de fonctions continues (C). Il y a donc lieu d'étudier l'application $\mathfrak{F}$ qui fait correspondre à un point x dans un espace R un ensemble $\mathfrak{F}(x)$ dans un espace $\mathfrak{R}$.[2] Une application $\mathfrak{F}$ est dite semi-continue supérieurement en a, si, à un ouvert quelconque $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{F}(a)$, on peut faire correspondre un voisinage $U(a)$ tel que $\mathfrak{F}(U(a))\subseteqq\mathfrak{G}$. Une suite d'applications $\{\mathfrak{F}_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ est décroissante ou croissante suivant que l'on a $\mathfrak{F}_\lambda(x)\subseteqq\mathfrak{F}_\mu(x)$ ou $\mathfrak{F}_\lambda(x)\supseteqq\mathfrak{F}_\mu(x)$ pour $\lambda>\mu$.

L'intersection d'une suite décroissante de continus bicompacts étant un continu bicompact, on a le

Théorème 1. *Si $\{\mathfrak{F}_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ est une suite décroissante d'applications qui font correspondre à un point un continu bicompact, la limite $\mathfrak{F}$ définie par $\mathfrak{F}(x)=\bigcap_\lambda\mathfrak{F}_\lambda(x)$ possède la même propriété.*

Soit A un ensemble bicompact contenu dans le domaine de définition d'une application $\mathfrak{F}$ bicompacte et semi-continue supérieurement. Si $\boldsymbol{G}$ est une famille d'ouverts qui couvre $\mathfrak{F}(A)$, on peut faire correspondre à $x\in A$, une sous-famille finie $\boldsymbol{G}(x)$ de $\boldsymbol{G}$ qui couvre $\mathfrak{F}(x)$. D'après la semi-continuité supérieure de $\mathfrak{F}$, on peut trouver un voisinage $U(x)$ tel que $\mathfrak{F}(U(x))\subseteqq\mathfrak{G}(x)$, où $\mathfrak{G}(x)$ est la réunion de $\boldsymbol{G}(x)$. D'après la bicompacité de A, on peut trouver un nombre fini de points $x_i\in A$ $(i=1,\dots,n)$ tels que $\bigcup_i U(x_i)\supseteqq A$. La réunion de $\boldsymbol{G}(x_i)$ $(i=1,\dots,n)$ couvre $\mathfrak{F}(A)$. On a donc le

Théorème 2. *Soit $\mathfrak{F}$ une application bicompacte et semi-continue supérieurement. Si A est un ensemble bicompact, $\mathfrak{F}(A)$ est aussi un ensemble bicompact.*

Soient $\mathfrak{E}$ un ensemble fermé sur $\mathfrak{F}(A)$ et B l'ensemble défini par $B=\{x\in A;\ \mathfrak{F}(x)\cap\mathfrak{E}\neq 0\}$. Si un point d'accumulation $b\in A$ de B n'appartient pas à B, $\mathfrak{F}(b)$ et $\mathfrak{E}$ sont disjoints. $\mathfrak{E}$ étant fermé sur $\mathfrak{F}(A)$, il existe un ouvert $\mathfrak{G}\supseteqq\mathfrak{F}(b)$ qui ne contient aucun point de $\mathfrak{E}$.

---

1) Proc. Japan Acad., **29**, 154–155 (1953). Voir aussi T. Kanazawa, A. Iwasaki, et H. Murakami: Ibid., **30**, 96–97 (1954).

2) Pour fixer les idées, nous supposons que R et $\mathfrak{R}$ soient des espaces accessibles.

Un voisinage quelconque $U(b)$ contenant au moins un point de B, on ne peut avoir $\mathfrak{F}(U(b))\subseteqq\mathfrak{G}$. On a donc le

Théorème 3. *Soit $\mathfrak{F}$ une application semi-continue supérieurement. Si $\mathfrak{E}$ est un ensemble fermé sur $\mathfrak{F}(A)$, l'ensemble $\{x \in A, \mathfrak{F}(x)\cap\mathfrak{E}\neq 0\}$ est fermé sur A.*

On en déduit immédiatement le

Théorème 4. *Soit $\mathfrak{F}$ une application semi-continue supérieurement, qui fait correspondre à un point un ensemble connexe. L'image $\mathfrak{F}(A)$ d'un ensemble connexe A est connexe.*

Les théorèmes 2 et 4 entraînent le

Théorème 5. *Si $\mathfrak{F}$ est une application qui fait correspondre à un point un continu bicompact, l'image $\mathfrak{F}(A)$ d'un continu bicompact A est aussi un continu bicompact.*

2. Dans le cas d'une inéquation différentielle, l'application qui fait correspondre à un point la famille des courbes solutions passant par ce point fait correspondre à un point un continu bicompact dans l'espace (C). C'est ce que l'on voit sans peine. Grâce au théorème 1, on obtient donc le théorème généralisé de Kneser cité au début.

On peut étendre cette considération à l'équation intégrale

$$\vec{y}(x)=\vec{f}(x)+\int_0^x\vec{K}(x, t, \vec{y}(t))dt, \tag{1}$$

où $\vec{K}(x,t,\vec{y})$ est supposée continue et bornée dans le domaine D: $0\leqq t\leqq x\leqq 1$, $|\vec{y}|<\infty$.

Considérons une solution $\vec{\varphi}\,(x)$ de l'inéquation intégrale

$$\left|\vec{y}(x)-\vec{f}(x)-\int_0^x\vec{K}(x, t, \vec{y}(t))dt\right|\leqq\frac{1}{m}x, \tag{2}$$

où m désigne un entier positif. Intercalons entre 0 et 1 une suite de nombres croissants $(0=a_0)$, $a_1, a_2,\dots, a_{n-1}$, $(a_n=1)$. Nous définissons $\vec{\varphi}(x, \xi)$ comme il suit:

$\vec{\varphi}(x, \xi)=\vec{\varphi}(x)$ pour $0\leqq x\leqq\xi$;

Si $a_k\leqq\xi<a_{k+1}$, nous posons

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(x, \xi)=&\vec{\varphi}(\xi)+(x-\xi)\vec{K}(x, \xi, \vec{\varphi}(\xi))\\&+\vec{f}(x)-\vec{f}(\xi)+\int_0^\xi\{\vec{K}(x, t, \vec{\varphi}(t))-\vec{K}(\xi, t, \vec{\varphi}(t))\}dt\end{aligned}$$

pour $\xi\leqq x\leqq a_{k+1}$;

Si $\vec{\varphi}(a_l)$ est définie $(l>k)$, nous posons

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(x, \xi)=&\vec{\varphi}(a_l, \xi)+(x-a_l)\vec{K}(x, a_l, \vec{\varphi}(a_l, \xi))\\&+\vec{f}(x)-\vec{f}(a_l)+\int_0^{a_l}\{\vec{K}(x, t, \vec{\varphi}(t, \xi))-\vec{K}(a_l, t,\vec{\varphi}(t, \xi))\}dt\end{aligned}$$

pour $a_l\leqq x\leqq a_{l+1}$.

Si tous les intervalles partiels (a_l, a_{l+1}) sont assez petits, $\vec{\varphi}(x, \xi)$

est une solution de (2). Elle varie d'une manière continue avec ξ dans l'espace (C). Elle coïncide avec $\vec{\varphi}(x)$ pour $\xi=1$, et $\vec{\varphi}(x, 0)$ ne dépend pas de la solution $\vec{\varphi}(x)$. Si donc $\mathfrak{K}_m$ est l'application qui fait correspondre à $\vec{f}$ la famille des solutions de (2), elle fait correspondre à $\vec{f}$ un continu bicompact dans l'espace (C). L'application $\mathfrak{K}$ qui fait correspondre à $\vec{f}$ la famille des solutions de (1) est la limite de la suite décroissante $\{\mathfrak{K}_m\}$. Par suite, l'application $\mathfrak{K}$ fait correspondre à $\vec{f}$ un continu bicompact dans l'espace (C).